Lokale Uniformisierung ist eine lokale Version der Auflösung von Singularitäten: mittels einer Bewertung (oder einer Stelle, was praktisch dasselbe ist), fixiert man eine Singularität in einer algebraischen Varietät und hofft, eine birational äquivalente Varietät zu finden, in der der durch die Bewertung bestimmte Punkt regulär (oder sogar glatt) ist. Benutzt man die Bedingung "glatt", so lässt sich dieses Problem als eine Strukturfrage über bewertete Funktionenkörper formulieren. 1940 bewies Zariski, dass das Problem über allen Grundkörpern mit Charakteristik 0 lösbar ist. Da der Zariski-Raum aller Stellen eines algebraischen Funktionenkörpers F|K (die auf K trivial sind) kompakt ist, war sein Gedanke, die lokalen Lösungen zu einer globalen zusammenzusetzen, da man dafür nur endlich viele berücksichtigen muss (lokale Uniformisierung ist eine offene Eigenschaft). Zariski hat dies verwendet, um die Auflösung von Singularitäten in Dimension 2 über Körpern der Charakteristik 0 zu beweisen. Allerdings hat Hironaka in seinem Beweis für alle Dimensionen im Jahr 1964 diesen Ansatz nicht benutzt.

Da jedoch die Auflösung von Singularitäten in beliebiger Dimension in positiver Charakteristik nach wie vor ein hartnäckiges offenes Problem ist, hat man sich wieder an die lokale Uniformisierung erinnert, und Geometer wie Spivakovsky und Teissier haben sich zumindest zeitweise auf sie konzentriert. Aber auch dieses "Teil"problem ist nach wie vor weit offen.

Ich werde nach einer kurzen Übersicht über die historische Entwicklung den gegenwärtigen Stand der Dinge skizzieren und dann meine eigenen Beiträge zur lokalen Uniformisierung beschreiben. Meine Arbeit über die Struktur bewerteter Funktionenkörper kam ursprünglich von einem (nach wie vor) offenen modelltheoretischen Problem über Laurentreihenkörper über endlichen Körpern. Ich konnte den gemeinsamen Feind in beiden Problemen herausarbeiten: der bewertungstheoretische "Defekt" in algebraischen Erweiterungen bewerteter Körper. Für das modelltheoretische Problem hatte ich Struktursätze bewiesen, die sich dann auch auf das Problem der lokalen Uniformisierung anwenden ließen. Dies führte zu zwei gemeinsamen Arbeiten mit Hagen Knaf:

1) Lokale Uniformisierung für alle Abhyankarstellen. Dies sind Stellen mit besonders guten Eigenschaften, die im Zariski-Raum aller Stellen dicht liegen.

2) Lokale Uniformisierung für alle Stellen nach endlicher separabler Erweiterung des Funktionenkörpers ("alteration"). Dies ist eine lokale Version des Resultates von de Jong, aber mit vollständig bewertungstheoretischem Beweis und im Detail präziser als die globale Version.

In diesem Zusammenhang werde ich auch kurz auf Temkin's "inseparable local uniformization" eingehen.