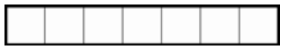
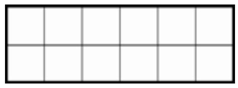
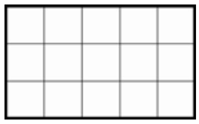
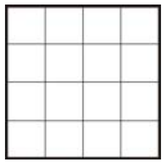
Lösungen für den Knobelzettel

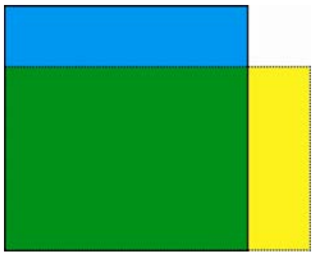
1. Seitenlängen 1 und 7: Fläche 1 x 7 = 7 kleinste Fläche 

   Seitenlängen 2 und 6: Fläche 2 x 6 = 12 

   Seitenlängen 3 und 5: Fläche 3 x 5 = 15 

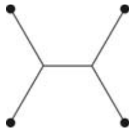
   Seitenlängen 4 und 4: Fläche 4 x 4 = 16 größte Fläche 

Je länglicher das Rechteck, desto kleiner die Fläche. Das Quadrat hat die größte Fläche.

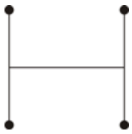


In dem Bild sind ein blaues Quadrat und ein gelbes Rechteck gezeichnet, die sich in dem grünen Bereich überschneiden. Der blaue Streifen und der gelbe Streifen sind gleich breit. (Warum? Damit das Rechteck denselben Umfang wie das Quadrat hat, muss seine lange Seite um genauso viel länger als die Quadratseite sein wie seine kurze Seite kürzer als die Quadratseite ist.)
Außerdem ist der gelbe Streifen kürzer als der blaue (da die kurze Rechteckseite kürzer ist als die Quadratseite).
Also ist die Fläche des gelben Streifens kleiner als die des blauen Streifens (man kann den gelben Streifen in den blauen hineinlegen) und damit die Fläche des Rechtecks kleiner als die des Quadrats.

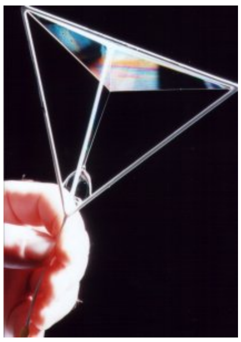
Übrigens: In der Vorlesung ging es darum, unter den Rechtecken (oder Figuren) mit **fester Fläche** das zu finden, das den **kleinsten Umfang** hat. Beim Problem der Dido geht es darum, unter den Rechtecken – oder Figuren -- mit **festem Umfang** (Länge des Seils) das zu finden, das die **größte Fläche** hat.
In beiden Fällen ist die Lösung das Quadrat (bzw. der Kreis, wenn man beliebige Figuren betrachtet, nicht nur Rechtecke). Mit etwas Überlegung kann man sich schon vorher klarmachen, dass die beiden Probleme dieselbe Lösung haben müssen – damit reicht es dann, nur eins der Probleme zu lösen.

2. Die besten Lösungen sind  für drei Punkte und  für vier Punkte.

(Hierbei muss man sehr genau messen. Bei vier Punkten sind die Fadenlängen im ersten und zweiten Bild sehr ähnlich, aber im zweiten doch etwas kürzer.)
Bei den besten Lösungen fällt auf: An den Stellen, wo mehrere Fäden zusammentreffen, treffen immer drei Fadenstücke zusammen, und zwar so, dass sie drei gleiche Winkel miteinander bilden.
Man kann zeigen (mit Mathematik, die man an der Universität lernt), dass dies immer so sein muss, auch wenn die Punkte ganz anders angeordnet sind oder mehr Punkte da sind.
Wenn man dies weiß, kann man ganz ohne Messen sicher sein,

dass  und  nicht die besten Lösungen sein können. Denn bei dem ersten treffen nicht 3 Fadenstücke zusammen, sondern vier, und bei dem zweiten treffen zwar jeweils drei Fadenstücke zusammen, aber nicht mit gleichen Winkeln.

Übrigens: Die beste Lösung für drei Punkte sieht sehr ähnlich der Seifenhaut in einem Tetraeder aus und die für vier Punkte der Seifenhaut in einem Würfel.

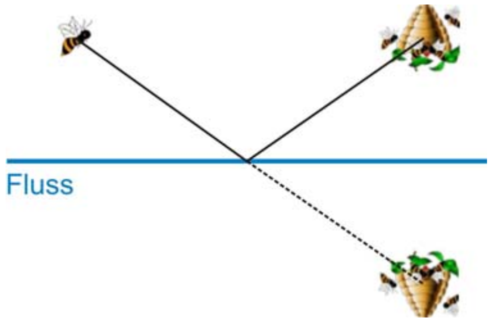


http://www.math.de/exponate/seifenhaeute.html

http://www.mathematik.uni-regensburg.de/sammlung/mnf2.htm

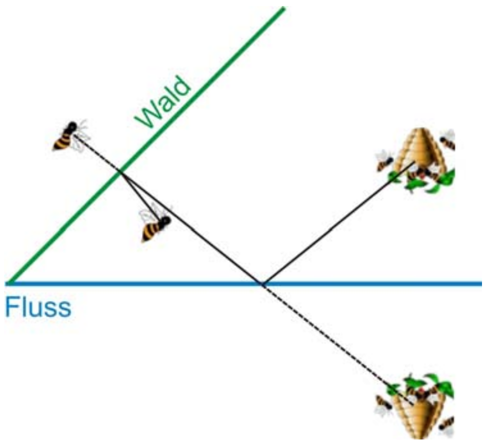
Dies liegt daran, dass es für Seifenhäute eine ähnliche Regel gibt wie für Fäden.

3. Wenn Biene und Bienenstock gleich weit vom Fluss entfernt liegen, sollte die Biene genau in der Mitte dazwischen zum Fluss kommen.



Wir spiegeln die Biene am Waldrand und den Bienenstock am Fluss:

Jedem möglichen Weg (mit Pollensammeln und trinken) der echten Biene zum echten Bienenstock entspricht dann ein Weg der gespiegelten Biene zum gespiegelten Bienenstock, und diese beiden Wege haben dieselbe Länge. Der kürzeste Weg der gespiegelten Biene zum gespiegelten Bienenstock ist die gerade Linie. Also zeichnen wir diese Linie, und da, wo sie Waldrand und Fluss schneidet, sollte die echte Biene Pollen sammeln und trinken:



Übrigens: Diese Art von Problemen (kürzeste Verbindungen finden, kleinste Flächen finden usw.) haben auch sehr ‚ernsthafte' Anwendungen. Zum Beispiel müssen die Navigationsgeräte, die heute immer mehr Leute in ihren Autos haben, genau so ein Problem lösen: Finde die kürzeste (oder schnellste) Route von einem Ort zu einem anderen. Oder Roboter, die zum Beispiel in Fabriken verwendet werden (etwa in einer Autofabrik), müssen sich immer wieder von einem Ort zum anderen bewegen (zum Beispiel um an verschiedenen Stellen des Autos zu schweißen) – und das soll möglichst schnell gehen. Es gibt noch viele weitere Beispiele.