

Erzwungene mechanische Schwingungen

Stichworte:

HOOKESches Gesetz, harmonische Schwingung, harmonischer Oszillator, Eigenfrequenz, gedämpfter harmonischer Oszillator, Resonanz, Amplitudenresonanz, Energieresonanz, Resonanzkurven.

Messprogramm:

Messung der Amplitudenresonanzkurve und der Phasenkurve für starke und schwache Dämpfung.

Literatur:

- /1/ DEMTRÖDER, W.: „Experimentalphysik 1 – Mechanik und Wärme“, Springer-Verlag, Berlin u.a.
- /2/ TIPLER, P. A.: „Physik“, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg u.a.

1 Einleitung

Ziel dieses Versuches ist es, an einem einfachen mechanischen Modell die Eigenschaften eines so genannten „harmonischen Oszillators“ zu studieren. Solche harmonischen Oszillatoren werden uns in verschiedenen Teilgebieten der Physik wieder begegnen, so z.B. in der Elektrodynamik (siehe Versuch „*Elektromagnetischer Schwingkreis*“) und der Atomphysik. Auf das Verständnis dieses Versuches, insbesondere die Bedeutung der Amplitudenresonanz- und Phasenkurven sollte daher größter Wert gelegt werden.

2 Theorie

2.1 Ungedämpfter harmonischer Oszillator

Wir betrachten eine Anordnung gem. Abb. 1, bei der eine Kugel der Masse m_K vertikal (x -Richtung) an einer Feder aufgehängt ist. Reibungseffekte seien zunächst vernachlässigt. In der Ruhelage der Kugel herrscht Gleichgewicht zwischen der nach unten gerichteten Gewichtskraft und der nach oben gerichteten rücktreibenden Federkraft; der Kugelmittelpunkt befinde sich dann in der Stellung $x = 0$. Eine Auslenkung der Kugel um x aus der Gleichgewichtslage führt zu einer zu x proportionalen rücktreibenden Federkraft F_R , die x entgegen gerichtet ist:

$$(1) \quad F_R \sim -x$$

Bezeichnen wir die Proportionalitätskonstante (*Elastizitäts- oder Federkonstante* oder *Richtgröße*) mit D , so wird aus Gl. (1) das bekannte HOOKEsche Gesetz¹:

$$(2) \quad F_R = -D x$$

Nach dem Auslenken und Loslassen der Kugel führt die rücktreibende Kraft zu einer Beschleunigung a der Kugel. Nach dem *zweiten NEWTONschen Gesetz* :

$$(3) \quad F_R = m_K a$$

folgt daher in Kombination mit Gl. (2):

$$(4) \quad m_K a = m_K \frac{d^2 x}{dt^2} = m_K \ddot{x} = -D x \quad (t: \text{Zeit})$$

wobei die drei linken Terme lediglich verschiedene Schreibweisen des Zusammenhangs Kraft = Masse \times Beschleunigung darstellen.

Gl. (4) ist die wichtige Differentialgleichung (DGL, auch *Bewegungsgleichung* genannt), mit der alle Systeme beschrieben werden können, die auf eine Auslenkung aus der Ruhe- oder Gleichgewichtslage

¹ ROBERT HOOKE (1635 – 1703)

mit einer rücktreibenden Kraft reagieren, die proportional zur Größe der Auslenkung ist. Solche Systeme werden uns in den verschiedenen Gebieten der Physik immer wieder begegnen.

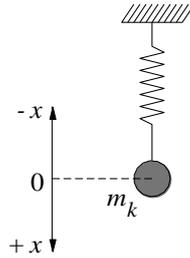


Abb. 1: Masse/Feder-System.

Uns interessiert, welche Bewegung die Kugel ausführt, wenn sie einmal aus der Ruhelage ausgelenkt und losgelassen wird, wobei die Anfangsgeschwindigkeit v der Kugel zum Zeitpunkt des Loslassens null sein möge. Wir suchen also die Funktion $x(t)$, die eine Lösung der Differentialgleichung (4) unter der Bedingung $v(t=0) = 0$ ist. Für die Funktion muss gelten, dass sie, bis auf Vorfaktoren, gleich ihrer zweiten zeitlichen Ableitung sein muss. Wir versuchen deshalb die Lösung mit einer Funktion $x(t)$, die eine so genannte *harmonische Schwingung* (*harmonische Oszillation*) beschreibt:

$$(5) \quad x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

Dabei ist x_0 die *Amplitude*, $(\omega t + \varphi)$ die *Phase*, φ die *Anfangsphase* und ω die *Eigenkreisfrequenz* der Schwingung (vgl. Abb. 2). Durch Einsetzen von Gl. (5) in Gl. (4) und Ausführung der zweimaligen Differentiation nach der Zeit t erhalten wir:

$$(6) \quad -m_K \omega^2 x_0 \cos(\omega t + \varphi) = -D x_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

Daraus folgt der Wert für ω , für den Gl. (5) eine Lösung von Gl. (4) ist:

$$(7) \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{m_K}} := \omega_0$$

Die Kugel führt demnach nach dem Loslassen Schwingungen mit der *Eigenkreisfrequenz* ω_0 durch. Da wir Reibungsfreiheit vorausgesetzt hatten, bleibt die Amplitude x_0 der Schwingung konstant. Sowohl x_0 als auch die Anfangsphase φ sind freie Parameter, die so gewählt werden müssen, dass Gl. (5) dem zu beschreibenden Vorgang „angepasst“ ist, d.h. dass Gl. (5) die beobachtete Bewegung mit richtiger Amplitude und Anfangsphase wiedergibt.

Gleichung (7) gilt nur für den Fall, dass die Masse der Feder, m_F , gegenüber der Masse m_K der Kugel vernachlässigbar ist. Ist dies nicht der Fall, so müssen wir berücksichtigen, dass nach dem Auslenken und Loslassen der Feder deren einzelne Massenelemente ebenfalls mitschwingen. Die Schwingungsamplitude dieser Massenelemente ist jedoch unterschiedlich: sie nimmt vom Wert null am Aufhängepunkt der Feder bis auf den Wert x_0 am Ende der Feder zu. Eine genaue Rechnung² zeigt, dass das Mitschwingen der einzelnen Massenelemente mit unterschiedlicher Amplitude gleichbedeutend ist mit dem Mitschwingen eines Drittels der gesamten Federmasse mit der Amplitude x_0 . Die korrekte Gleichung für die Eigenkreisfrequenz der Feder lautet daher:

$$(8) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m_K + \frac{1}{3}m_F}} := \sqrt{\frac{D}{m}} \quad \text{mit } m := m_K + \frac{1}{3}m_F$$

² Siehe z.B. ALONSO, M., FINN, E. J.: „Fundamental University Physics, Vol. 1: Mechanics“, Addison-Wesley Publishing Company, Reading (Mass.) u.a.

Im durchzuführenden Versuch ist die Kugel nicht direkt an der Feder befestigt, sondern mit Hilfe einer Stange S_2 , an der sich außerdem eine Reflektorplatte R befindet (Abb. 8). In diesem Fall muss m_K in Gl. (8) durch die Gesamtmasse

$$(9) \quad m_G = m_K + m_S + m_R$$

ersetzt werden, wobei m_S und m_R die Massen von S_2 und R sind.

Ein Beispiel soll die dargestellten Zusammenhänge verdeutlichen. Wir betrachten gem. Abb. 1 eine Kugel der Masse $m_K = 0,11$ kg, die mit Stange und Reflektorplatte ($m_S + m_R = 0,07$ kg) an einer Feder mit der Federkonstanten $D = 28$ kg/s² und der Masse $m_F = 0,02$ kg hängt. Die Kugel wird um eine Strecke $x_0 = 0,05$ m nach unten aus der Ruhelage ausgelenkt. Anschließend lassen wir die Kugel los, woraufhin sie Schwingungen mit der Amplitude x_0 und der Eigenfrequenz $f_0 = \omega_0/(2\pi) \approx 1,9$ Hz durchführt (Gl. (8)). Beginnen wir mit der Aufzeichnung der Bewegung $x(t)$ der Kugel zu einem Zeitpunkt, bei der die Kugel gerade ihren Maximalausschlag nach oben erreicht hat, so „beginnt“ der Cosinus gem. Gl. (5) bei einer Anfangsphase von $\varphi = \pi = 180^\circ$ (Vorzeichenfestlegung von x in Abb. 1 beachten!). Diese Situation ist in Abb. 2 dargestellt.

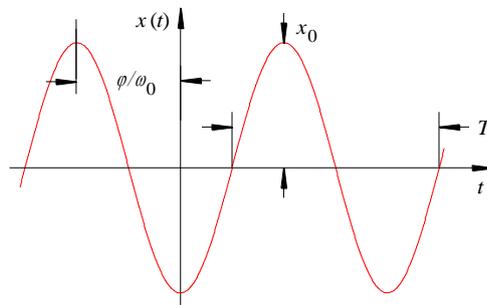


Abb. 2: Zur Definition von Amplitude x_0 , Periodendauer $T = 2\pi/\omega_0$ und Anfangsphase φ einer harmonischen Schwingung. Zur Darstellung der Phase φ auf der t -Achse muss sie durch ω_0 dividiert werden.

Ein System wie die betrachtete Anordnung (auch *Masse/Feder-System* genannt), das harmonische Schwingungen ausführt, heißt *harmonischer Oszillator*. Kennzeichen eines harmonischen Oszillators ist eine zur Auslenkung proportionale rücktreibende Kraft, die auf eine typische Bewegungsgleichung der Form (4) mit einer Lösung der Form (5) führt. Ebenso kennzeichnend für den harmonischen Oszillator ist der *parabolische* Verlauf seiner *potentiellen Energie* E_p als Funktion des Ortes (Abb. 3):

$$(10) \quad E_p = \frac{1}{2} D x^2$$

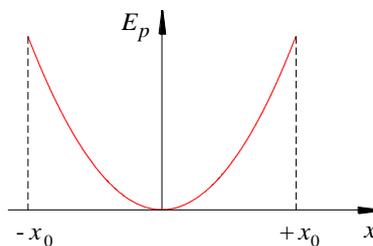


Abb. 3: Verlauf der potentiellen Energie E_p als Funktion der Auslenkung x beim harmonischen Oszillator.

2.2 Gedämpfter harmonischer Oszillator

Wir betrachten nun den realistischen Fall eines Masse/Feder-Systems unter dem Einfluss von Reibung. Wir werden von dem einfachen Fall ausgehen, dass in dem System zusätzlich zur rücktreibenden Kraft $F_R = -Dx$ eine zur Geschwindigkeit v proportionale Reibungskraft F_b wirkt, für die wir schreiben können:

$$(11) \quad F_b = -bv = -b \frac{dx}{dt}$$

Dabei ist b eine *Reibungskonstante*, die die Stärke der Reibung angibt.

Frage 1:

- Welche Einheit hat b ? Warum steht in Gl. (11) ein Minuszeichen?

In diesem Fall nimmt die Bewegungsgleichung (4) die Form an:

$$(12) \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = -D x - b \frac{dx}{dt}$$

Üblicherweise wird diese Differentialgleichung in der Form:

$$(13) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{D}{m} x = 0$$

geschrieben. Auch hier interessiert uns wieder, welche Bewegung die Kugel durchführt, wenn sie *einmal* aus der Ruhelage ausgelenkt und dann losgelassen wird, wobei die Anfangsgeschwindigkeit der Kugel zum Zeitpunkt des Loslassens wieder Null sein möge. Wir suchen also wiederum die Funktion $x(t)$, die die Differentialgleichung (13) unter der Voraussetzung $v(t=0) = 0$ löst. Da wir hier als Folge der Dämpfung eine mit der Zeit abnehmende Amplitude der Schwingung erwarten, versuchen wir einen Lösungsansatz, bei dem die Amplitude exponentiell mit der Zeit abfällt (vgl. Abb. 4):

$$(14) \quad x = x_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (\alpha : \text{Dämpfungskonstante})$$

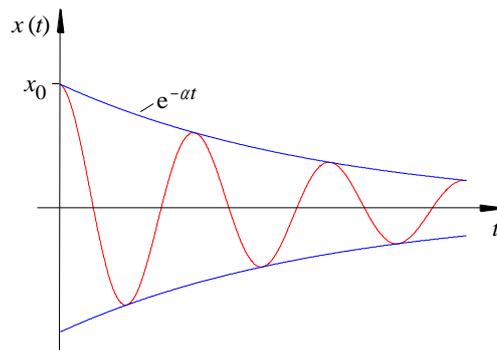


Abb. 4: Gedämpfte harmonische Schwingung.

Wir setzen Gl. (14) in Gl. (13) ein, führen die Differentiationen aus und finden, dass Gl. (14) dann eine Lösung von Gl. (13) darstellt, wenn für die Parameter α und ω gilt:

$$(15) \quad \alpha = \frac{b}{2m} \quad \text{und}$$

$$(16) \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

Wir wollen dieses Ergebnis nun interpretieren. Zunächst halten wir fest, dass die Amplitude der Schwingung umso schneller abfällt, je größer die *Dämpfungskonstante* (der *Abklingkoeffizient*) α ist. Bei gleich bleibender Masse bedeutet das gem. Gl. (15), dass die Schwingung umso rascher an Amplitude verliert, je größer die Reibungskonstante b ist - das ist plausibel.

Aus Gl. (16) können wir ablesen, wie sich die Kreisfrequenz ω dieser gedämpften harmonischen Schwingung mit der Reibungskonstanten b ändert. Wir betrachten folgende unterschiedliche Fälle:

$$(i) \quad b = 0 \quad \rightarrow \quad \omega = \omega_0$$

Im Falle verschwindender Reibung ($b = 0$) liegt der in Kap. 2.1 diskutierte Fall des ungedämpften harmonischen Oszillators vor. Die Kugel führt eine *periodische Schwingung* mit der Eigenkreisfrequenz ω_0 durch.

$$(ii) \quad (b/(2m))^2 = \omega_0^2 \quad \rightarrow \quad \omega = 0$$

Dies ist der Fall so genannter „kritischer Dämpfung“, bei dem die Kugel gerade keine periodische Schwingung mehr durchführt, er heißt deshalb *aperiodischer Grenzfall*. Die Kugel kehrt lediglich längs einer exponentiellen Bahn in ihre Ausgangslage zurück (s. Anmerkung).

$$(iii) \quad (b/(2m))^2 > \omega_0^2 \quad \rightarrow \quad \omega \text{ imaginär}$$

In diesem Fall so genannter „überkritischer Dämpfung“ gibt es ebenfalls keine periodische Schwingung, er heißt *aperiodischer Fall* oder *Kriechfall*. Die Kugel kehrt auch hier lediglich in ihre Ausgangslage zurück, allerdings mit zusätzlicher Dämpfung, d.h. langsamer (s. Anmerkung).

$$(iv) \quad 0 < b < 2m\omega_0 \quad \rightarrow \quad \omega < \omega_0$$

Dieser allgemeinste Fall, der so genannte *Schwingfall*, führt zu einer periodischen Schwingung mit einer Kreisfrequenz ω nach Gl. (16), die etwas kleiner ist als die Eigenkreisfrequenz ω_0 des ungedämpften harmonischen Oszillators.

Anmerkung:

Unter den hier diskutierten Bedingungen ($v(t=0) = 0$) gibt es keinen wesentlichen Unterschied zwischen dem *aperiodischen Grenzfall* und dem *aperiodischen Fall* oder *Kriechfall*: In beiden Fällen kehrt die Kugel längs einer exponentiellen Bahn in ihre Ausgangslage zurück; beim Kriechfall gibt es lediglich eine höhere Dämpfung. Anders ist die Situation im Fall $v(t=0) \neq 0$. Lassen wir nämlich die Kugel nicht einfach los, sondern geben wir ihr zusätzlich durch Anstoßen eine bestimmte Anfangsgeschwindigkeit, so ist es beim *aperiodischen Grenzfall* möglich, dass die Kugel einmal über ihre Ruhelage hinweg schwingt und erst danach längs einer exponentiellen Bahn in die Ruhelage zurückkehrt. Beim Kriechfall dagegen findet ein solches Überschwingen nicht statt. Die Kugel kehrt hier immer nur längs einer exponentiellen Bahn in ihre Ruhelage zurück. Eine detaillierte Rechnung (Lösung der DGL (13) unter den Bedingungen (ii) und (iii)) bestätigt diese Zusammenhänge.

2.3 Erzwungene harmonische Schwingungen

In Kap. 2.1 und 2.2 haben wir jeweils betrachtet, wie sich die Kugel bewegt, wenn wir sie *einmal* aus der Ruhelage auslenken und dann loslassen. Wir wollen jetzt untersuchen, welche Bewegung die Kugel durchführt, wenn das System einer sich *periodisch* ändernden, externen Kraft F_e ausgesetzt ist (Abb. 5), für die gelten möge:

$$(17) \quad F_e = F_1 \sin(\omega_1 t)$$

F_1 ist die Amplitude der externen Kraft und ω_1 ihre Kreisfrequenz. Das Vorzeichen wählen wir so, dass nach unten gerichtete Kräfte positiv und nach oben gerichtete Kräfte negativ gezählt werden.

Die externe Kraft F_e wirkt zusätzlich auf die Feder. Die Bewegungsgleichung nimmt daher die Form an (s. Gl. (12) und (13)):

$$(18) \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = -D x - b \frac{dx}{dt} + F_e$$

und damit

$$(19) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{D}{m} x = \frac{1}{m} F_1 \sin(\omega_1 t)$$

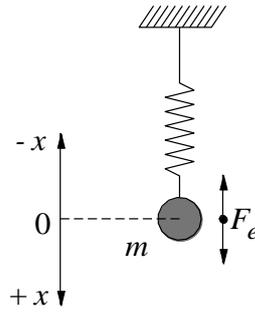


Abb. 5: Anregung eines Masse/Feder-Systems mit externer Kraft F_e . m ist die Masse gem. Gl. (8) und (9).

Wir erwarten, dass die Bewegung der Kugel nach einer gewissen *Einschwingzeit*, d.h. nach Beendigung des *Einschwingvorgangs*, mit der gleichen Frequenz erfolgt wie die Änderung der externen Kraft. Für eine andere Frequenz gäbe es keine plausible Erklärung. Allerdings ist eine *Phasenverschiebung* ϕ zwischen der anregenden Kraft und der Auslenkung der Kugel denkbar. Schließlich können wir davon ausgehen, dass nach Beendigung des Einschwingvorgangs die Schwingungsamplitude konstant bleibt, da dem System von außen immer wieder neue Energie zugeführt wird. Mit diesen Überlegungen versuchen wir folgenden Lösungsansatz für die Differentialgleichung (19):

$$(20) \quad x = x_0 \sin(\omega_1 t + \phi)$$

Dabei ist ϕ die Phasenverschiebung zwischen der Auslenkung $x(t)$ und der externen Kraft F_e . Für $\phi < 0$ hinkt die Auslenkung der anregenden Kraft hinterher. Durch Einsetzen von Gl. (20) in Gl. (19) finden wir, dass Gl. (20) dann eine Lösung von Gl. (19) darstellt, wenn für die Amplitude x_0 und die Phasenverschiebung ϕ gilt (Herleitung s. Anhang Kap. 4):

$$(21) \quad x_0 = \frac{\frac{F_1}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + \left(\frac{\omega_1 b}{m}\right)^2}}$$

$$(22) \quad \phi = \arctan \left(\frac{\omega_0^2 - \omega_1^2}{\frac{\omega_1 b}{m}} \right) - \frac{\pi}{2}$$

Im Gegensatz zu den in Kap. 2.1 und 2.2 diskutierten Fällen sind die Amplitude x_0 und die Phase ϕ hier nicht mehr frei wählbare Parameter, sondern durch die Größen F_1 , ω_1 , m , b und $\omega_0^2 = D/m$ eindeutig bestimmt.

Aus Gleichung (21) sehen wir, dass die Amplitude der Kugelschwingung, die so genannte *Resonanzamplitude*, von der Frequenz der anregenden Kraft abhängt. Tragen wir x_0 über ω_1 auf, so erhalten wir die so genannte *Amplitudenresonanzkurve*. Abb. 6 (oben) zeigt einige typische Amplitudenresonanzkurven für unterschiedliche Werte der Reibungskonstanten b . Im stationären Fall, d.h. für $\omega_1 = 0$, ergibt sich aus Gl. (21) die aus dem HOOKEschen Gesetz bekannte Amplitude

$$(23) \quad x_0(\omega_1 = 0) := x_{00} = \frac{F_1}{D}$$

Dies ist der Betrag, um den die Kugel ausgelenkt wird, wenn an ihr eine konstante Kraft F_1 angreift. Setzt man F_1 aus Gl. (23) in Gl. (21) ein, so erhält man für die Resonanzamplitude x_0 :

$$(24) \quad x_0 = \frac{x_{00} D}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + \left(\frac{\omega_1 b}{m}\right)^2}}$$

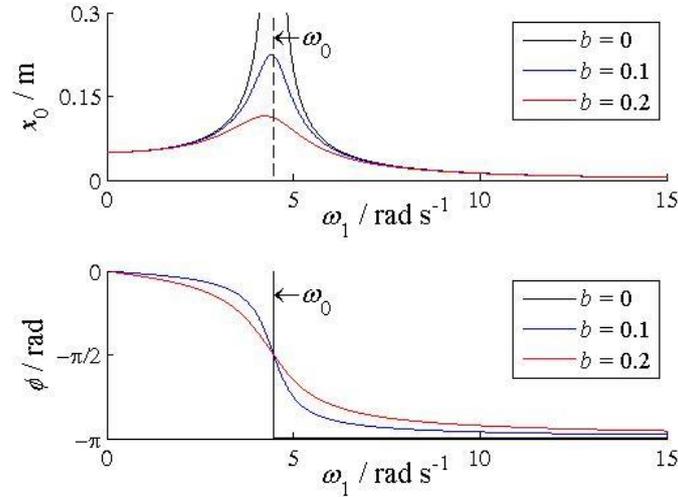


Abb. 6: Amplitudenresonanzkurven (oben) und Phasenkurven (unten) für einen gedämpften harmonischen Oszillator ($F_1 = 0,1 \text{ N}$, $m = 0,1 \text{ kg}$, $D = 2 \text{ kg/s}^2$, b in kg/s).

Die Lage des Maximums von x_0 als Funktion von ω_1 finden wir aus der Bedingung $dx_0/d\omega_1 = 0$. Aus Gl. (24) folgt dann:

$$(25) \quad x_0 = x_{0,\max} \quad \text{für} \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{2m^2}}$$

Das Maximum der Amplitudenresonanzkurve liegt also außer im Fall $b = 0$ *nicht* bei der Eigenkreisfrequenz ω_0 , sondern bei etwas kleineren Kreisfrequenzen $\omega_1 < \omega_0$.

Im unteren Teil von Abb. 6 sind die so genannten *Phasenkurven* dargestellt, die den Verlauf der Phasenverschiebung ϕ als Funktion der Kreisfrequenz ω_1 angeben. Aus Gl. (22) folgt, dass ϕ immer *negativ* ist, d.h. die Kugelauslenkung *hinkt* der anregenden Kraft außer im Fall $\omega_1 = 0$ immer *hinterher*.

Wir wollen nun noch einige Spezialfälle diskutieren:

- (i) Im Falle $\omega_1 \ll \omega_0$ ist bei „nicht zu großem“ b die Amplitude $x_0 \approx F_1/D$, d.h. unabhängig von b . Die Amplitudenresonanzkurve verläuft dann im Bereich kleiner Anregungsfrequenzen annähernd horizontal und die Phasenverschiebung ϕ geht gegen 0: $\phi \approx 0^\circ$. Die Kugelbewegung folgt also nahezu direkt der anregenden Kraft.
- (ii) Im *Resonanzfall* (ω_1 gem. Gl. (25)) ist die Amplitude maximal und gegeben durch:

$$x_{0,\max} = \frac{F_1}{b \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{4m^2}}}$$

Je kleiner b , desto größer wird $x_{0,\max}$; für $b \rightarrow 0$ geht $x_{0,\max} \rightarrow \infty$. Die Kugelauslenkung hinkt in diesem Fall der anregenden Kraft um 90° hinterher ($\phi = -\pi/2$).

- (iii) Im Falle $\omega_1 \gg \omega_0$ ist $x_0 \approx F_1/(m\omega_1^2)$, die Amplitude sinkt also mit $1/\omega_1^2$. Die Phasenverschiebung beträgt in diesem Fall $\phi = -\pi$, d.h. die Kugelauslenkung hinkt der anregenden Kraft um 180° hinterher.

Aus den Amplitudenresonanzkurven und den unter (i) - (iii) diskutierten Spezialfällen lässt sich das *Dämpfungsverhalten* eines *Masse-Feder-Systems* ablesen, beispielsweise eines schwingungs isolierten Tisches, wie er in optischen Präzisionsexperimenten häufig eingesetzt wird. Die Eigenfrequenzen solcher Tische liegen typischerweise im Bereich um 1 Hz. Hat eine externe Störung (z.B. Gebäudeschwingung) eine sehr niedrige Frequenz ($\omega_1 \rightarrow 0$), wird die Amplitude der Störung ungedämpft auf den Tisch übertragen, in der Umgebung der Eigenkreisfrequenz ($\omega_1 \approx \omega_0$) wird sie (ungewollt) verstärkt, aber im Bereich höherer Frequenzen ($\omega_1 \gg \omega_0$) wird sie stark gedämpft.

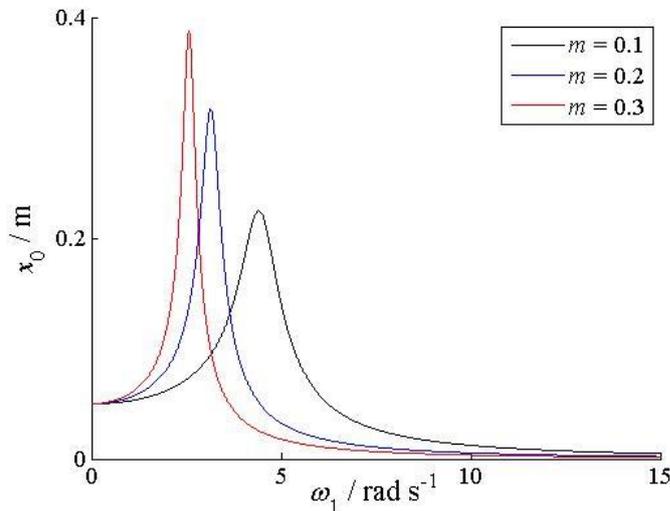


Abb. 7: Amplitudenresonanzkurven für verschiedene Massen m (in kg) bei gleichen übrigen Parametern ($F_1 = 0,1 \text{ N}$, $D = 2 \text{ kg/s}^2$, $b = 0,1 \text{ kg/s}$).

Durch Änderung der Masse m lässt sich das Dämpfungsverhalten eines solchen Systems beeinflussen. Abb. 7 zeigt, dass durch eine Vergrößerung von m bei gleichen übrigen Parametern die Eigenkreisfrequenz erniedrigt und die Dämpfung für Frequenzen oberhalb der Eigenkreisfrequenz deutlich vergrößert werden kann. Schwingungs isolierte Tische haben deshalb oftmals große Massen im Bereich 10^3 kg .

Abschließend wollen wir überlegen, bei welcher Frequenz der maximale *Energieübertrag* vom anregenden System auf das schwingende System stattfindet. Da wir wissen, dass maximale kinetische Energie gleichbedeutend ist mit maximaler Geschwindigkeit, berechnen wir zunächst den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeit v der Kugel unter Benutzung von Gl. (20):

$$(26) \quad v = \frac{dx}{dt} = \omega_1 x_0 \cos(\omega_1 t + \phi) := v_0 \cos(\omega_1 t + \phi)$$

Für die Geschwindigkeit v_0 gilt demnach mit Gl. (24):

$$(27) \quad v_0 = \omega_1 x_0 = \frac{\omega_1 x_{00} D}{m \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{\omega_1 b}{m}\right)^2}}$$

und damit:

$$(28) \quad v_0 = \frac{x_{00} D}{\sqrt{\left(m \omega_1 - \frac{D}{\omega_1}\right)^2 + b^2}}$$

v_0 wird maximal, wenn der Nenner aus Gl. (28) minimal wird, d.h. wenn gilt (für $b \neq 0$):

$$(29) \quad m \omega_1 - \frac{D}{\omega_1} = 0 \quad \rightarrow \quad v_0 = v_{0,\max}$$

Daraus folgt:

$$(30) \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{D}{m}} = \omega_0 \quad \rightarrow \quad v_0 = v_{0,\max}$$

Die Geschwindigkeit und damit auch die kinetische Energie wird demnach dann maximal (anders als die Resonanzamplitude!), wenn das System mit seiner Eigenkreisfrequenz ω_0 angeregt wird. Man nennt diesen Fall daher auch den Fall der *Energieresonanz*, bei dem das anregende System die maximale Energie auf das schwingende System übertragen kann.

3 Versuchsdurchführung

Zubehör:

Feder ($D = (22,7 \pm 0,5) \text{ kg/s}^2$, $m_F = (0,0575 \pm 10^{-4}) \text{ kg}$), Kugel an Aufhängestange mit Reflektorplatte (m_G auswiegen), Anregungssystem an Stativ mit Motor und Lichtschranke, elektronische Drehzahlregelung für Motor, Laserdistanzsensor (Typ BAUMER OADM 12U6460/S35, Messbereich (16 - 120) mm), Netzteile (PHYWE (0 - 15 / 0 - 30) V) für Motor, Lichtschranke und Laserdistanzsensor, 2 Gläser mit unterschiedlicher Glycerin/Wassermischung ($b \approx 0,7 \text{ kg/s}$ für die zähere Mischung bei $T = 20^\circ \text{ C}$), Tisch zur Aufnahme der Gläser, Digital-Oszilloskop TEKTRONIX TDS 1012 / 1012B / 2012C / TBS 1102B - EDU.

3.1 Beschreibung der Versuchsanordnung

Die Versuche werden an einer Anordnung gem. Abb. 8 durchgeführt. Sie ermöglicht die berührungslose Messung von *Amplitudenresonanzkurven* und *Phasenkurven*. Wir wollen zunächst die Versuchsanordnung beschreiben, bevor in Kap. 3.2 die eigentlichen Messaufgaben dargestellt werden.

An einer Feder ist mit Hilfe einer Stange S_2 eine Kugel K der Masse m_K aufgehängt, die zur Dämpfung ihrer Bewegung in einen Glasbehälter B eintaucht, der mit einer Glycerin/Wassermischung gefüllt ist. An der Stange ist eine Reflektorscheibe R befestigt. Auf diese Scheibe trifft ein Laserstrahl aus einem Laserdistanzsensor LDS , dessen Funktionsweise aus dem Versuch „Sensoren...“ bekannt ist. Der Sensor liefert ein Spannungssignal $U_{LDS}(t)$, das sich mit der Entfernung s zwischen LDS und R linear ändert.

Die Feder ist mit einer zweiten Stange S_1 , die in einer Stangenführung F läuft, über ein Gelenk G_1 mit einer Pleuelstange P verbunden, die wiederum über ein Gelenk G_2 auf einer Drehscheibe D befestigt ist. Mit einem Antriebsmotor kann die Scheibe mit der Kreisfrequenz ω_1 gedreht werden. Dadurch wird der Aufhängepunkt der Feder in eine periodische Vertikalbewegung versetzt und somit auf die Feder eine periodische Kraft $F_e(t)$ ausgeübt. Nach Beendigung des Einschwingvorgangs führt die Kugel zusammen mit S_2 und R ebenfalls eine periodische Vertikalbewegung mit der Amplitude x_0 aus. Der Laserdistanzsensor liefert dann ein periodisches Spannungssignal $U_{LDS}(t)$ mit der Amplitude $U_0 \sim x_0$ und einem Gleichanteil U_{DC} , der vom Abstand s zwischen LDS und R in der Ruhelage der Kugel abhängt. Die Periodendauer T von U_{LDS} ist gegeben durch:

$$(31) \quad T = \frac{2\pi}{\omega_1}$$

Durch Variation von ω_1 lässt sich somit die Amplitudenresonanzkurve $U_0(\omega_1)$ messen, aus der mit Hilfe des Kalibrierfaktors k des Laserdistanzsensors für Spannungsdifferenzen,

$$(32) \quad k = 0,0962 \text{ V/mm}$$

die gesuchte *Amplitudenresonanzkurve* $x_0(\omega_1)$ gewonnen werden kann. k kann als fehlerfrei angenommen werden.

Die Messung der *Phasenkurve*, d.h. der *Phasenverschiebung* ϕ zwischen der Anregungskraft $F_e(t)$ und der Auslenkung $x(t)$ der Kugel als Funktion der Kreisfrequenz ω_1 lässt sich folgendermaßen durchführen:

Mit Hilfe eines Markierungsstiftes M sowie der Lichtschranke LS , die von M unterbrochen wird, wird immer dann ein Spannungsimpuls $U_{LS}(t)$ erzeugt, wenn der *Aufhängepunkt der Feder* seine oberste Position erreicht hat (Zeitpunkt t_1 in Abb. 9).

Zu diesem Zeitpunkt hat die *Anregungskraft* $F_e(t) = m d^2 x / dt^2$ ihr Minimum (Vorzeichen gem. Abb. 5 beachten). Zu einem *späteren* Zeitpunkt t_2 möge die *Kugel* (nicht der Aufhängepunkt der Feder!) ihre oberste Position und damit die *Auslenkung* $x(t)$ ihr Minimum ($-x_0$) erreichen (auch hier Vorzeichen gem. Abb. 5 beachten). In dieser Position ist die Entfernung s zwischen LDS und R und damit auch $U_{LDS}(t)$ minimal. Die Phasenverschiebung ϕ zwischen $F_e(t)$ und $x(t)$ ist dann (s. Abb. 9):

$$(33) \quad \phi = - \frac{t_2 - t_1}{T} 2\pi := - \frac{\Delta t}{T} 2\pi = - \Delta t \omega_1$$

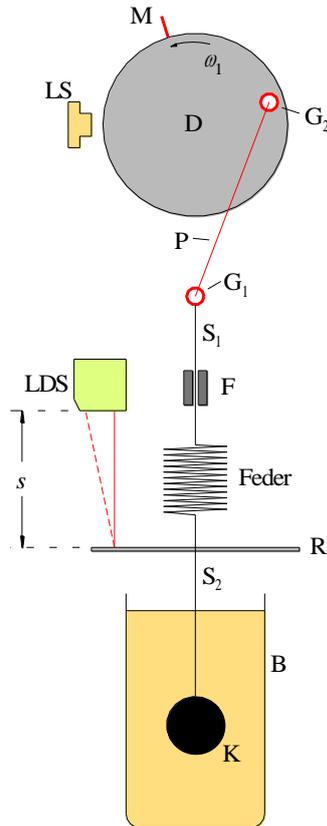


Abb. 8: Skizze des verwendeten Versuchsaufbaus.

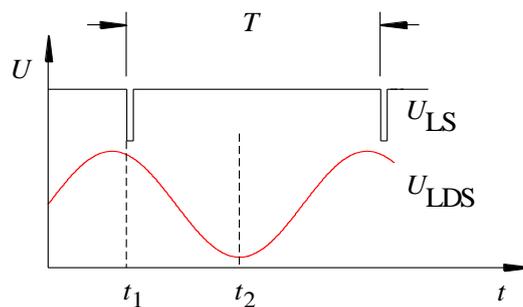


Abb. 9: Zeitlicher Verlauf der Ausgangsspannungen der Lichtschranke LS (U_{LS}) und des Laserdistanzsensors LDS (U_{LDS}). Zeitpunkt t_1 : Aufhängepunkt der Feder in oberster Position, Anregungskraft $F_e(t)$ minimal. Zeitpunkt t_2 : Kugel in oberster Position, $x(t)$ und U_{LDS} minimal.

Durch Variation von ω_1 lässt sich somit die Phasenkurve $\phi(\omega_1)$ messen.

In der Praxis werden für jede eingestellte Kreisfrequenz ω_1 mit Hilfe eines Oszilloskops gleichzeitig die Amplitude $U_0(\omega_1)$ und die Zeitdifferenz $\Delta t(\omega_1)$ gemessen.

Abschließend noch eine Anmerkung zum zeitlichen Verlauf der Anregungskraft $F_e(t)$. Offensichtlich entspricht dieser bis auf eine konstante Phasenverschiebung dem zeitlichen Verlauf der vertikalen Bewegung des Gelenkes G_1 , d.h. des Aufhängepunktes der Feder. Diese Bewegung wollen wir durch die Größe $y(t)$ beschreiben (Abb. 10).

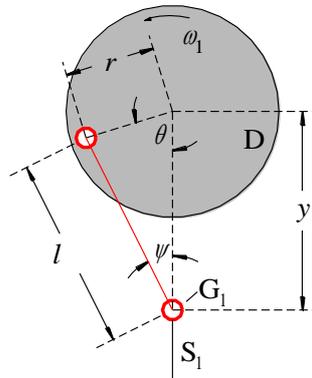


Abb. 10: Definition von Größen zur Berechnung der Bewegung des Gelenkes G_1 (vgl. Abb. 8).

Ist die Pleuelstange der Länge l im Abstand r von der Drehachse auf der Scheibe montiert, so gilt:

$$(34) \quad y = r \cos \theta + l \cos \psi$$

und

$$(35) \quad r \sin \theta = l \sin \psi \quad \rightarrow \quad \sin \psi = \frac{r}{l} \sin \theta$$

Mit

$$(36) \quad \cos \psi = \sqrt{1 - \sin^2 \psi} = \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \theta}$$

und

$$(37) \quad \theta = \omega_1 t$$

folgt schließlich:

$$(38) \quad y = r \cos(\omega_1 t) + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2(\omega_1 t)}$$

Der rein harmonischen Bewegung ($r \cos(\omega_1 t)$) ist also noch eine Störung (Wurzelterm in Gl. (38)) überlagert, die leider auch zeitabhängig ist und damit die Bewegung anharmonisch macht. Die Anregungskraft $F_e(t)$ verläuft also ebenfalls nicht rein harmonisch. Wählen wir jedoch $l \gg r$, so wird $l^2 \gg r^2 \sin^2(\omega_1 t)$ und damit $\sqrt{(\dots)} \approx l$. Wir haben es dann statt mit einer zeitabhängigen Störung nur noch mit der additiven Konstanten l zu tun, die die „Harmonie“ jedoch nicht mehr stört.

3.2 Amplitudenresonanzkurve und Phasenkurve für starke und schwache Dämpfung

Mit der Anordnung gem. Abb. 8 soll für eine Kugel mit Haltestange S_1 und Reflektorplatte R und eine Feder mit bekannten D und m_F (Daten siehe *Zubehör*) für zwei verschieden große Dämpfungen (Gläser mit unterschiedlichen Glycerin/Wassergemischen) jeweils die Amplitudenresonanzkurve $x_0(\omega_1)$ und die Phasenkurve $\phi(\omega_1)$ im Frequenzbereich $f_1 = \omega_1/2\pi$ zwischen 0 Hz und ca. 5 Hz gemessen werden. Die Pleuelstange P des Anregungssystems wird im zweiten Loch von innen auf der Scheibe angebracht. Die anharmonische Störung gem. Gl. (38) kann in diesem Fall vernachlässigt werden.

Die Ausgangssignale der Lichtschranke (U_{LS}) und des Laserdistanzsensors (U_{LDS}) werden auf einem Digital-Oszilloskop dargestellt, das auf das Signal U_{LS} getriggert wird. Die Periodendauer T von U_{LS} und der Spitze-Spitze-Wert ($U_{SS} = 2 U_0$) von U_{LDS} werden mit Hilfe der Funktion MESSUNG / MEASURE am

Oszilloskop ermittelt. Aus diesen Größen können die Kreisfrequenz ω_1 und die Amplitude U_0 bzw. x_0 bestimmt werden.

Mit Hilfe der ZEIT-CURSOR wird die Zeitdifferenz $\Delta t = t_2 - t_1$ gemessen (s. Abb. 9), aus der die Phasenverschiebung ϕ gem. Gl. (33) berechnet werden kann.

Hinweis:

Um einen möglichst gleichmäßigen Lauf der Kreisscheibe zu erreichen, muss die Drehscheibe *gegen den Uhrzeigersinn* laufen. Aus dem gleichen Grund muss zur Einstellung der Motordrehzahl im Frequenzbereich zwischen 0 Hz und ca. 1,5 Hz ein elektronischer Drehzahlregler (Betriebsspannung 12 V) benutzt werden, der zwischen Netzgerät und Motor geschaltet wird. Bei Frequenzen über 1,5 Hz kann der Motor direkt an das Netzgerät angeschlossen und die Drehzahl über die Betriebsspannung geregelt werden (Spannung langsam von 0 V auf max. 12 V erhöhen).

Für beide Glycerin/Wassergemische wird für *möglichst viele* (mindestens 20) verschiedene Werte von ω_1 , insbesondere in der Nähe der Resonanzfrequenz, jeweils *nach Beendigung des Einschwingvorgangs* die Periodendauer T , die Amplitude U_0 (ω_1) und die Zeitdifferenz Δt gemessen.

Die Amplitude U_0 für den Fall $\omega_1 \rightarrow 0$ wird bestimmt, indem die Motorachse bei ausgeschaltetem Motor per Hand in die Positionen „Pleuelstange oben“ und „Pleuelstange unten“ gedreht und jeweils die zugehörige Spannung U_{LDS} gemessen wird.

Für beide Gemische wird x_0 über ω_1 in *einem* Diagramm und ϕ über ω_1 ebenfalls in *einem* Diagramm aufgetragen. Die Größtfehler von x_0 und ϕ werden in Form von Fehlerbalken mit eingezeichnet (Fehler aus den Schwankungen der Werte für U_{SS} und T am Oszilloskop abschätzen). Danach werden „frei Hand“ Ausgleichskurven durch die Messwerte gezeichnet und die Form der Kurven mit den theoretischen Erwartungen verglichen.

Anmerkung:

In der Nähe der Eigenkreisfrequenz kann die Messung bei kleiner Dämpfung schwierig werden, weil sich große Amplituden einstellen und die Feder (möglicherweise auch das Stativ) in unkontrollierte Bewegung gerät oder die Kugel gar auf dem Boden des Becherglases aufschlägt. In diesem Fall muss das System von Hand gedämpft und rasch zum nächsten Frequenzwert übergegangen werden.

4 Anhang: Berechnung der Resonanzamplitude und der Phasenverschiebung

Wir wollen zeigen, dass die Resonanzamplitude x_0 und die Phasenverschiebung ϕ mit wenigen einfachen Rechenschritten berechnet werden kann, wenn wir zur komplexen Schreibweise übergehen. Gl.(19) lautet in komplexer Schreibweise:

$$(39) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{D}{m} x = \frac{1}{m} F_1 e^{i\omega_1 t}$$

Analog zu Gl. (20) wählen wir als komplexen Lösungsansatz:

$$(40) \quad x = x_0 e^{i(\omega_1 t + \phi)} = x_0 e^{i\omega_1 t} e^{i\phi}$$

Einsetzen von Gl. (40) in Gl. (39) ergibt nach Ausführen der Differentiation und Division durch $e^{i\omega_1 t}$:

$$(41) \quad -\omega_1^2 x_0 e^{i\phi} + i\omega_1 \frac{b}{m} x_0 e^{i\phi} + \frac{D}{m} x_0 e^{i\phi} = \frac{F_1}{m}$$

Mit der Definition der Eigenkreisfrequenz ω_0 gem. Gl. (8) folgt daraus:

$$(42) \quad x_0 e^{i\phi} = \frac{\frac{F_1}{m}}{\omega_0^2 - \omega_1^2 + i\omega_1 \frac{b}{m}} := z$$

Wie bereits im Versuch „Messung von Kapazitäten...“ dargestellt, ist Gl. (42) eine Darstellungsform einer komplexen Zahl z , deren Betrag $|z| = x_0$ durch $\sqrt{z z^*}$ gegeben ist, wobei z^* die zu z konjugiert komplexe Zahl ist. Damit folgt:

$$(43) \quad x_0 = \sqrt{z z^*} = \sqrt{\left(\frac{\frac{F_1}{m}}{\omega_0^2 - \omega_1^2 + i\omega_1 \frac{b}{m}} \right) \left(\frac{\frac{F_1}{m}}{\omega_0^2 - \omega_1^2 - i\omega_1 \frac{b}{m}} \right)}$$

woraus sich durch einfaches Ausmultiplizieren Gl. (21) ergibt.

Für die Berechnung des Phasenwinkels benutzen wir wiederum (vgl. Versuch „Messung von Kapazitäten...“) die zweite Darstellungsform komplexer Zahlen, nämlich $z = \alpha + i\beta$, wobei α der Realteil und β der Imaginärteil von z ist. Aus diesen Größen lässt sich der Phasenwinkel ϕ bekanntlich berechnen als

$$(44) \quad \phi = \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \begin{cases} +\pi & \Leftrightarrow \alpha < 0 \wedge \beta \geq 0 \\ -\pi & \Leftrightarrow \alpha < 0 \wedge \beta < 0 \end{cases}$$

Um Gl. (42) in die Form $\alpha + i\beta$ zu bringen, erweitern wir den Bruch mit dem konjugiert komplexen Nenner:

$$(45) \quad x_0 e^{i\phi} = \frac{\frac{F_1}{m} \left(\omega_0^2 - \omega_1^2 - i\omega_1 \frac{b}{m} \right)}{\left(\omega_0^2 - \omega_1^2 + i\omega_1 \frac{b}{m} \right) \left(\omega_0^2 - \omega_1^2 - i\omega_1 \frac{b}{m} \right)} = \frac{\frac{F_1}{m} \left(\omega_0^2 - \omega_1^2 \right) - i \frac{F_1}{m} \omega_1 \frac{b}{m}}{\left(\omega_0^2 - \omega_1^2 \right)^2 + \left(\frac{\omega_1 b}{m} \right)^2}$$

Hieraus können wir die Größen α und β ablesen:

$$(46) \quad \alpha = \frac{\frac{F_1}{m} \left(\omega_0^2 - \omega_1^2 \right)}{\left(\omega_0^2 - \omega_1^2 \right)^2 + \left(\frac{\omega_1 b}{m} \right)^2} \quad \text{und} \quad \beta = - \frac{\frac{F_1}{m} \omega_1 \frac{b}{m}}{\left(\omega_0^2 - \omega_1^2 \right)^2 + \left(\frac{\omega_1 b}{m} \right)^2}$$

woraus durch Einsetzen in Gl. (44) folgt:

$$(47) \quad \phi = \arctan\left(- \frac{\frac{\omega_1 b}{m}}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \right) \begin{cases} -\pi & \Leftrightarrow \omega_1 > \omega_0 \end{cases}$$

Mit

$$(48) \quad \arctan(-y) = \arctan\left(\frac{1}{y}\right) - \frac{\pi}{2}$$

folgt daraus schließlich Gl. (22).