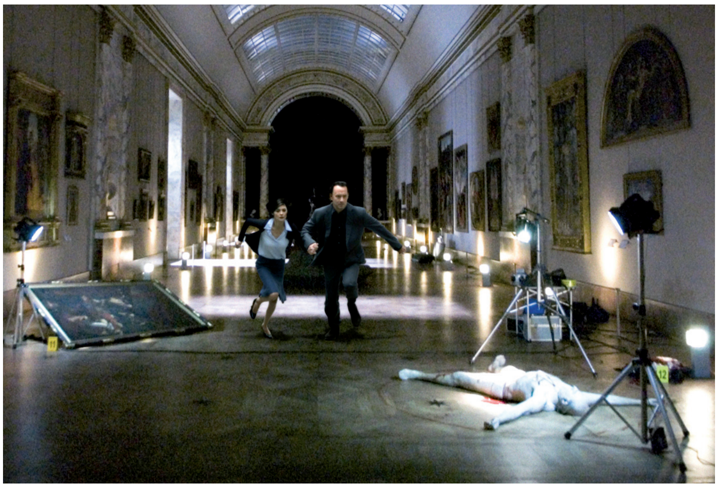
2008 hat die Bundesregierung zum Jahr der Mathematik erklärt. Sie will damit deutlich machen, dass diese faszinierende Wissenschaft sehr viele Facetten hat und nicht nur Basis aller Naturwissenschaften und technischen Entwicklungen, sondern auch ständige Begleiterin des Menschen im Alltag ist. Ziel des Wissenschaftsjahres 2008 ist es, der Öffentlichkeit die Faszination der Mathematik näher zu bringen. In Deutschland ist das dringend notwendig, da es noch immer gang und gäbe ist, mit der Unfähigkeit in der Mathematik zu kokettieren. Das ist in anderen – auch europäischen – Ländern anders. Die Oldenburger MathematikerInnen haben mit einem großen Veranstaltungsprogramm besonders Jugendliche und Kinder ansprechen können. Auch die folgenden drei Beiträge sollen dabei helfen, Einblicke in dieses für viele präsente und doch fremde Fach zu vermitteln.

Da Vinci Code, Smart Cards und Electronic Banking

Von Andreas Stein

Der Artikel präsentiert Anwendungen der Mathematik in der Kryptologie und erklärt, wie Mathematik auch in der Praxis begeistern kann. Warum ist der Thriller „The Da Vinci Code - Sakrileg“ von Dan Brown so erfolgreich? Warum ist Informationssicherheit im Alltag so wichtig? Und welche Rolle spielt dabei die Mathematik?

The article presents applications of Mathematics in Cryptology and explains how Mathematics in practice can be interesting, even exciting. Why is the thriller „The Da Vinci Code“ by Dan Brown so successful? Why is information security so important in our everyday lives? And what role does Mathematics play?



Kryptologie als Stoff zahlreicher Filme und Serien: Tom Hanks und Audrey Tautou in Ron Howards Verfilmung des Thrillers „The Da Vinci Code – Sakrileg “ von Dan Brown.

Die folgende Szene aus dem Film „The Da Vinci Code – Sakrileg“ (USA, 2006) bleibt dem Zuschauer besonders nachdrücklich in Erinnerung: Tom Hanks steht in der Grand Galerie des Pariser Louvre. Seine Augen sind vor Entsetzen weit geöffnet, als er den renommierten Kurator nackt und leblos ausgestreckt auf dem Boden liegen sieht. Hanks schreitet blitzschnell zur Tat und versucht – im Kampf gegen die Zeit – die kryptischen Nachrichten zu entschlüsseln, die in einem unbezahlbaren Kunstwerk versteckt wurden. Es geht um eines der wichtigsten historischen Themen, nämlich um die Frage, ob Jesus Christus einen lebenden Nachfahren hat. Nachdem der Thriller „Sakrileg“ von Dan Brown ein weltweiter Bestseller wurde, verfilmte Ron Howard das 2003 erschienene Buch mit Superstars wie Tom Hanks als Robert Langdon und Audrey Tautou als Sophie Neveu. Robert Langdon ist Symbologe an der Harvard-Universität, der zufällig in Paris weilt. Mitten in der Nacht wird er von der Polizei geweckt und zum Louvre gebracht. Dort hat der Kurator seiner Enkelin Sophie Neveu eine verschlüsselte Botschaft von enormer Bedeutung hinterlassen. Sophie arbeitet als Kryptologin bei der Pariser Polizei und erhielt ihre Ausbildung durch die Kryptographieexperten am Royal Holloway, University of London.

Die Faszination der Geschichte entsteht aus zwei bahnbrechenden Zutaten: Dan Browns kontroversen Thesen über den heiligen Gral

Kryptographie als unverzichtbarer Eckpfeiler der Privatsphäre: Datenverschlüsselung sorgt u.a. in medizinischen Datenbanken, beim Electronic Banking und bei Smart Cards für Informationssicherheit.

und der Kryptologie mit diversen Facetten der Informationssicherheit. Viele Einzelheiten aus der Kryptologie, der elementaren Zahlentheorie und der Codierungstheorie entsprechen tatsächlich der Wahrheit. Allerdings hat Dan Brown diese Zutaten dramatisierend zusammengemischt. Das riesengroße öffentliche Interesse an dem Buch und dem Film ist dennoch ein Indiz dafür, dass Brown die Bedeutung der Informationssicherheit in der heutigen Gesellschaft richtig einschätzte und damit Erfolg hatte.
Andere Beispiele für die Brisanz des Themas sind Filme wie „Sneakers – Die Lautlosen" (USA, 1992), „ Enigma – Das Geheimnis" (USA, GB, DE, 2001) und „Breaking the Code" (USA, 1997) oder TV-Serien wie „Numb3rs". Bücher wie Dan Browns „Sakrileg" werden von vielen förmlich verschlungen, und das wird sich vermutlich auch auf Jahre hinweg nicht ändern. Grund dafür ist der Umstand, dass Kryptologie heutzutage mehr kommerziell als militärisch genutzt wird. Die modernsten Technologien werden für Handys, PDAs (persönliche digitale Assistenten), Bankautomaten und sogar für das Electronic Voting verwendet. Niemand möchte, dass Verbrechern ein einfacher Zugriff auf das eigene Bankkonto ermöglicht wird oder dass Wahlen durch das Vollstopfen elektronischer Wahlurnen mit Stimmen für Paris Hilton manipuliert werden.

Informationssicherheit

Statistiken scheinen die Bedeutung der Informationssicherheit zu untermauern: Eine Internetumfrage unter Verbrauchern ergab, dass Internetviren von 2004 bis 2006 ein Schaden von ca. 8 Milliarden US $ verursacht haben. Solche Viren können ganze Banksysteme zusammenbrechen lassen und den Zugriff auf persönliche Informationen vieler kommerzieller Benutzer ermöglichen. Damit geht nicht nur Geld, sondern auch das Vertrauen in solche Systeme verloren. Ob man elektronisch Gelder transferiert, Krankenblätter speichert oder persönliche E-Mails versendet, die meisten Transaktionen in der heutigen Zeit gefährden die Privatsphäre jedes Einzelnen. In einer zunehmend von elektronischer Kommunikation dominierten Welt bilden Informationssicherheit und durch Kryptographie ermöglichte Privatsphäre die Eckpfeiler. Informationssicherheit ist in fast allen Bereichen relevant, von medizinischen Datenbanken über Electronic Banking und Smartcards bis hin zu Eletronic Voting. Solche Informationen sind in allen Fällen nur so sicher wie die zugrunde liegenden kryptographischen Richtlinien. In der medizinischen Anwendung beispielsweise spielt die Sicherheit eine immer wichtigere Rolle. Will ein behandelnder Arzt sensible, persönliche Daten eines Patienten schnellstmöglich per Fax oder Internet zu einem anderen Arzt übermitteln, so muss er die Anonymität des Patienten und die Sicherheit der Daten garantieren können.

Kryptographie und Kryptanalyse

Die Kryptologie unterteilt sich in zwei Gebiete: In der Kryptographie werden Methoden zur geheimen Übertragung von Daten entwickelt, damit diese nur mit dem zusätzlichem Wissen von geheimen Schlüsseln lesbar sind, während in der Kryptanalyse versucht wird, verschlüsselte Daten wieder lesbar zu machen, ohne im Besitz des geheimen Schlüssels zu sein. Die mathematische Kryptologie, die sich mit mathematischen Modellen der Kryptologie beschäftigt, ist immer noch ein relativ neues Gebiet, das immer wieder durch aktuelle Komponenten ergänzt wird. Denn alle kryptographischen Strukturen basieren auf einem mathematischen Problem. Sollte dieses mathematische Problem einfach sein, so hat man ein extrem unsicheres System kreiert und somit die erste Stufe der Informationssicherheit nicht überwunden. Die Mathematik spielt bei der Konstruktion von Kryptosystemen und auch beim Herausfiltern unsicherer Kryptosysteme eine prominente Rolle. Dazu werden Hilfsmittel aus vielen Teilgebieten der Mathematik, wie zum Beispiel der Zahlentheorie, der Geometrie und deren algorithmischen Varianten, verwendet. Die National Security Agency der USA, ein überdimensionales Pendant zum Bundesamt für Sicherheit in der Informationstechnik, beschäftigt derzeit ca. 500 promovierte Mathematiker und stellt jährlich ca. 30 Mathematiker neu ein. Das unterstreicht, wie wichtig die Rolle der Mathematik in diesem Bereich ist.

Kryptosysteme

Eine Möglichkeit zur Verwendung kryptographischer Strukturen zur sicheren Kommunikation über ein öffentliches Netzwerk ist ein Symmetrisches Kryptosystem, in dem beide Benutzer den geheimen Schlüssel kennen müssen. Der Ausdruck „Symmetrisch" kommt daher, dass beide Benutzer zum Ent- und Verschlüsseln im Prinzip einen identischen Schlüssel verwenden. Die Herausforderung besteht darin, diesen geheimen Schlüssel über ein Netzwerk wie das Internet zu transferieren. Dazu gibt es eine Vielzahl von Schlüsselaustauschprotokollen. Die Sicherheit der meisten praktisch und kommerziell genutzten Protokolle beruht dabei auf der Schwierigkeit gewisser zahlentheoretischer Probleme. Um das System zu sprengen, muss ein „Angreifer" eine Lösung des zugrunde liegenden schwierigen Problems finden.
In Deutschland kommt der Zahlentheorie mit all ihren Facetten schon historisch gesehen eine Ausnahmestellung zu: Kein anderer als Carl Friedrich Gauß beeinflusste dieses wichtige Teilgebiet der Mathematik der Neuzeit. 1801 veröffentlichte er seine fundamentale Arbeit „Disquisitiones Arithmeticae", die allgemein als die Grundlage für die weitere Entwicklung der Zahlentheorie angesehen wird. Zwar kannten bereits die Babylonier, die Ägypter und die Griechen, allen voran Euklid (ca. 300 v. Chr.), Begriffe der elementaren Arithmetik. Es war jedoch Gauß, dessen Jahrhundertwerk dazu führte, dass die Zahlentheorie zu einem selbständigen Forschungsgebiet erhoben wurde. Die Bedeutungder modernen Variante, der Arithmetischen Geometrie, wurde zu Beginn der 1990er Jahre evident, als eines der wichtigsten und schwierigsten Probleme moderner Mathematik mit fundamentalen Techniken aus diesen Gebieten gelöst wurde. Der Beweis von Fermats letztem Satz von Taylor und Wiles [1995, Annales of

Mathematics] nach einer genialen Idee von Gerhard Frey (IEM, Universität Duisburg-Essen) erregte weltweites Aufsehen. Das Problem kann elementar formuliert werden: Für jede natürliche Zahl n größer als 2 hat die Gleichung $x^n+y^n=z^n$ keine ganzzahligen Lösungen mit xyz ungleich 0. Zum Beweis benötigt man jedoch tiefe Resultate aus der Theorie der Elliptischen Kurven und der Modulformen.

Die zweite Art der Nutzung kryptographischer Strukturen betrifft Asymmetrische Kryptosysteme. Das sind solche Kryptosysteme, in denen die Verschlüsselung öffentlich bekannt ist, während die Entschlüsselung geheim bleiben muss. Außerdem darf es keine „Falltür“ (Trapdoor) geben, mit der man den geheimen Schlüssel schnell aus dem öffentlichen Schlüssel ermitteln kann. Das berühmteste Beispiel hierfür ist das RSA-Kryptosystem, das nach seinen Erfindern Rivest, Shamir und Adleman vom Massachusetts Institute of Technology benannt ist. Mit RSA benötigt ein Benutzer als seinen öffentlichen Schlüssel mindestens eine 2048-Bit-Zahl, die als Produkt von zwei verschiedenen 1024-Bit-Primzahlen erzeugt wird. (Eine Primzahl p ist eine Zahl größer als 1, deren einzige positive Teiler 1 und p sind.) Diese Primzahlen kann man relativ effizient erzeugen, und das Zusammenmultiplizieren zweier Primzahlen ist einfach. Ein „Angreifer“ kennt jedoch die ursprünglichen Primzahlen nicht und steht vor dem schwierigen Problem, eine 2048-Bit-Zahl in genau zwei Primfaktoren zerlegen zu müssen.

In den letzten Jahren spielen die Elliptischen Kurven auch in der Kryptologie eine immer wichtigere Rolle. Das zugrunde liegende Problem scheint ein besonders schwieriges zahlentheoretisches Problem zu sein. Deshalb kann man in Elliptischen-Kurven-Kryptosystemen mit viel kleineren Schlüsseln operieren. Die Arithmetik algebraischer Kurven und ihre Relevanz in der Kryptologie ist ein wichtiges Forschungsthema der Arbeitsgruppe Algebra und Geometrie am Institut für Mathematik. Diese Forschungsrichtung beinhaltet damit auch konstruktive und destruktive Aspekte von Kryptosystemen, die auf der Arithmetik von Elliptischen und Hyperelliptischen Kurven basieren. Das ist Kryptologie für die nahe und ferne Zukunft.

Der Autor

Prof. Dr. Andreas Stein ist Hochschullehrer für Mathematik mit dem Schwerpunkt Algebra/ Geometrie am Institut für Mathematik. Er studierte Mathematik und Informatik an der Universität des Saarlands, wo er als Siemens-Stipendiat promovierte und als Wissenschaftlicher Mitarbeiter tätig war. Als Postdoktorand ging er 1997 nach Kanada an die Universitäten in Winnipeg und Waterloo. Bevor er nach Oldenburg kam, forschte und lehrte Stein an der University of Illinois (Urbana-Champaign, USA) und der University of Wyoming (Laramie, USA). Zu seinen Forschungsinteressen zählen neben der Kryptologie die Zahlentheorie, die Arithmetische Geometrie und die Computer-Algebra.

Die Geometrie der Obertöne

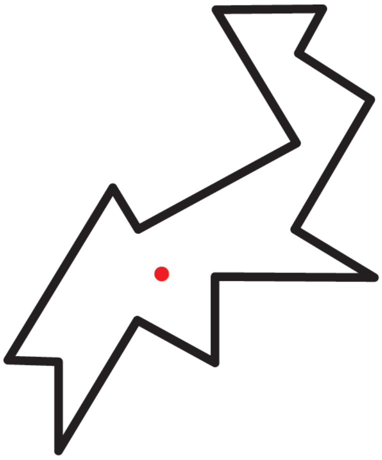
Von Daniel Grieser

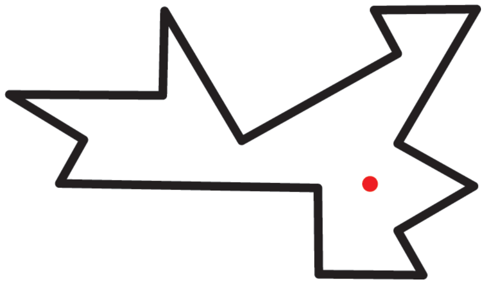
Die Obertöne musikalischer Klänge, die Resonanzfrequenzen schwingungsfähiger Strukturen und die quantisierten Energien der Elektronen in Molekülen sind im mathematischen Kern dieselben Dinge: Sie alle sind Lösungen desselben Typs von Gleichung, einer Schwingungsgleichung. Die Untersuchung dieser Gleichungen ist einer der Forschungsschwerpunkte im Bereich „Mathematische Strukturen: Theorie und Anwendungen“ am Institut für Mathematik. In dem Beitrag werden einige Forschungsergebnisse zu der Frage vorgestellt, wie die Form eines schwingenden Systems die Frequenzen seiner Obertöne beeinflusst.

The harmonics of musical notes, the resonance frequencies of vibrating structures and the quantized energy levels of electrons in a molecule are essentially the same mathematically: they are solutions of the same type of equation, the wave equation. The study of these equations is an current area of mathematical research and one of the foci of research in the Institute of Mathematics. This article explains some results of research on the question how the shape of a vibrating system influences the frequencies of its harmonics.

Trommeln als mathematisches Forschungsobjekt: indische Tablas.

Schwingungen begegnen uns überall: Jeder Klang ist Schwingung, Resonanzen bringen Brücken zum Einsturz, die Schwingungen der quantenmechanischen Wellenfunktion bestimmen die Eigenschaften der Atome und Moleküle. Daher hat die





Die Form zweier Trommeln, die gleich klingen: Sie haben dieselben Obertöne, und schlägt man sie jeweils im roten Punkt an, klingen diese auch in denselben relativen Intensitäten.

Untersuchung von Schwingungen zentrale Bedeutung in den Naturwissenschaften. Mathematisch werden sie durch Gleichungen beschrieben, sogenannte Schwingungs- (oder Wellen-) Gleichungen, zu denen auch die Schrödinger-Gleichung zählt. Diese Gleichungen spiegeln die physikalischen Gesetze wider, die den Schwingungsphänomenen zugrunde liegen. Um ein Phänomen zu verstehen, zum Beispiel um die Resonanzfrequenzen ohne Experiment zu bestimmen, muss man die Gleichung lösen.

Hier beginnen die Schwierigkeiten: Schwingungsgleichungen gehören zur Klasse der partiellen Differentialgleichungen, und deren typisches Merkmal ist es, dass sie sehr schwierig zu lösen sind. Nicht, dass die Lösungsformel bloß kompliziert wäre – in den meisten Fällen gibt es keine Lösungsformel! Das heißt, die Natur lebt uns die Lösung vor, aber wir haben keine Möglichkeit, sie in einer Formel zu fassen.

Die Kunst der Mathematik besteht darin, mit Intuition, Ideen und Geduld Methoden zu entwickeln, die trotzdem etwas über die Lösungen verraten. Im Folgenden werden exemplarisch zwei Arten schwingender Systeme im Licht der Mathematik betrachtet: Trommeln sowie Netzwerke von Quantendrähten. Auf ein Charakteristikum der Schwingungen, die Resonanz- oder Obertonfrequenzen, wird dabei besonders eingegangen. Zunächst wird kurz die Schwingungsgleichung erläutert, dann werden einige typische mathematische Fragestellungen erörtert und schließlich einige neuere Forschungsergebnisse vorgestellt.

Gleichung der Schwingungen

Jedes schwingungsfähige System besitzt sogenannte Eigenfrequenzen. Dies sind die Resonanzfrequenzen, bei denen das System unter äußerer Anregung besonders stark mitschwingt. Bei hörbaren Schwingungen sind das gleichzeitig die Frequenzen des Grundtons und der Obertöne, und in der Quantenmechanik die quantisierten Werte der Energie des Systems. Seit dem 19. Jahrhundert kennt man die Grundgleichung der Schwingungen.

Für die Experten sei erwähnt, dass hier die Rede von der Gleichung $-\Delta u = f^2 u$ ist. Dabei bezeichnet f die Eigenfrequenz und u eine Funktion, welche für jedes schwingende Teilchen seine Auslenkung angibt und damit die Form der Schwingung beschreibt, und Δ steht für den Laplace-Operator. Die Gleichung hat unendlich viele Lösungen – dies zu beweisen, war eine der großen Errungenschaften der Mathematik des frühen 20. Jahrhunderts –, und jede Lösung entspricht einer Eigenfrequenz. Soweit die einfachste Form der Gleichung, die aber schon den Kern der Sache enthält. Je nach Kontext sind Faktoren zu ergänzen, die Materialeigenschaften (z.B. Steifheit) beschreiben, sowie Terme für das elektrische oder magnetische Feld (z.B. in der Quantenmechanik).

Die Schwingungsgleichung ist eine lineare Gleichung. In manchen Expertenkreisen und auch in der populärwissenschaftlichen Literatur wird der Eindruck vermittelt, dass in der Welt der linearen Gleichungen bereits alles verstanden wäre und interessante, schwierige Probleme nur von Nichtlinearität herrühren könnten. Dies trifft auf die Schwingungsgleichung nicht zu: Sie führt zu einer Fülle spannender Fragen und Phänomene und steht im Zentrum vieler aktueller Forschungsprojekte. Aus Sicht der Physik ist zu bemerken, dass die lineare Schwingungsgleichung mechanische Schwingungen nur annähernd korrekt modelliert, aber im Fall der Quantenmechanik oder elektromagnetischer Wellen exakt ist.

Harmonische Obertöne

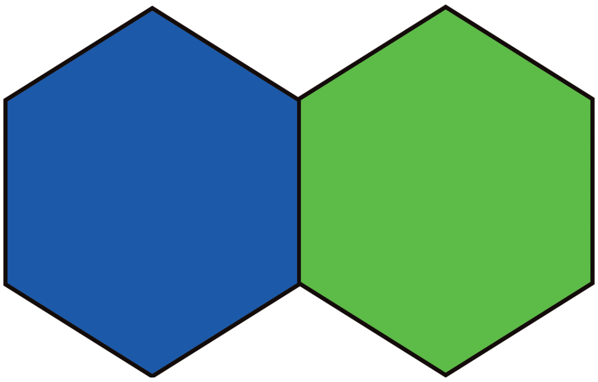
Wie erwähnt, lässt sich die Schwingungsgleichung in den wenigsten Fällen exakt lösen. Einer dieser seltenen Fälle ist der einer Saite: Die Eigenfrequenzen der Saite stehen im Verhältnis 1 : 2 : 3 : ... Das sind genau die Frequenzverhältnisse der bekannten harmonischen Obertöne, die den Intervallen Oktave, Quinte usw. entsprechen. Diese sind charakteristisch für Systeme, deren Schwingungen von einer annähernd eindimensionalen Struktur erzeugt werden. Neben der Saite gehören hierzu auch die Luftsäulen in Blasinstrumenten. Daher erzeugen die meisten Musikinstrumente harmonische Obertöne.

Weniger bekannt ist, dass bei mehrdimensionalen Systemen die Obertöne andere Verhältnisse bilden. Eine runde Trommel (zweidimensionale Membran) erzeugt zum Beispiel Obertöne mit den Frequenzverhältnissen 1 : 1,59 : 2,14 : ... Nur durch Modifizieren des Systems, etwa durch einen Resonanzkörper oder durch Änderung der Schwingungseigenschaften der Membran (etwa bei der indischen Tabla durch Aufbringen einer Paste), kann man zumindest einige Obertöne wieder harmonisieren und einen schöneren Klang erzeugen.

Hilft der Computer?

Die Frage liegt nahe: Kann man die Eigenfrequenzen mit dem Computer ausrechnen? In der Tat: Die numerische Mathematik stellt hierfür Methoden bereit, und sie werden einem Ingenieur dabei helfen, die Resonanzfrequenzen einer konkreten Struktur zu bestimmen.

Für Wissenschaftler interessanter ist jedoch die Frage: Wie beeinflusst die Form der schwingenden Struktur deren Eigenfrequenzen? Das heißt, kann man den funktionalen Zusammenhang von Form (Geometrie des Systems) und Eigenfrequenzen quantitativ oder zumindest qualitativ verstehen? Das kann auch für den Ingenieur nützlich sein, wenn er zum Beispiel seine Struktur derart planen muss, dass gewisse Resonanzfrequenzen nicht auftreten. Zwar kann auch hier der Computer helfen: Mittels Computerexperimenten lassen sich manchmal Gesetzmäßigkeiten entdecken. Aber deren Ursachen zu verstehen, zu untersuchen, unter welchen Umständen sie



Skelett eines aromatischen Kohlenwasserstoffs (Naphthalin).

wirklich eintreten, und dies zu beweisen – das ist das Brot der Mathematiker (und auch der theoretischen Physiker). Zahlreiche mathematische Disziplinen spielen dabei mit: Neben Analysis und Geometrie auch Zahlentheorie, Algebra und Topologie.

Kann man Formen hören?

Betrachten wir nun eine Trommel, d.h. eine Membran, die am Rand fest eingespannt ist. Die Trommel muss nicht rund sein – sie kann rechteckig, elliptisch, ringförmig oder ganz unregelmäßig geformt sein. Trommeln sind recht anschaulich, und viele andere Systeme verhalten sich ähnlich. Hier zwei klassische Resultate zu der Frage, wie die Form der Trommel die Eigenfrequenzen beeinflusst:

- Je größer die Trommel, desto niedriger die Eigenfrequenzen. Dies ist für den Grundton (die niedrigste Eigenfrequenz) aus alltäglicher Erfahrung bekannt, für die Obertöne jedoch weit weniger offensichtlich.
- Der Flächeninhalt der Trommel bestimmt, wie schnell die Eigenfrequenzen wachsen: Die n'te Eigenfrequenz ist etwa $4\pi n$/*Fläche*. Der Umfang der Trommel bestimmt, wie die Eigenfrequenzen um diesen Wert schwanken.

Man kann auch das inverse Problem stellen. „Kann man die Form einer Trommel hören?“, formulierte Mark Kac 1966 in einem berühmten Artikel. Ist also die Form der Trommel eindeutig durch ihre Eigenfrequenzen bestimmt? Erst 1991 fand man heraus, dass dies nicht der Fall ist (s. Abb. S. 23). Manche geometrische Information kann man aber doch hören, d.h. aus den Eigenfrequenzen bestimmen, so zum Beispiel – entsprechend dem gerade erwähnten zweiten Resultat – Fläche und Umfang. Auch die Anzahl der „Löcher“ kann man hören. Vieles ist aber unbekannt. Zum Beispiel haben die Trommeln in der Abbildung Ecken, so wie auch alle anderen bekannten Gegenbeispiele. Ob man die Form einer Trommel ohne Ecken hören kann, ist ein offenes Problem.

Inverse Probleme sind mit relevanten Anwendungsbereichen verknüpft. So misst man in der Geologie bei Erdbeben oder künstlichen Detonationen Schwingungen an der Erdoberfläche, woraus Aufschlüsse über geometrische Strukturen im Erdinneren (Gesteinsschichten, Ölfelder) gewonnen werden. Auch bei der Spektroskopie – einer zentralen Analyse-Methode der Naturwissenschaften – löst man im Kern ein solches inverses Problem: Die Spektrallinien entsprechen Energieniveaus (Eigenfrequenzen) von Elektronen, von denen man auf das schwingende System (das Atom oder Molekül) zurückschließen will.

Schwingende Nanoröhren

Große Fortschritte konnten kürzlich bei der Untersuchung der Schwingungseigenschaften netzwerkartiger Strukturen erzielt werden. Aktuelle Beispiele solcher Strukturen sind Netzwerke von Nanoröhren und die Leiterbahnen hochintegrierter Schaltkreise, deren elektrische Leitungseigenschaften von quantenmechanischen Effekten dominiert und daher mit Hilfe der Schrödinger-Gleichung beschrieben werden müssen (sogenannte Quantendrähte). Ein klassisches Beispiel sind aromatische Kohlenwasserstoffe, deren „Skelett“ netzwerkartig ist und für deren chemische Eigenschaften die quantenmechanischen Energieniveaus der Valenzelektronen verantwortlich sind (s. Abb. oben).

Zur Vereinfachung der Rechnungen ignoriert man zunächst die räumliche Ausdehnung der Netzwerkäste, d.h. man modelliert die untersuchte Struktur durch ihr eindimensionales Skelett. Dieses Skelett kann man sich als Netzwerk von Saiten vorstellen, die an ihren Enden miteinander verknüpft sind. An jedem solchen Knoten laufen mehrere Saiten zusammen. Versetzt man das System in Schwingung, so beeinflusst jede Saite über gewisse Kopplungsgesetze an den Knoten die Schwingung der anderen Saiten.

Die Eigenfrequenzen solcher gekoppelter Netzwerke, sogenannter Quantengraphen, wurden in den letzten 20 Jahren intensiv untersucht. Ein Problem dabei blieb aber lange Zeit ungeklärt: Wie sind die Kopplungen an den Knoten zu wählen, damit die Schwingungen des Quantengraphen auch wirklich den Schwingungen der ursprünglichen räumlichen Struktur entsprechen? Bisher hat man hier meist als Kopplungsgesetz eine an das Kirchhoffsche Gesetz der elektrischen Netzwerke angelehnte Regel angenommen: Die Zugkräfte (im Saiten-Modell) an jedem Knoten summieren sich zu Null. In einer kürzlich erschienenen Arbeit konnte ich jedoch zeigen, dass dies in den meisten Fällen – abhängig von der exakten räumlichen Geometrie der Struktur – nicht die korrekte Modellierung ist, und eine systematische Methode zur Bestimmung des korrekten Kopplungsgesetzes angeben. Damit wird eine genauere Berechnung der Eigenfrequenzen räumlicher netzwerkartiger Strukturen möglich und die Grundlage zur Untersuchung eines inversen Problems von praktischer Relevanz gelegt: Wie muss ein Netzwerk geometrisch realisiert werden, damit die Schwingungen vorgegebenen Kopplungsgesetzen genügen?

Der Autor

Prof. Dr. Daniel Grieser ist seit 2005 Hochschullehrer für Mathematik mit dem Schwerpunkt Analysis am Institut für Mathematik. Grieser studierte Mathematik und Physik an der Freien Universität Berlin und promovierte 1992 an der University of California, Los Angeles. Nach Tätigkeiten am Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, und am Mathematical Sciences Research Institute in Berkeley kehrte er nach Deutschland zurück, wo er sich an der Humboldt Universität Berlin 2001 habilitierte. 2002 erhielt er ein Heisenberg-Stipendium. Seine Arbeitsgebiete sind Partielle Differentialgleichungen, insbesondere Spektraltheorie, sowie Globale Analysis, Differentialgeometrie und Kombinatorik.

In einer dreijährigen Längsschnittstudie wird der Einfluss vorschulischer mathematischer Förderung auf die Leistungen im Mathematikunterricht am Ende von Klasse 1 und 2 untersucht. Im Mittelpunkt steht die Frage, inwieweit potenzielle „Risikokinder" im Jahr vor ihrer Einschulung identifiziert und gefördert werden können.

Recent research findings highlight the significance of early numeracy skills for the child's performance in mathematics at the end of the first and second year in primary school. In this context, a three-year longitudinal study seeks to investigate the influence of pre-school interventions on children's mathematical achievement in primary school.

Mathematik im Übergang vom Kindergarten zur Grundschule

Von Andrea Peter-Koop und Meike Grüßing

Spielerisch im Kindergarten erlernte Fähigkeiten machen fit für den schulischen Mathematikunterricht.

Bereits im Kindergartenalter entwickeln sich entscheidende „Vorläuferfähigkeiten" für die späteren schulischen Lernprozesse. Dies gilt besonders für den Lernbereich Mathematik. Laut der PISA-Studie aus dem Jahr 2003 führt schon der einjährige Besuch einer Kindertagesstätte zu signifikant höheren Ergebnissen der schulischen Leistungen am Ende der Sekundarstufe I.
Darüber hinaus indizieren aktuelle Studien, dass zu erwartende schulische Rechenstörungen anhand des Stands der Entwicklung mathematischer „Vorläuferfähigkeiten" bereits im Jahr vor der Einschulung bzw. am Schulanfang prognostiziert werden können. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen legen nahe, dass eine vorschulische Förderung sinnvoll ist, um negative Lernerfahrungen zu vermeiden und tragfähige Voraussetzungen für das spätere schulische Lernen zu schaffen.
Die Befunde der SCHOLASTIK-Studie verweisen darauf, dass SchülerInnen, die die Grundschulzeit mit schwachen Mathematikleistungen beginnen, diese in der Regel bis zum Ende der Grundschule behalten. Weiterhin ist das fachspezifische Vorwissen für den Schulerfolg offenbar bedeutsamer als allgemeine kognitive Faktoren wie zum Beispiel Intelligenz.
Aus diesen Erkenntnissen erschließen sich dringende pädagogisch-didaktische Forschungs- und Handlungsfelder, denn die Frage, wie sogenannte potenzielle „Risikokinder" in Bezug auf das schulische Mathematiklernen flächendeckend identifiziert und gefördert werden können, ist bislang weitgehend ungelöst. Im Rahmen einer aktuellen, von der EWE-Stiftung geförderten Längsschnittstudie wird untersucht, wie „Risikokinder" – also Kinder, deren gering

ausgebildete mathematische Vorläuferfähigkeiten erhebliche Schwierigkeiten beim schulischen Mathematiklernen erwarten lassen – bereits vor ihrer Einschulung im Kindergarten erkannt und effektiv sowie nachhaltig gefördert werden können.

Zählkompetenzen statt Mengenlehre

Die aktuell zu beobachtende bildungspolitische (und damit zusammenhängend auch forschungsbezogene) Hinwendung zur vorschulischen Bildung ist keineswegs ein neues Phänomen. Aktivitäten zur mathematischen Bildungsförderung im Vorschulalter finden sich bereits in den 1960er und 1970er Jahren. Im Gegensatz zu früheren, stark verschulten Konzepten, die inhaltlich eng mit der strukturbezogenen so genannten „Neuen Mathematik" – also Mengenlehre – verbunden waren, steht basierend auf den neueren Forschungsergebnissen gegenwärtig stärker die Auseinandersetzung mit Zahlen und Zählen im Mittelpunkt. Methodisch wird ein enger Alltags- und Spielbezug vorschulischer mathematischer Bildung propagiert.
Die Bedeutung der Entwicklung mathematischer Vorläuferfähigkeiten vor Schulbeginn im Rahmen der Zahlbegriffsentwicklung wird durch empirische Studien eindrucksvoll belegt. In einer Längsschnittstudie im Kontext der Früherkennung von Rechenstörungen konnte ein signifikanter Zusammenhang zwischen mengen- und zahlenbezogenem Vorwissen und den Mathematikleistungen bis zum Ende der Grundschulzeit nachgewiesen werden. Ein erheblicher Teil der Mathematikleistung am Ende des zweiten sowie auch des vierten Schuljahres lässt sich demnach durch die Kenntnis von und das Wissen über Mengen und Zahlen sowie Zählfertigkeiten und frühe Rechenfertigkeiten bereits im letzten Kindergartenjahr vorhersagen.
Darüber hinaus zeigen die Befunde einer finnischen Studie einen Kumulationseffekt vorschulischer Defizite bei der Zahlbegriffsentwicklung. Kinder, die zu Beginn des letzten Kindergartenjahres nur über ein schwaches mengen- und zahlenbezogenes Vorwissen verfügen, vollziehen demnach eine deutlich langsamere mathematische Entwicklung als Kinder mit besseren Zahlen-Mengen-Kompetenzen.
An der aktuell in Oldenburg laufenden Studie haben 35 Kindertagesstätten im Rahmen der ersten Erhebung im Jahre 2005 teilgenommen – 17 aus dem Stadtgebiet Oldenburg und 18 aus Gemeinden im Umland. Insgesamt wurden mit Zustimmung der Eltern 947 Kinder ein Jahr vor ihrer Einschulung interviewt.
Zugrunde gelegt wurden der „Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung" (OTZ), das Elementarmathematische Basisinterview (EMBI) sowie ein Grundintelligenztest für Kinder ab dem Vorschulalter (CFT 1), um den Faktor Intelligenz kontrollieren zu können. Die Tests/Interviews wurden von Studierenden der Universität Oldenburg durchgeführt, die im Rahmen eines fachdidaktischen Seminars zur elementarmathematischen Diagnostik umfassend auf diese Aufgabe vorbereitet wurden. Von 947 befragten Kindern wurden 73 als potenzielle „Risikokinder" identifiziert. Deren vorschulische Förderung ist ein weiterer Bestandteil der laufenden Studie. Zu diesem Zweck wurden die „Risikokinder" in zwei Gruppen eingeteilt. Die Kinder der ersten Fördergruppe wurden von Studierenden im Rahmen einer Einzelförderung in den Kindergärten einmal wöchentlich von Januar bis Juni 2006 gezielt mathematisch gefördert. Die Grundlage für die Förderung bildeten individuelle Förderpläne.
Kinder einer zweiten Fördergruppe wurden durch ihre ErzieherInnen in ihren Gruppen gefördert. Grundlage waren auch hier individuelle Förderpläne. Allerdings erfolgte die Betreuung nicht wie in der Einzelförderung einmal wöchentlich zu festgelegten Zeiten, sondern flexibel in kleineren oder größeren Zeiteinheiten im Kindergartenalltag. Eine echte, d.h. nicht geförderte, Kontrollgruppe wurde nicht gebildet, da die schriftliche Zustimmung der Eltern Voraussetzung für die Teilnahme an der Studie war, und eine explizite Nichtförderung potenzieller „Risikokinder" aus ethischen Gründen nicht gerechtfertig erschien.

Deutliche Verbesserung der Risikokinder

Besondere Schwierigkeiten im Vergleich zu ihren Peers zeigen die Risikokinder beim ersten Messzeitpunkt im Herbst 2005 in genau den Bereichen, die im Wesentlichen dem zahlenbezogenen Vorwissen zuzuordnen sind.
Die Ergebnisse der zweiten Erhebung im Frühsommer 2006 unmittelbar vor der Einschulung belegen, dass die 73 potenziellen „Risikokinder" in Bezug auf das schulische Mathematiklernen deutlich von der gezielten Förderung ihrer mathematischen Vorläuferfähigkeiten in der verbleibenden Zeit im Kindergarten profitieren konnten und so der Abstand zu den Kindern mit gut entwickelten Vorläuferkenntnissen beim Schuleintritt erheblich verkleinert werden konnte.
Besonders in den Bereichen Ordinalzahlen, Zahl-Mengen-Zuordnung, Anordnung der Zahlsymbole, Vorgänger/Nachfolger- sowie Teil-Ganzes-Beziehungen konnten die geförderten Kinder ihre Kompetenzen deutlich erweitern. Darüber hinaus liefert auch die Auswertung der Förderung ein ermutigendes Ergebnis: Bezüglich der Leistungszuwächse in beiden Fördergruppen lassen sich im Vergleich mit der Gesamtgruppe keine signifikanten Unterschiede nachweisen. Dies bedeutet, dass eine Förderung im Alltag des Kindergartens in der jeweiligen Kindergartengruppe durch eine(n) entsprechend aus- bzw. weitergebildete ErzieherIn offenbar genauso effektiv ist wie eine spezielle Einzelförderung durch auswärtige „ExpertenInnen".
Ferner ist festzustellen, dass Kinder aus Familien mit Migrationshintergrund, die in der Gruppe der „Risikokinder" überproportional vertreten waren, von der Förderung am deutlichsten profitiert haben. Am Schulanfang haben sich die mathematischen Kompetenzen der Kinder mit und ohne Migrationshintergrund entsprechend angenähert.

Nachhaltigkeit der vorschulischen Förderungen

Ein weiteres Studienziel ist die Untersuchung der Nachhaltigkeit der vorschulischen Fördererfolge am Ende des ersten Schuljahres. Hier ist anzumerken, dass nicht alle Kinder aus der Gruppe der „Risikokinder" im Sommer 2007 eingeschult wurden. Knapp die Hälfte von ihnen besuchte stattdessen einen Schulkindergarten, eine Sprachförderklasse oder eine Förderschule, denn auch als „Integrationskinder" deklarierte Kinder haben an den Interviews im Kindergarten teilgenommen. Da der eingesetzte Deutsche Mathematiktest für erste Klassen (DEMAT 1+) jedoch auf schulbezogene Leistungen am Ende des 1. Schuljahrs abzielt, konnten diese Kinder in die Datenerhebung nicht weiter einbezogen werden. Somit liegen bezüglich der dritten Erhebung im Sommer 2007 nur noch die Daten von 40 Kindern aus der Gruppe der „Risikokinder" vor. In der Gruppe der schwächsten zehn Prozent am Ende von Klasse 1 befindet sich noch ein Drittel der verbliebenen „Risikokinder" – davon fünf Kinder mit Migrationshintergrund.
Insgesamt sind Zweidrittel der ehemaligen

„Risikokinder" nicht mehr den zehn Prozent der leistungsschwächsten Schülerinnen und Schülern zuzuordnen. Die Leistungen von 20 Kindern lagen sogar deutlich oberhalb der leistungsschwächsten 25 Prozent, d.h. diese Kinder waren in ihren jeweiligen Lerngruppen am Ende der ersten Klasse weitgehend unauffällig.

Sinnvolle vorschulische Bildungsangebote

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass nicht nur unmittelbar nach Beendigung der Förderung kurz vor der Einschulung erhebliche Leistungszuwächse festgestellt wurden, sondern die Verbesserung erwies sich für über die Hälfte der geförderten Kinder auch am Ende von Klasse 1 als nachhaltig. Inwieweit das auch noch am Ende von Klasse 2 gilt, wird die Auswertung der Daten zum vierten und letzten Messzeitpunkt im Sommer 2008 zeigen, die parallel zur Manuskripterstellung läuft.

Durchaus ermutigend sind Befunde der dritten Erhebung für die Gruppe der Studienkinder, die bereits an der ersten Erhebung im Herbst 2005 in den Kindergärten teilgenommen hatte.

So zeigen die Kinder am Ende des 1. Schuljahres bei der Befragung mit dem DEMAT 1+ signifikant bessere curricular bezogene Mathematikleistungen als die Gruppe der Kinder, die keinen der an der Studie teilnehmenden Kindergärten besucht hatten. Dies deutet darauf hin, dass allein das Wissen über den Stand der mathematischen Kompetenzentwicklung von Kindern und die daran anknüpfende altersgemäße Beschäftigung mit mathematischen Inhalten – unabhängig davon, ob es sich um potenzielle „Risikokinder" in Bezug auf das schulische Mathematiklernen handelt oder nicht – zu messbaren schulischen Leistungseffekten führen kann.

Die vielfach geforderten vorschulischen Bildungsangebote in diesem Bereich scheinen demnach sinnvoll und gerechtfertigt – besonders auch im Hinblick auf die beschriebenen besonders großen vorschulischen Fördererfolge bei Kindern mit Migrationshintergrund.

Die Autorinnen


Prof. Dr. Andrea Peter-Koop (links) ist Hochschullehrerin für Didaktik der Mathematik am Institut für Mathematik. Nach dem Lehramtsstudium erfolgte 1995 die Promotion. Peter-Koop ist Herausgeberin des „Journal für Mathematikdidaktik" sowie der internationalen Buchreich „Mathematics Teacher Education" bei Springer.

Meike Grüßing (rechts) ist Wissenschaftliche Mitarbeiterin am Institut für Mathematik. Nach dem Lehramtsstudium war sie zunächst Georg-Christoph-Lichtenberg-Stipendiatin im Promotionsprogramm „Fachdidaktische Lehr- und Lernforschung – Didaktische Rekonstruktion" an der Universität Oldenburg.