Bemerkung: Dieses Resultat findet sich in Witting (1985), dort Satz 1.193. Allerdings wird im Beweis dort der Satz von Pratt, zitiert aus Gänßler and Stute (1977), verwendet, ohne daß dessen Voraussetzungen nachgewiesen werden:

Es geht hierbei um die stochastische Konvergenz einer Majorantenfolge, deren Erwarungswerte mitkonvergieren. Eine solche wird aber im Beweis nicht angegeben; allerdings könnte man, in deren Notation,

$$G_n(T) := \frac{r^r}{|\vartheta_m - \vartheta_0|^r}\,\mathrm{E}_\vartheta[g(L_{\vartheta_0,\vartheta_m})|T]$$

als Kandidaten hernehmen, jedoch ist dessen stochastische Konvergenz im Beweis nicht nachgewiesen, und es fehlt die Angabe des Limes–Elementes G. Diese Lücke läßt sich wie folgt füllen: Setzen wir

$$G(T) = \mathrm{E}_\vartheta[|\eta^\tau \dot L_\vartheta|^r \Big| T],$$

und wenden wir die Minkowski-Ungleichung für bedingte Erwartungswerte an, mit der folgt

$$\Big|\big|\,\mathrm{E}[|A|^p \Big|\mathcal{U}]\big|^{\frac{1}{p}} - \big|\,\mathrm{E}[|B|^p \Big|\mathcal{U}]\big|^{\frac{1}{p}}\Big| \le \big|\,\mathrm{E}[|A-B|^p \Big|\mathcal{U}]\big|^{\frac{1}{p}},$$

so folgt nach nochmaliger Integration für $p = r$, $A = \frac{r}{|\vartheta_m - \vartheta_0|}(L_{\vartheta_0,\vartheta_m}^{\frac{1}{r}} - 1)$, $B = \eta^\tau \dot L_\vartheta$

$$\begin{aligned} 0 \le \mathrm{E}\Big[\Big|\big|\,\mathrm{E}[|A|^p\,|\mathcal{U}]\big|^{\frac{1}{p}} - \big|\,\mathrm{E}[|B|^p\,|\mathcal{U}]\big|^{\frac{1}{p}}\Big|\Big] \le \mathrm{E}\big[\big|\,\mathrm{E}[|A-B|^p\,|\mathcal{U}]\big|^{\frac{1}{p}}\big] \le \\ \le \quad \mathrm{E}[\mathrm{E}[|A-B|^p\,|\mathcal{U}]]^{\frac{1}{p}} = \mathrm{E}[|A-B|^p]^{\frac{1}{p}} = \mathrm{o}(|\vartheta_m - \vartheta_0|^0), \end{aligned}$$

insbesondere also $G_n = G + \mathrm{o}_{P^T_{\vartheta_0}}(m^0)$.

Durch eine andere Argumentation mit dem Satz von Vitali kann man diese Lücke in der Anwendung des Satzes von Pratt zwar umgehen, der Beweis in Rieder and Ruckdeschel (2000) jedoch verwendet einfacher das Vallée-Poussin Kriterium.

Literaturverzeichnis

Gänßler, P. and Stute, W. (1977). *Wahrscheinlichkeitstheorie.*, Hochschultext., Springer.

Rieder, H. and Ruckdeschel, P. (2000). Short Proofs on L_r–Differentiability., submitted.

Witting, H. (1985). *Mathematische Statistik I: Parametrische Verfahren bei festem Stichprobenumfang.*, B. G. Teubner, Stuttgart.