

Impuls- und Energieerhaltungssatz Stoßgesetze

Stichworte:

Impulserhaltung, Energieerhaltung, elastische, inelastische und vollkommen inelastische Stöße, Stoßgesetze, Laborsystem, Schwerpunktsystem, Streuwinkel, digitale Videoanalyse.

Messprogramm:

Messung von Geschwindigkeiten auf der Grundlage der Impulserhaltung, Analyse von schiefen elastischen Stößen auf einem Luftkissentisch.

Literatur:

- /1/ ALONSO, M., FINN, E. J.: „Fundamental University Physics, Vol. 1: Mechanics“, Addison-Wesley Publ. Comp., Reading (Mass.) u.a.
- /2/ STÖCKER, H.: „Taschenbuch der Physik“, Harri Deutsch, Frankfurt
- /3/ GERTHSEN, C. u.a.: „Physik“, Springer-Verlag, Berlin u.a.

1 Einleitung

Im Folgenden sind zwei Versuche beschrieben, die zum Verständnis des Impuls- und Energieerhaltungssatzes beitragen sollen. Insbesondere soll deutlich werden, dass der Erhalt des Impulses (Vektor, dessen Betrag proportional zur Geschwindigkeit ist) und der Erhalt der kinetischen Energie (Skalar, der proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit ist) zwei völlig unterschiedliche Dinge sind.

2 Versuch I: Messung von Geschwindigkeiten auf der Grundlage der Impulserhaltung

Sollen große Geschwindigkeiten kleiner Körper im Labor direkt gemessen werden, so ist dafür ein recht großer und entsprechend teurer apparativer Aufwand erforderlich. Einfache Lichtschranken, wie sie im Praktikum verwendet werden, reagieren beispielsweise zu langsam, als dass sie für solche Messungen eingesetzt werden könnten. Vielmehr würden Fotodetektoren benötigt, die über ein „schnelles Ansprechverhalten“ verfügen, d. h. Impulse mit großer Flankensteilheit liefern, die von entsprechend „schnellen“ elektronischen Zählern oder Speicher-Oszilloskopen weiter verarbeitet werden müssten. Da solche Geräte im Praktikum nicht zur Verfügung stehen, müssen wir uns eines Tricks bedienen: Die schnelle Bewegung des kleinen Körpers wird in die langsame Bewegung eines großen Körpers umgesetzt. Im folgenden Versuch wird dieses Verfahren eingesetzt, um die Mündungsgeschwindigkeit von Luftgewehr kugeln zu bestimmen.¹

2.1 Theorie

Eine Kugel der Masse m fliege mit der Geschwindigkeit v auf einen ruhenden Klotz der Masse M (Abb. 1). Die Kugel bewege sich auf der Verbindungslinie der Schwerpunkte von Kugel und Klotz; beide treffen also *zentral* aufeinander. Der Klotz sei so beschaffen, dass nach dem Stoß Kugel und Klotz mit der gemeinsamen Geschwindigkeit u weiterfliegen. Es handelt sich demnach um einen *total inelastischen* Stoß.

Frage 1:

- Was kennzeichnet einen *elastischen*, was einen *inelastischen*, was einen *total inelastischen* Stoß?

Der Impulserhaltungssatz kann in diesem Fall des zentralen Stoßes in skalarer Form geschrieben werden:

$$(1) \quad mv = (M + m)u$$

Mit Berücksichtigung der beim inelastischen Stoß in Verformung und Wärme umgesetzten Energie D lautet der Energieerhaltungssatz:

¹ Da wir das Luftgewehr weniger als Waffe, sondern vielmehr als Jahrmarktsartikel ansehen, ist sein Einsatz im Praktikum vertretbar, zumal es der billigste Apparat ist, mit dem ausreichend hohe und hinreichend reproduzierbare Geschwindigkeiten erzeugt werden können.

$$(2) \quad \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(M+m)u^2 + D$$

Frage 2:

- Wie sähen Impuls- und Energieerhaltungssatz im Falle eines elastischen Stoßes aus?

Aus Gleichung (1) kann die gesuchte Geschwindigkeit v ermittelt werden, wenn M , m und u bekannt sind. M und m lassen sich durch einfache Wägung ermitteln. Um u zu bestimmen, muss man eine möglichst reibungsarme Bewegung des Klotzes erreichen, etwa durch Verwendung einer Luftkissenbahn. Wir wollen jedoch einen weniger aufwändigen Weg gehen: Der Klotz wird an einem langen Faden der Länge l aufgehängt, so dass er nach dem Stoß Pendelbewegungen ausführt (Abb. 1). Vernachlässigen wir Reibungseffekte, so ist die maximale kinetische Energie des Klotzes gleich seiner maximalen potentiellen Energie, also:

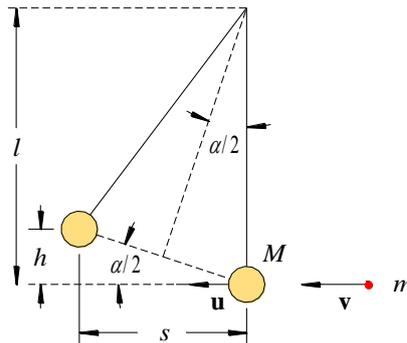


Abb. 1: Zentraler Stoß zwischen einer Kugel (rot) der Masse m und Geschwindigkeit v und einem Pendelkörper (beige) der Masse M , der nach dem Stoß die Ruhelage mit der Geschwindigkeit u verlässt. Übrige Bezeichnungen siehe Text.

$$(3) \quad \frac{1}{2}(M+m)u^2 = (M+m)gh$$

Dabei ist u die Geschwindigkeit, mit der der Klotz die Ruhelage verlässt, h die maximale vertikale Auslenkung des Klotzes aus der Ruhelage und g die Erdbeschleunigung.

Für kleine Pendelausschläge um den Winkel α ist $\tan \alpha \approx \alpha$ und es gilt gem. Abb. 1:

$$(4) \quad \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{h}{s} \approx \frac{\alpha}{2}$$

wobei s die maximale horizontale Auslenkung des Körpers aus der Ruhelage ist. Für $l \gg s$ gilt ferner:

$$(5) \quad \alpha \approx \frac{s}{l}$$

Setzen wir Gl. (4) und Gl. (5) in Gl. (3) ein, so erhalten wir:

$$(6) \quad u^2 \approx \frac{g}{l}s^2$$

Für die Schwingungsdauer T des Pendels benutzen wir den für kleine Auslenkungswinkel α geltenden Zusammenhang:

$$(7) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Lösen wir Gl. (7) nach g/l auf und setzen das Ergebnis in Gl. (6) ein, so erhalten wir:

$$(8) \quad u \approx \frac{2\pi}{T} s$$

Schließlich setzen wir Gl. (8) in Gl. (1) ein und erhalten die gesuchte Beziehung zur Bestimmung der Geschwindigkeit v aus den Messgrößen m , M , s und T :

$$(9) \quad v \approx \frac{M+m}{m} \cdot \frac{2\pi}{T} s$$

2.2 Versuchsdurchführung

Zubehör:

Luftgewehr in justierbarer Halterung, Schutzvorrichtung, Justierstab, Luftgewehrkugeln, bifilar aufgehängter Pendelkörper, U-Schiene mit Skalierung und verschiebbarem Stäbchen zur Messung des horizontalen Pendelausschlags, Stativ, Stoppuhr, Laborwaage, Folie, Tesafilm, doppelseitiges Klebeband.

➤ *Bei diesem Versuch muss mit größter Vorsicht gearbeitet werden. Immer darauf achten, dass niemand in die Schussbahn gerät! Bei geöffnetem Gewehr niemals den Abzug betätigen! Vor Auslösung des ersten Schusses BetreuerIn informieren!*

Zunächst werden die mittlere Kugelmasse m aus der Wägung von 10 Kugeln und die Masse M des Pendelkörpers bestimmt.

Anschließend wird das Gewehr mit Hilfe eines in den Lauf einschiebbaren Justierstabes so ausgerichtet, dass die Kugeln den Pendelkörper in der Mitte treffen. Nur dann ist ein zentraler Stoß gewährleistet. Andernfalls würde der Pendelkörper zusätzliche Dreh- und Kippbewegungen ausführen und Gl. (9) würde nicht mehr gelten. Die Gewehrmündung soll ca. 15 cm Abstand vom ruhenden Pendelkörper haben. Auf der gegenüberliegenden Pendelkörperseite wird ebenfalls mittig eine U-Schiene mit verschiebbarem Stäbchen zur Messung des Maximalausschlags s angebracht. Die Schiene wird so montiert, dass Pendelausschläge von bis zu 10 cm gemessen werden können. Nun wird 15-mal geschossen und jeweils der Maximalausschlag s inkl. Größtfehler Δs sowie die Schwingungsdauer T gemessen. T wird mit der Stoppuhr als Mittelwert über je 10 Schwingungsperioden ermittelt, der Größtfehler ΔT wird aus der Genauigkeit der Zeitmessung (Drücken der Stoppuhr) abgeschätzt.

Bei dem beschriebenen Vorgehen nähme die Masse M des Pendelkörpers bei jedem Schuss um m zu, wir hätten es also bei jedem Schuss mit anderen Versuchsbedingungen zu tun. Wir werden dies dadurch umgehen, dass wir die noch nicht verschossenen Kugeln jeweils auf den Pendelkörper auflegen (Fixierung mit doppelseitigem Klebeband symmetrisch um die Mittenachse) und somit die Masse des Pendelkörpers konstant halten. Gl. (9) lautet dann:

$$(10) \quad v \approx \frac{M+15m}{m} \cdot \frac{2\pi}{T} s$$

Nach Gl. (7) würde es prinzipiell reichen, T einmal zu messen, da l sich von Schuss zu Schuss nicht ändert. Um mögliche Fehler, z.B. durch falsche Zählung der Schwingungsperioden u.a. zu vermeiden, soll T dennoch bei jedem Schuss bestimmt werden.

Für jeden Schuss (Nr. i) wird die Geschwindigkeit v_i inkl. Größtfehler Δv_i berechnet. v_i wird mit Fehlerbalken über i aufgetragen. Der Mittelwert \bar{v} und seine Standardabweichung werden berechnet und in Form horizontaler Linien mit in das Diagramm eingetragen.

Abschließend werden die kinetischen Energien sowie die Impulse vor und nach dem Stoß berechnet (Gl. (2), (16)-(18), (25)). Für v wird der Mittelwert \bar{v} verwendet. u wird mit Gl. (8) bestimmt, wobei für s und T die Mittelwerte aus den Einzelwerten s_i und T_i eingesetzt werden.

Frage 3:

- Wie lässt sich das Ergebnis mit Hilfe von Gl. (2) interpretieren? Um was für einen Stoß handelt es sich demnach?

3 Versuch II: Schiefe elastische Stöße auf einem Luftkissentisch

Nachdem wir uns im ersten Versuch mit zentralen Stößen beschäftigt haben, bei denen die stoßenden Körper in direkten mechanischen Kontakt getreten sind, wollen wir nun schiefe elastische Stöße unter dem Einfluss von magnetischen Wechselwirkungskräften betrachten, bei denen die Körper sich nicht berühren. Berührungslöse Stöße zwischen Teilchen unter dem Einfluss von Wechselwirkungskräften spielen in der Atom-, Kern- und Teilchenphysik eine große Rolle. Wir wollen sie auf einem Luftkissentisch simulieren.

3.1 Theorie

Wir betrachten gem. Abb. 2 vom Ursprung eines ruhenden Koordinatensystems XY aus zwei Körper mit den Massen m_1 und m_2 , die sich mit den Geschwindigkeiten \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 unter beliebigem Winkel aufeinander zubewegen (*schiefer Stoß*, dadurch gekennzeichnet, dass sich die Schwerpunkte der beiden Körper nicht längs einer gemeinsamen Linie bewegen).

Der Impuls- und der Energieerhaltungssatz lassen sich im Koordinatensystem XY recht einfach hinschreiben. Sollen jedoch zusätzlich Aussagen über *Streuwinkel* (s.u.) gemacht werden, wird die Rechnung deutlich einfacher, wenn man in ein Koordinatensystem $X_s Y_s$ übergeht, dessen Ursprung im gemeinsamen Schwerpunkt S der beiden Körper liegt. Ein solches Koordinatensystem heißt *Schwerpunktsystem*. Der Index „ s “ wird im Folgenden für alle Größen im Schwerpunktsystem verwendet.

Vom Koordinatensystem XY aus betrachtet bewegt sich der Schwerpunkt S und damit das Koordinatensystem $X_s Y_s$ mit der Geschwindigkeit:

$$(11) \quad \mathbf{u} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Hat ein Körper im Schwerpunktsystem $X_s Y_s$ die Geschwindigkeit \mathbf{v}_s , so lässt sich seine Geschwindigkeit \mathbf{v} im Koordinatensystem XY durch einfache Vektoraddition berechnen:

$$(12) \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_s + \mathbf{u}$$

und damit:

$$(13) \quad \mathbf{v}_s = \mathbf{v} - \mathbf{u}$$

Von $X_s Y_s$ aus betrachtet haben m_1 und m_2 vor dem Stoß folgende Geschwindigkeiten:

$$(14) \quad \mathbf{v}_{s1} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{u} = (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

$$(15) \quad \mathbf{v}_{s2} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{u} = -(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

Die Geschwindigkeiten sind also im Schwerpunktsystem immer entgegengesetzt gerichtet.

Durch Multiplikation der Geschwindigkeiten mit den Massen erhalten wir aus Gl. (14) und (15) für die Impulse vor dem Stoß im Schwerpunktsystem:

$$(16) \quad \mathbf{p}_{s1} = \mu (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)$$

$$(17) \quad \mathbf{p}_{s2} = -\mu (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)$$

wobei wir der Einfachheit halber die *reduzierte Masse* μ eingeführt haben:

$$(18) \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

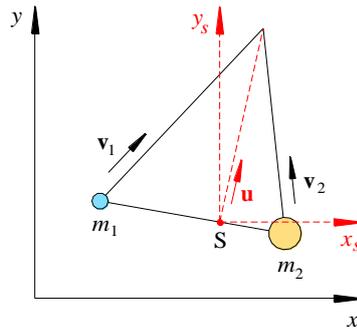


Abb. 2: Schiefer Stoß der Massen m_1 und m_2 im Koordinatensystem XY . Übrige Bezeichnungen siehe Text.

Die Impulse sind im Schwerpunktsystem demnach ebenfalls immer entgegengesetzt gerichtet und darüber hinaus betragsmäßig gleich (Abb. 3). Es gilt:

$$(19) \quad |\mathbf{p}_{s1}| = |\mathbf{p}_{s2}| \quad \text{oder in anderer Schreibweise} \quad p_{s1} = p_{s2}$$

Aus Gl. (16), (17) und (19) folgt:

$$(20) \quad \mathbf{p}_{s1} + \mathbf{p}_{s2} = 0$$

Aus Gründen der Impulserhaltung muss Gl. (20) auch nach dem Stoß gelten (wir werden im Folgenden den Hochindex „‘“ für alle Größen *nach* dem Stoß benutzen). Damit folgt:

$$(21) \quad \mathbf{p}'_{s1} + \mathbf{p}'_{s2} = 0 \quad \text{bzw.}$$

$$(22) \quad |\mathbf{p}'_{s1}| = |\mathbf{p}'_{s2}| \quad \text{oder in anderer Schreibweise} \quad p'_{s1} = p'_{s2}$$

Betrachten wir nun den *elastischen Stoß*. Er ist durch die Erhaltung der kinetischen Energie gekennzeichnet:

$$(23) \quad \frac{1}{2} m_1 v_{s1}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{s2}^2 = \frac{1}{2} m_1 v'_{s1}{}^2 + \frac{1}{2} m_2 v'_{s2}{}^2$$

Gl. (23) lässt sich mit den Beträgen der Impulse auch in dieser Form schreiben:

$$(24) \quad \frac{p_{s1}^2}{m_1} + \frac{p_{s2}^2}{m_2} = \frac{p'_{s1}{}^2}{m_1} + \frac{p'_{s2}{}^2}{m_2}$$

Setzen wir Gl. (19) und (22) in Gl. (24) ein, so sehen wir, dass in diesem Fall zusätzlich die Impulsbeträge im Schwerpunktsystem *vor* und *nach* dem Stoß gleich sein müssen:

$$(25) \quad p_{s1} = p_{s2} = p'_{s1} = p'_{s2}$$

Das wiederum bedeutet für die Beträge der Geschwindigkeiten:

$$(26) \quad v_{s1} = v'_{s1} \quad v_{s2} = v'_{s2}$$

Der *Streuwinkel* θ_s ist per Definition der Winkel zwischen dem Impulsvektor (oder Geschwindigkeitsvektor) *eines* Körpers vor und nach dem Stoß. In unserem Falle gilt im Schwerpunktsystem für θ_s gemäß Abb. 4:

$$(27) \quad \sin \frac{\theta_s}{2} = \frac{|\mathbf{v}'_{s1} - \mathbf{v}_{s1}|}{2|\mathbf{v}'_{s1}|} = \frac{|\mathbf{v}'_{s2} - \mathbf{v}_{s2}|}{2|\mathbf{v}'_{s2}|}$$

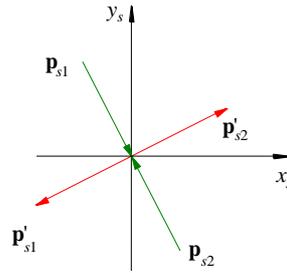


Abb. 3: Impulsverlauf beim elastischen Stoß zweier Körper im Schwerpunktsystem $X_s Y_s$. Die Impulse vor dem Stoß (grün) und nach dem Stoß (rot) sind paarweise entgegengesetzt gerichtet und von gleichem Betrag.

Diese Gleichung darf nicht in dem Sinne missverstanden werden, dass mit ihr a priori eine Berechnung des Streuwinkels θ_s möglich wäre. Das würde die Kenntnis der Richtung der Impulse bzw. Geschwindigkeiten nach dem Stoß voraussetzen. Diese Richtung ist jedoch z.B. von der genauen Form der Körper und ihrer Lage beim Stoß abhängig und daher i. Allg. nicht exakt vorhersehbar. (Das heißt nicht, dass es nicht eine Reihe von idealisierten Spezialfällen gibt, in denen eine Berechnung möglich ist.)

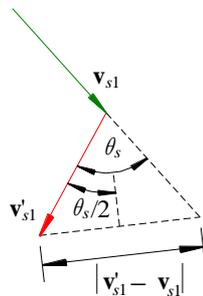


Abb. 4: Zur Definition des Streuwinkels θ_s zwischen den Geschwindigkeitsvektoren vor (grün) und nach (rot) dem Stoß im Schwerpunktsystem.

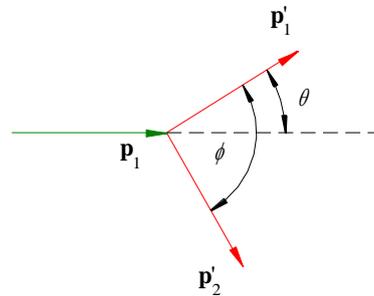


Abb. 5: Zur Definition der Streuwinkel θ und ϕ der Impulsvektoren vor (grün) und nach (rot) dem Stoß im XY -Koordinatensystem (Sonderfall $\mathbf{p}_2 = 0$).

Die Berechnung des Streuwinkels θ im Koordinatensystem XY ist wesentlich komplizierter. Wir wollen uns auf den einfachen Spezialfall des schiefen, elastischen Stoßes beschränken, bei dem der eine Körper vor dem Stoß in Ruhe ist ($\mathbf{v}_2 = 0$; s. Abb. 5). Der Impulserhaltungssatz liefert dann:

$$(28) \quad \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{p}'_2 = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1$$

Bilden wir das Quadrat vom rechten Term in Gl. (28), so erhalten wir

$$(29) \quad p_2'^2 = (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1)^2 = p_1^2 + p_1'^2 - 2p_1 p_1' \cos \theta$$

und damit

$$(30) \quad \theta = \arccos \frac{p_1^2 + p_1'^2 - p_2'^2}{2p_1 p_1'}$$

Abschließend betrachten wir im Koordinatensystem XY den Winkel ϕ zwischen den Geschwindigkeits- oder Impulsvektoren der beiden Körper nach dem Stoß für den Fall $v_2 = 0$ und zusätzlich $m_1 = m_2$. Für die Impulserhaltung gilt wieder Gl. (28):

$$(31) \quad \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2$$

und damit

$$(32) \quad p_1^2 = (\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2)^2 = p_1'^2 + p_2'^2 + 2\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2$$

Aus dem Energieerhaltungssatz folgt in diesem Fall für den elastischen Stoß:

$$(33) \quad p_1^2 = p_1'^2 + p_2'^2$$

Gl. (32) und (33) zusammen ergeben die Bedingung

$$(34) \quad 2 \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 = 2 p'_1 p'_2 \cos \phi = 0$$

Diese Gleichung ist für $\phi = 90^\circ$ erfüllt. Die Geschwindigkeits- bzw. Impulsvektoren der beiden Körper nach dem Stoß stehen in diesem Fall ($m_1 = m_2, v_2 = 0$) also senkrecht aufeinander.

3.2 Versuchsdurchführung

Zubehör:

Luftkissentisch mit Zubehör (Gebläse, Pucks), Webcam Logitech C930, PC mit Bildverarbeitungs-Software *Viana.NET*, Wasserwaage, Laborwaage, Becherglas, Metallmaßband.

Achtung:

Die Pucks dürfen auf dem Tisch grundsätzlich nur bei eingeschalteter Luftzufuhr bewegt werden! Vor Versuchsbeginn wurde der Luftkissentisch durch die technische Assistenz so ausgerichtet, dass aufgesetzte Pucks in dem Bereich, in dem gemessen werden soll, keine Beschleunigung erfahren.

Auf einem Luftkissentisch, auf dem spezielle Pucks sich nahezu reibungsfrei bewegen können, wollen wir den schiefen, elastischen Stoß zwischen zwei sich abstoßenden, magnetischen Pucks untersuchen, und zwar

- a) für den Fall $m_1 \approx m_2, v_2 \approx 0$ und
- b) für den Fall $m_1 \neq m_2, v_1 \neq 0, v_2 \neq 0$

Um die Bahn der Pucks messen und quantitativ auswerten zu können, wird die Bewegung mit einer Webcam, die an der Decke über dem Luftkissentisch montiert ist, gefilmt. Die Webcam wurde zuvor von der technischen Assistenz korrekt ausgerichtet und darf in ihrer Ausrichtung nicht verändert werden.

Sowohl die Aufnahme, wie auch die Auswertung der Videos kann mit dem Programm *Viana.NET* durchgeführt werden. Das Programm ist auf dem bereitliegenden Laptop bereits installiert und auch für den privaten Gebrauch frei zugänglich².

Da das Deckenlicht für störende Reflexionen auf dem Tisch sorgt, wird eine indirekte Lichtquelle benutzt, um die notwendige Helligkeit im Raum zu erlangen. Im Video soll der Tisch möglichst gleichmäßig ausgeleuchtet erscheinen. Gegebenenfalls muss dazu die Ausrichtung der Lampe verändert werden.

Die Massen der Pucks werden auf der Laborwaage gewogen (großes Becherglas unterstellen, da die Magnetfelder der Pucks andernfalls die Waage beeinflussen!).

Die Pucks werden per Hand gestartet; im Fall a) muss der zweite Puck bis zum Start des ersten Pucks gegebenenfalls vorsichtig festgehalten werden. Zur Aufzeichnung wird im Programm *Viana.NET* die Aufnahme gestartet (\rightarrow Start: „*Video aufnehmen*“, siehe Abb. 6).³ Nach der Messung empfiehlt es sich die Aufzeichnung zu beenden, bis die nächste Messung durchgeführt werden kann, um die aufgenommene Datenmenge nicht unnötig groß und unübersichtlich zu gestalten.

Das Speicherverzeichnis der Videos wird im Aufnahmemenü eingestellt (Abb. 7). Die Videos müssen für die weitere Auswertung auf einem mobilen Datenträger oder der persönlichen Cloud gespeichert werden. Die Cloud ist über Stud.IP für jeden Studenten der Universität Oldenburg verfügbar.⁴

² Verfügbar unter: <http://viananet.de/downloads> (Version 5.5)

³ Sollte der Autofokus der Webcam aktiv sein, kann dieser über den Reiter „Video \rightarrow Videogerät“ ausgeschaltet werden.

⁴ In Stud.IP unter dem Reiter Webmail \rightarrow Cloud-Storage



Abb. 6: Startmenü des Programms Viana.NET.

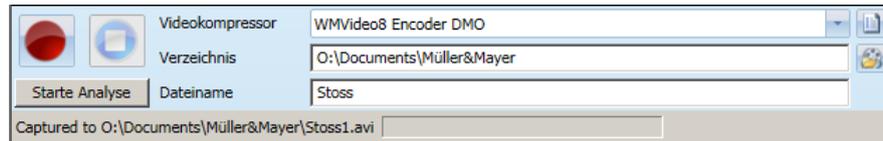


Abb. 7: Verzeichnisauswahl zum Speichern des Videos

3.3 Auswertung

Die folgende Auswertung kann von Zuhause oder einem der PCs im Praktikum durchgeführt werden.

Für den Fall a) und b) soll je eine gelungene Aufnahme quantitativ ausgewertet werden. Dazu kann das zuvor aufgenommene Video direkt in Viana.NET bearbeitet werden. Mit der Option „Video Laden“ kann eins der aufgenommenen Videos im Programm geladen werden. Anschließend wird das Video eingemessen (→ Start: „Video einmessen“) und das Koordinatensystem hinzugefügt (→ Start: „Koordinatensystem“). Zum Einmessen des Videos ist eine bekannte Strecke notwendig, die im Video zu sehen ist. Diese Strecke wird als Referenzstrecke verwendet und ermöglicht eine Umrechnung von Pixel in mm.

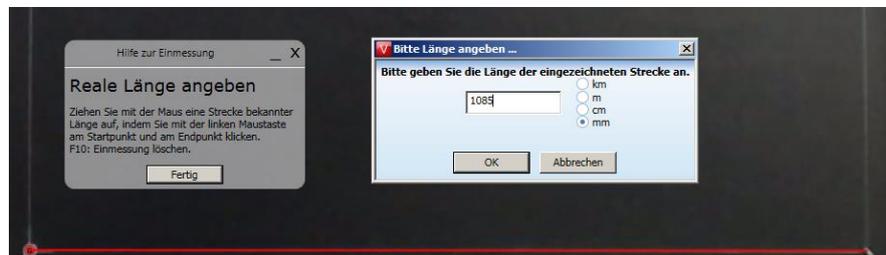


Abb. 8: Beispiel für das Einmessen des Videos. Die rote Linie stellt die bekannte Referenzstrecke von 1085 mm dar.

Dazu wird der Ursprung des Koordinatensystems in die untere linke Ecke des Drahts gesetzt (siehe unten links in Abb. 8). Die Referenzlänge geht vom Ursprung bis zum anderen Drahtpunkt auf der rechten Seite und hat eine Länge von 1085 mm. Diese Länge entspricht außerdem der X-Achse unseres Bezugssystems.

Die Y-Achse des Koordinatensystems sollte ebenfalls entsprechend passend gewählt werden, um eine sinnvolle Auswertung durchführen zu können, und die Anzahl der verfolgten Objekte muss auf 2 erhöht werden (→ Start: „2 Objekte verfolgen“).

Die Bahnkurve der Pucks wird mit dem *Manuellen Modus* gestartet. Dabei muss abwechselnd das Zentrum des jeweiligen Pucks mit der Maus angeklickt werden. Sind beide Zentren der Pucks *pro frame* ausgewählt worden, so springt das Programm automatisch zum nächsten *frame*. Dies wird so lange durchgeführt, bis hinreichend viele Punkte für die Bewegungen der Pucks vor und nach dem Stoß ermittelt wurden um die entsprechenden Geschwindigkeitsvektoren zu ermitteln (mindestens 5 Punkte pro Vektor). Die ermittelten Daten werden anschließend in einem x-y-Diagramm sichtbar, bei der die Bahnkurve für jeweils ein Objekt (eine Überlagerung beider Objekte in ein gemeinsames Diagramm ist nicht möglich) dargestellt wird. Anhand dieses Diagramms kann eine geeignete Wahl der Koordinaten zur Bestimmung der jeweiligen Impulsvektoren der Pucks getroffen werden. Das Diagramm kann über den Reiter „Diagramm“ gespeichert werden und wird dem Protokoll als Messwerttabelle beigelegt.

Für die Auswertung der Experimente sollen die Impulsvektoren der Pucks als Spaltenvektoren vor und nach dem Stoß angegeben werden, also in der Form:

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$$

Zusätzlich soll ein Vektordiagramm angelegt werden, in das die Impulse vor und nach dem Stoß sowie ihre Summen eingezeichnet werden.

Um die Auswertung nicht zu aufwändig zu machen, kann hier auf eine Fehlerrechnung verzichtet werden. Es reicht eine plausible Abschätzung der Größtfehler für die einzelnen Impulskomponenten.

Die ermittelten Koordinaten sind unter dem Reiter „Datentabelle“ abgespeichert nachdem man die Bahnkurve der Pucks markiert. Diese kann als *txt*- oder *Excel*-Datei abgespeichert werden. Für den Datenexport genügt es die Bildnummer, Zeit und X- & Y-Position zu speichern. Anhand dieser Daten können die Impulsvektoren der jeweiligen Pucks sowohl vor, als auch nach dem Stoß konstruiert werden. Die Datentabelle soll ebenfalls im Anhang der des Protokolls aufgeführt werden.

Bitte versuchen Sie, die Auswertung manuell vorzunehmen und die Rechnungen auch in Ihrem Protokoll detailliert und nachvollziehbar zu dokumentieren. Zusätzlich wird Ihnen ein MATLAB-Skript „law_of_collision“ zur Verfügung gestellt, mit dem Sie Ihre Ergebnisse überprüfen können und die entsprechenden Vektordiagramme darstellen können. Im Folgenden wird erklärt, wie das Skript aufgebaut ist, um es logisch nachvollziehbar zu machen.

Nehmen wir an, die Mitte von Puck 1 (Masse $m_1 = 0,2$ kg) habe vor dem Stoß zur Zeit t die Bildschirmkoordinaten $x_{11} = 210$ px, $y_{11} = 320$ px (s. Abb. 9). n Bildaufnahmen später, also zur Zeit $t + n/f$ (f : Bildfrequenz in „frames per second“ (fps), hier sei $f = 15$ Hz und $n = 1$) seien die Koordinaten des Mittelpunktes von Puck 1 $x_{12} = 345$ px und $y_{12} = 275$ px. Die genannten Koordinaten sind hier noch in Pixel (px) angegeben. Durch das Einmessen des Videos ist dann auch die entsprechende Information in mm vorhanden.

In MATLAB wird das *m*-File „law_of_collision“ geöffnet. Zunächst werden dort die Versuchsparameter in SI-Einheiten eingegeben (Erinnerung: das Semikolon am Ende der Zeile verhindert die Ausgabe im Command-Window von MATLAB):

```
f = 15;
n = 1;
m1 = 0.2;
x11 = 210;
y11 = 320;
x12 = 345;
y12 = 275;
```

Nun berechnen wir die Ortsvektoren der beiden Positionen von Puck 1 vor dem Stoß. \mathbf{r}_{11} ist der Ortsvektor zur Zeit t , \mathbf{r}_{12} der Ortsvektor zur Zeit $t + n/f$. Die Ortsvektoren geben wir als Spaltenvektoren an (Matlab-Notation: [x-Komponente; y-Komponente]) und lassen sie auf dem Bildschirm ausgeben (des-halb *kein* Semikolon am Zeilenende):

```
r11 = [x11; y11]
r12 = [x12; y12]
```

Daraus ergibt sich der Impulsvektor \mathbf{p}_1 für Puck 1 vor dem Stoß ebenfalls als Spaltenvektor:

```
p1 = m1 * (r12 - r11) / (n/f)
```

In Zahlen ergibt sich für das genannte Beispiel:

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 0,0771 \\ -0,0257 \end{pmatrix} \text{kg m s}^{-1}$$

Analog lassen sich der Impuls von Puck 2 vor dem Stoß (\mathbf{p}_2) und die Impulse beider Pucks nach dem Stoß (\mathbf{p}_1' und \mathbf{p}_2') berechnen (in MATLAB schreiben wir z. B. `p1s` für \mathbf{p}_1' , wobei „s“ für „Strich“ steht). Daraus ergeben sich die Gesamtimpulse vor und nach dem Stoß (\mathbf{p} und \mathbf{p}'):

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_s &= \mathbf{p}_{1s} + \mathbf{p}_{2s} \end{aligned}$$

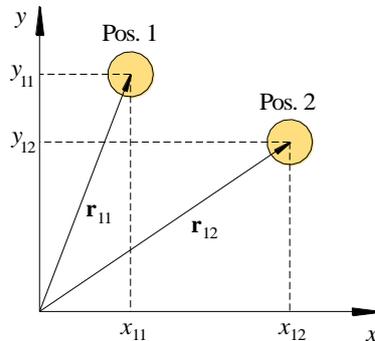


Abb. 9: Definition von Größen zur Kennzeichnung der Position von Puck 1 zum Zeitpunkt t (Pos. 1) und zum Zeitpunkt $t + n/f$ (Pos. 2). \mathbf{r}_{11} und \mathbf{r}_{12} sind die Ortsvektoren zur Beschreibung der Puckpositionen.

und es lässt sich einfach überprüfen, ob die Impulsdifferenz $\Delta\mathbf{p}$ null ist:

$$\text{delta_p} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_s$$

Um zu überprüfen, ob im Versuchsteil a) die Impulse \mathbf{p}_1' und \mathbf{p}_2' senkrecht aufeinander stehen, berechnet man ihr Skalarprodukt (hier `sk` genannt) mit dem Matlab-Befehl `dot`:

$$\text{sk} = \text{dot}(\mathbf{p}_{1s}, \mathbf{p}_{2s})$$

Für einen Winkel von $\phi = 90^\circ$ zwischen beiden Vektoren muss $\text{sk} = 0$ sein. Weicht der Wert des Skalarproduktes von Null ab, lässt sich ϕ aus dem Wert für `sk` berechnen, denn es gilt bekanntlich für das Skalarprodukt:

$$(35) \quad \text{sk} = \mathbf{p}_1' \cdot \mathbf{p}_2' = |\mathbf{p}_1'| |\mathbf{p}_2'| \cos \phi$$

und damit

$$(36) \quad \phi = \arccos\left(\frac{\text{sk}}{|\mathbf{p}_1'| |\mathbf{p}_2'|}\right)$$

Der Betrag eines Vektors (seine „Norm“) wird in MATLAB mit der Funktion `norm` berechnet. Gl. (37) lautet daher in Matlab-Notation:

$$(37) \quad \text{phi} = \text{acos}(\text{sk} / (\text{norm}(\mathbf{p}_{1s}) * \text{norm}(\mathbf{p}_{2s})))$$

Frage 4:

- Ist der Impulserhaltungssatz jeweils erfüllt? Bleibt die kinetische Energie in beiden Fällen erhalten? Wie lassen sich mögliche Abweichungen erklären?
- Der Streuwinkel ϕ wird nur für den Fall a) bestimmt. Wie groß ist er? Stimmt das Ergebnis mit den theoretischen Erwartungen nach Gl. (34) überein? Falls nein - was könnten die Ursachen sein?

3.4 Vektordiagramme

2D-Vektordiagramme des Impulses \mathbf{p} lassen sich mit MATLAB mit Hilfe des Befehls `quiver` einfach zeichnen. Der Befehl hat das Format `quiver(a,b,u,v,s)`. Dabei sind a und b die Koordinaten des Startpunktes des Vektors, u und v seine x - und y -Komponenten und s ein Skalierungsfaktor. Mehr Details können aus den bereitgestellten MATLAB Skript entnommen werden. Bitte fügen Sie die entsprechenden Vektordiagramme zu Ihrem Protokoll hinzu.