

Modellierung und Simulation hochdimensionaler Abhängigkeiten versicherungstechnischer Risiken

Prof. Dr. Dietmar Pfeifer

Institut für Mathematik

Schwerpunkt Versicherungs- und Finanzmathematik



Agenda

- Ein kurzer Blick in die Historie
- Copulas
- Bernstein-Copulas
- Zerlegung-der-Eins-Copulas
- Von der empirischen zur Bernstein-Copula
- Simulationen mit Bernstein-Copulas
- Ein Anwendungsbeispiel
- Literatur

Ein kurzer Blick in die Historie

Weierstraß'scher Approximationssatz:

Die Menge der Polynome ist dicht im Raum $C[0,1]$.

Probabilistischer Beweis von S.N. Bernstein (1912) mit **Bernstein-Polynomen**:

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \xrightarrow{\text{glm.}} f(x), \quad x \in [0,1], \quad f \in C[0,1].$$

Ein kurzer Blick in die Historie

Weierstraß'scher Approximationssatz:

Die Menge der Polynome ist dicht im Raum $C[0,1]$.

Beweisidee:

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = E\left[f\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right)\right] = E[f(\bar{X}_n)]$$

mit einer Folge $\{X_n\}$ stochastisch unabhängiger, $B(1,x)$ -binomialverteilter Zufallsvariablen [$\rightarrow$ Gesetz der großen Zahlen]

Ein kurzer Blick in die Historie

Weierstraß'scher Approximationssatz:

Die Menge der Polynome ist dicht im Raum $C[0,1]$.

Konvergenz-Abschätzung (mit Tschebyscheff-Ungleichung):

$$\|B_n f - f\|_{C[0,1]} \leq \omega(f; \delta) + \frac{\|f\|_{C[0,1]}}{2n\delta^2}, \quad \delta > 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

mit dem Stetigkeitsmodul

$$\omega(f; \delta) := \sup \{ |f(x) - f(y)| \mid x, y \in [0,1], \quad |x - y| \leq \delta \}$$

Ein kurzer Blick in die Historie

Weierstraß'scher Approximationssatz:

Die Menge der Polynome ist dicht im Raum $C[0,1]$.

Verbesserte Abschätzung für $f'' \in C[0,1]$:

$$|B_n f(x) - f(x)| \leq \|f''\|_{C[0,1]} \cdot \frac{x(1-x)}{2n} \leq \frac{\|f''\|_{C[0,1]}}{8n}, \quad x \in [0,1]$$

(zugleich ist $\mathcal{O}(n^{-1})$ die bestmögliche Konvergenzordnung)

Ein kurzer Blick in die Historie

Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités.

Je me propose d'indiquer une démonstration fort simple du théorème suivant de Weierstrass:

Si $F(x)$ est une fonction continue quelconque dans l'intervalle 01 , il est toujours possible, quel que petit que soit ϵ , de déterminer un polynôme $E_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ de degré n assez élevé, tel qu'on ait

$$|F(x) - E_n(x)| < \epsilon$$

en tout point de l'intervalle considéré.

A cet effet, je considère un événement A , dont la probabilité est égale à x . Supposons qu'on effectue n expériences et que l'on convienne de payer à un joueur la somme $F\left(\frac{m}{n}\right)$, si l'événement A se produit m fois. Dans ces conditions, l'espérance mathématique E_n du joueur aura pour valeur

$$E_n = \sum_{m=0}^{m=n} F\left(\frac{m}{n}\right) \cdot C_n^m x^m (1-x)^{n-m}. \quad (1)$$



Sergeij Natanovich
Bernstein

Ein kurzer Blick in die Historie

Erweiterung des Approximationssatzes [Butzer (1962)]:

Die Menge der Polynome ist dicht im Raum $C[0,1]^d$, $d \in \mathbb{N}$.

Beweisidee: für $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)$:

$$\begin{aligned}
 B_{\mathbf{n}} f(x_1, \dots, x_d) &= \sum_{k_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{k_d=0}^{n_d} f\left(\frac{k_1}{n_1}, \dots, \frac{k_d}{n_d}\right) \prod_{i=1}^d \binom{n_i}{k_i} x_i^{k_i} (1-x_i)^{n_i-k_i} \\
 &= E\left[f\left(\bar{X}_{1n_1}, \dots, \bar{X}_{dn_d}\right)\right]
 \end{aligned}$$

mit stochastisch unabhängigen, binomialverteilten Zufallsvariablen $\{X_{ik} \mid i = 1, \dots, d, k \in \mathbb{N}\}$ und $P^{X_{ik}} = B(1, x_i)$

Ein kurzer Blick in die Historie

Erweiterung des Approximationssatzes [Butzer (1962)]:

Die Menge der Polynome ist dicht im Raum $C[0,1]^d$, $d \in \mathbb{N}$.

Ähnliche Konvergenz-Abschätzungen, z.B bei genügender Glattheit: mit $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$:

$$|B_n f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| \leq \frac{1}{8} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\left\| \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f \right\|_{C[0,1]^d}}{\sqrt{n_i n_j}}, \quad \mathbf{x} \in [0,1]^d$$

[Konvergenzordnung $\mathcal{O}(m^{-1})$ mit $m = \min\{n_1, \dots, n_d\}$]

Ein kurzer Blick in die Historie

Erweiterung des Approximationssatzes durch Bézier und de Casteljau (1960 - 1968) auf parametrische Kurven und Flächen mittels Steuerpunkten

- Karosseriebau bei Renault und Citroen; CAD
- Design der Schrifttypen in ~~TeX~~ durch D. Knuth ab 1977



(Beispiel aus Mathar / Pfeifer (1991), S. 150)

Copulas

Satz von Sklar (1958): Jede mehrdimensionale Verteilungsfunktion F kann zerlegt werden in eine Copula C und ihre eindimensionalen Randverteilungsfunktionen $F_1, \dots, F_d$:

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$$

Dabei bedeutet eine Copula anschaulich eine d -dimensionale Verteilungsfunktion mit stetigen uniformen Randverteilungsfunktionen.

Copulas

Satz von Sklar (1958): Jede mehrdimensionale Verteilungsfunktion F kann zerlegt werden in eine Copula C und ihre eindimensionalen Randverteilungsfunktionen $F_1, \dots, F_d$:

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$$

Die Copula ist eindeutig bestimmt, wenn die Randverteilungsfunktionen *stetig* sind. In diesem Fall gilt auch die Umkehrung

$$C(u_1, \dots, u_d) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d))$$

mit den Quantilfunktionen $F_1^{-1}, \dots, F_d^{-1}$ (Pseudo-Inverse).

Copulas

Satz von Sklar (1958): Jede mehrdimensionale Verteilungsfunktion F kann zerlegt werden in eine Copula C und ihre eindimensionalen Randverteilungsfunktionen $F_1, \dots, F_d$:

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$$

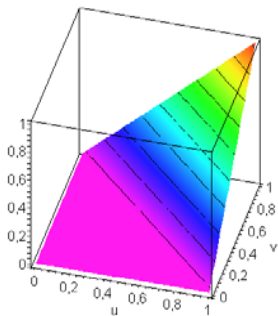
Interpretation:

- Die Randverteilungsfunktionen beschreiben das stochastische Verhalten der *univariaten* Risiken.
- Die Copula beschreibt die stochastische Abhängigkeit *zwischen* den Risiken.

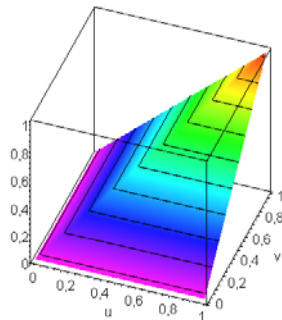
Copulas

Fréchet-Hoeffding-Schranken:

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^d u_i + 1 - d, 0 \right\} =: \mathcal{W}^d(\mathbf{u}) \leq \mathbf{C}(\mathbf{u}) \leq \mathcal{M}^d(\mathbf{u}) := \min \{u_1, \dots, u_d\}$$



Fall $d = 2$



Repräsentanten: $(X, 1-X)$ oder $(1-X, X)$

$(X, X, \dots, X)$

Copulas

Bekannte Typen von Copulas:

parametrische Copulas:

- Elliptische Copulas ($\rightarrow$ Gauß-Copula, t -Copula)
- Archimedische Copulas

nichtparametrische Copulas:

- Bernstein-Copulas
- Zerlegung-der-Eins-Copulas ($\rightarrow$ B-Spline-Copulas)

Copulas

Bekannte Typen von Copulas:

genestete Copulas:

- Hierarchische Archimedische Copulas
- D-Vine Copulas (→ Rosenblatt-Transformation)

Generelles Problem: „Fluch der Dimension“:

Handhabbarkeit der Modellierung in hohen Dimensionen

Bernstein-Copulas

Idee:

- Die „Steuerpunkte“ des mehrdimensionalen Ansatzes werden durch Gewichte aus Wahrscheinlichkeiten geeigneter diskreter multivariater Verteilungen mit uniformen Rändern ersetzt.
- Die Gewichte werden aus den Daten z.B. mittels der empirischen Copula geschätzt (→ Kontingenztafel).
- Es ist eine explizite Darstellung der Copula-Dichte möglich.

Bernstein-Copulas

$\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_d)$ sei ein Zufallsvektor mit Komponenten U_i , die einer **diskreten Gleichverteilung** über $T_i := \{0, 1, \dots, m_i - 1\}$ mit $m_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, d$ genügen. Ferner bezeichne

$$p(k_1, \dots, k_d) := P\left(\bigcap_{i=1}^d \{U_i = k_i\}\right) \text{ für alle } (k_1, \dots, k_d) \in \prod_{i=1}^d T_i.$$

Dann wird über $B(m, k, z) = \binom{m}{k} z^k (1-z)^{m-k}$ durch

$$c(u_1, \dots, u_d) := \sum_{k_1=0}^{m_1-1} \cdots \sum_{k_d=0}^{m_d-1} p(k_1, \dots, k_d) \prod_{i=1}^d m_i B(m_i - 1, k_i, u_i), \mathbf{u} \in [0, 1]^d$$

die Dichte einer d -dimensionalen (Bernstein-)Copula definiert.

Bernstein-Copulas

Die Copula selbst kann hieraus durch Integration gewonnen werden:

$$\begin{aligned}
 C(x_1, \dots, x_d) &= \int_0^{x_d} \cdots \int_0^{x_1} c(u_1, \dots, u_d) du_1 \cdots du_d \\
 &= \sum_{k_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{k_d=0}^{m_d} P\left(\bigcap_{i=1}^d \{U_i < k_i\}\right) \prod_{i=1}^d B(m_i, k_i, x_i), \quad \mathbf{x} \in [0, 1]^d.
 \end{aligned}$$

Formal ähnlich zu d -dimensionalem Bernstein-Polynom!

Bernstein-Copulas

Konvergenzverhalten: Ist c^* die „wahre“ Copula-Dichte der betrachteten Risiken und setzt man

$$I_{k_1, \dots, k_d} := \prod_{j=1}^d \left(\frac{k_j}{m_j}, \frac{k_j + 1}{m_j} \right] \quad \text{für alle } (k_1, \dots, k_d) \in \prod_{i=1}^d T_i$$

sowie

$$p(k_1, \dots, k_d) := P \left(\bigcap_{i=1}^d \{U_i = k_i\} \right) = \int \dots \int_{I_{k_1, \dots, k_d}} c^*(u_1, \dots, u_d) du_1 \dots du_d,$$

(Glättung), so konvergiert die Bernstein-Copula-Dichte mit wachsendem $\min\{m_1, \dots, m_d\}$ gegen die wahre Copula-Dichte.

Zerlegung-der-Eins-Copulas

Ausgangspunkt: Funktionen $\{\phi(m, k, \cdot) \mid 0 \leq k \leq m-1, m \in \mathbb{N}\}$ über $[0,1]$ mit

$$\int_0^1 \phi(m, k, u) du = \frac{1}{m} \quad \text{für } k = 0, \dots, m-1$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} \phi(m, k, \cdot) = 1 \quad \text{für } m \in \mathbb{N}.$$

Copula-Dichte:

$$c^\phi(u_1, \dots, u_d) := \sum_{k_1=0}^{m_1-1} \cdots \sum_{k_d=0}^{m_d-1} P\left(\bigcap_{i=1}^d \{U_i = k_i\}\right) \prod_{i=1}^d m_i \phi(m_i, k_i, u_i), \quad \mathbf{u} \in [0,1]^d.$$

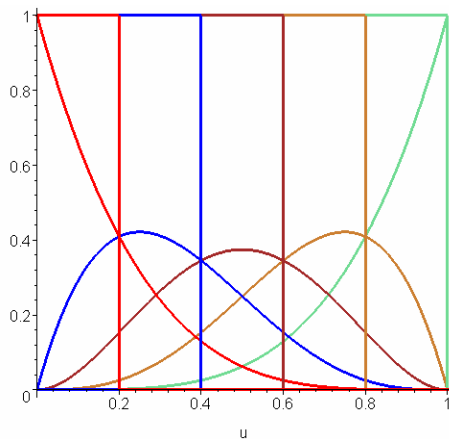
Zerlegung-der-Eins-Copulas

Spezialfälle:

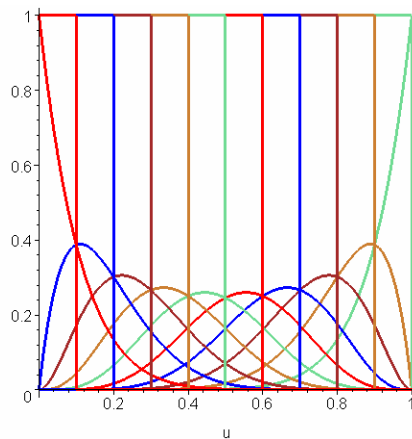
- Bernstein-Copulas mit $\phi(m, k, \cdot) = B(m-1, k, \cdot)$
- Gitter-Copulas mit $\phi(m, k, \cdot) = \mathbb{1}_{\left(\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}\right]}(\cdot)$

Zerlegung-der-Eins-Copulas

Graphische Veranschaulichung für $d = 1$:



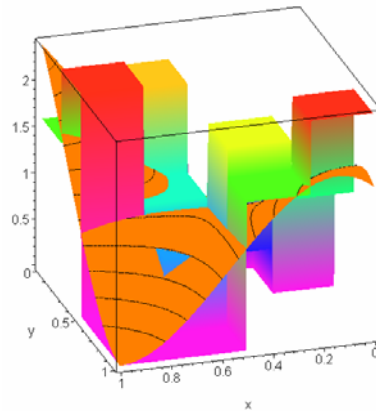
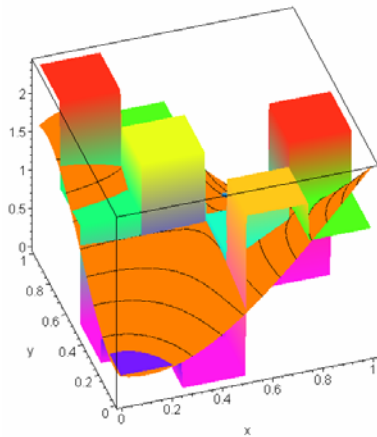
$m = 5$



$m = 10$

Zerlegung-der-Eins-Copulas

Graphische Veranschaulichung für $d = 2$:



Zerlegung-der-Eins-Copulas

Verallgemeinerung: für festes $K \in \mathbb{N}$ Übergang zu

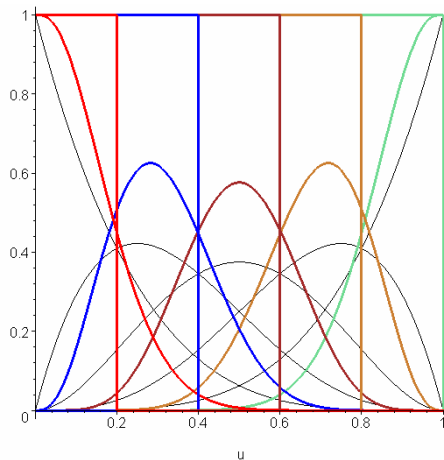
$$\phi_K(m, k, \cdot) := \sum_{j=0}^{K-1} \phi(K \cdot m, K \cdot k + j, \cdot) \quad \text{für } k = 0, \dots, m-1$$

Denn:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \phi_K(m, k, u) du &= \sum_{j=0}^{K-1} \int_0^1 \phi(K \cdot m, K \cdot k + j, u) du = \sum_{j=0}^{K-1} \frac{1}{K \cdot m} = \frac{1}{m} \\ \sum_{k=0}^{m-1} \phi_K(m, k, \cdot) &= \sum_{j=0}^{K-1} \sum_{k=0}^{m-1} \phi(K \cdot m, K \cdot k + j, \cdot) = \sum_{i=0}^{K \cdot m} \phi(K \cdot m, i, \cdot) = 1. \end{aligned}$$

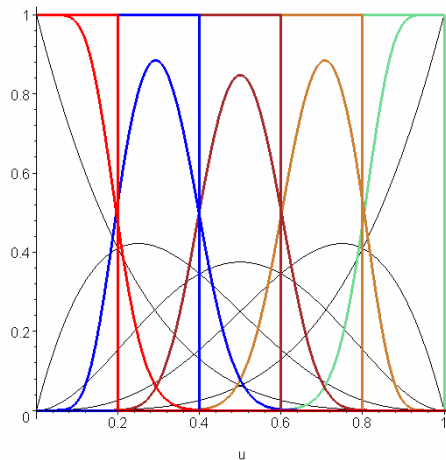
Zerlegung-der-Eins-Copulas

Graphische Veranschaulichung für $d = 1$:



$K = 3$

$m = 5$



$K = 10$

Von der empirischen zur Bernstein-Copula

Empirische Copula:

- Analogon zur empirischen Quantilfunktion

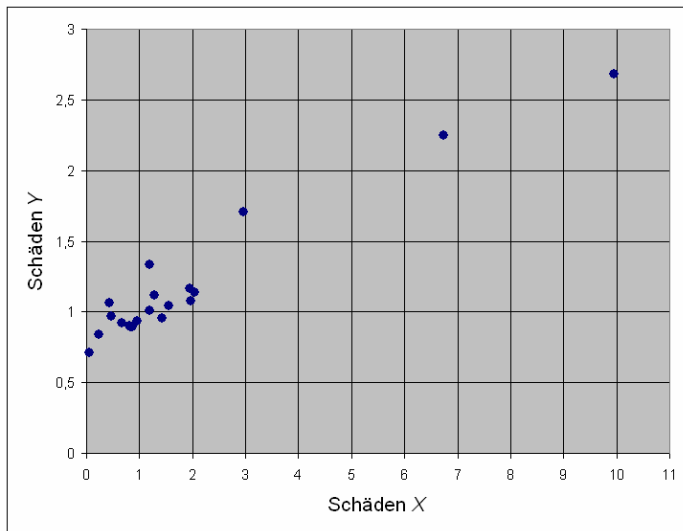
Gegeben: n unabhängige Beobachtungen $z_{j1}, \dots, z_{jn}$ je Dimension j

- Ansatz: Transformation der Daten $z_{j1}, \dots, z_{jn}$ auf ihre relativen Ränge $r_{j1}, \dots, r_{jn} \in \left\{ \frac{1}{n+1}, \dots, \frac{n}{n+1} \right\}$
- Verwendung der $\mathbf{r}_i = (r_{i1}, \dots, r_{di})$ als *empirische Stichprobe* aus der zu Grunde liegenden Copula.

Von der empirischen zur Bernstein-Copula

Beispieldatensatz ($d = 2$, $n = 20$):

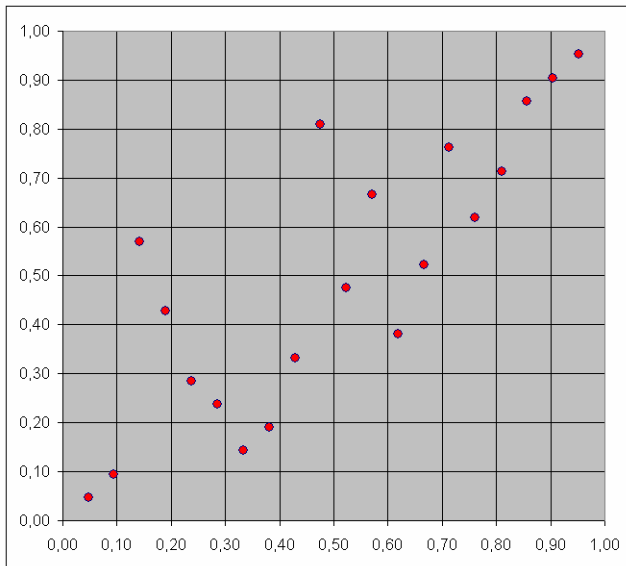
Nr.	Schäden X	Schäden Y
1	0,468	0,966
2	9,951	2,679
3	0,866	0,897
4	6,731	2,249
5	1,421	0,956
6	2,040	1,141
7	2,967	1,707
8	1,200	1,008
9	0,426	1,065
10	1,946	1,162
11	0,676	0,918
12	1,184	1,336
13	0,960	0,933
14	1,972	1,077
15	1,549	1,041
16	0,819	0,899
17	0,063	0,710
18	1,280	1,118
19	0,824	0,894
20	0,227	0,837



Von der empirischen zur Bernstein-Copula

Beispieldatensatz ($d = 2$, $n = 20$):

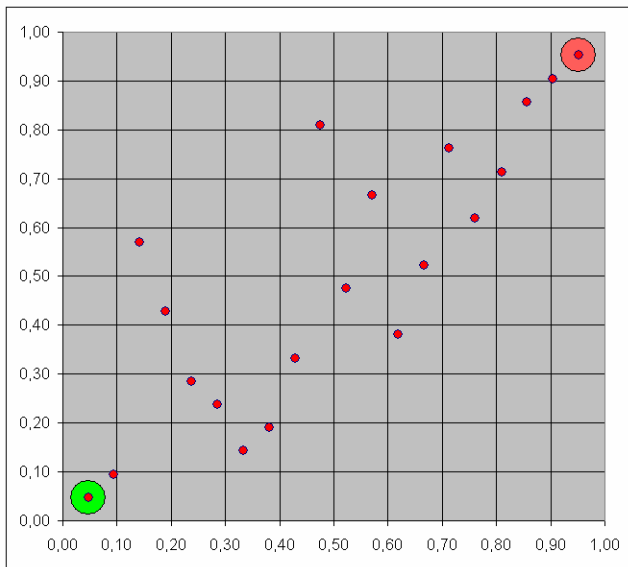
Nr.	Rang X	Rang Y
1	0,18967	0,42852
2	0,95238	0,95238
3	0,38057	0,18967
4	0,90443	0,90443
5	0,61852	0,38057
6	0,80943	0,71352
7	0,85648	0,85648
8	0,52352	0,47557
9	0,14262	0,57057
10	0,71352	0,76148
11	0,23762	0,28557
12	0,47557	0,80943
13	0,42852	0,33262
14	0,76148	0,61852
15	0,66648	0,52352
16	0,28557	0,23762
17	0,04762	0,04762
18	0,57057	0,66648
19	0,33262	0,14262
20	0,09467	0,09467



Von der empirischen zur Bernstein-Copula

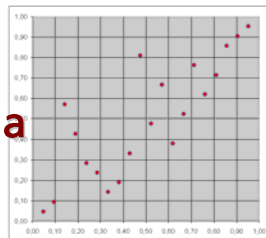
Beispieldatensatz ($d = 2$, $n = 20$):

Nr.	Rang X	Rang Y
1	0,18967	0,42852
2	0,95238	0,95238
3	0,38057	0,18967
4	0,90443	0,90443
5	0,61852	0,38057
6	0,80943	0,71352
7	0,85648	0,85648
8	0,52352	0,47557
9	0,14262	0,57057
10	0,71352	0,76148
11	0,23762	0,28557
12	0,47557	0,80943
13	0,42852	0,33262
14	0,76148	0,61852
15	0,66648	0,52352
16	0,28557	0,23762
17	0,04762	0,04762
18	0,57057	0,66648
19	0,33262	0,14262
20	0,09467	0,09467



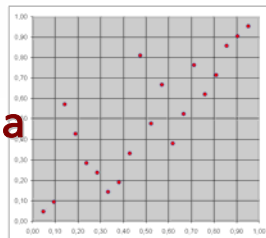
Von der empirischen zur Bernstein-Copula

Schätzung der Gewichte $p(k_1, k_2)$:

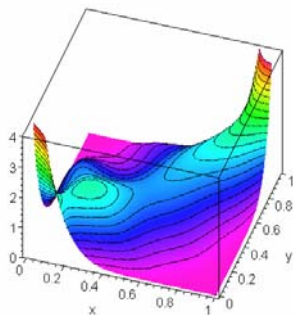
[illegible]

Von der empirischen zur Bernstein-Copula

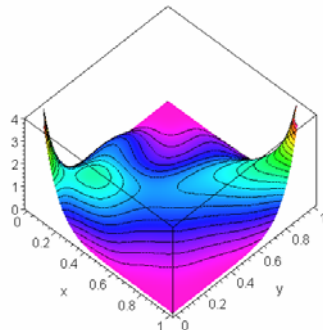
Bernstein-Copula-Dichte:



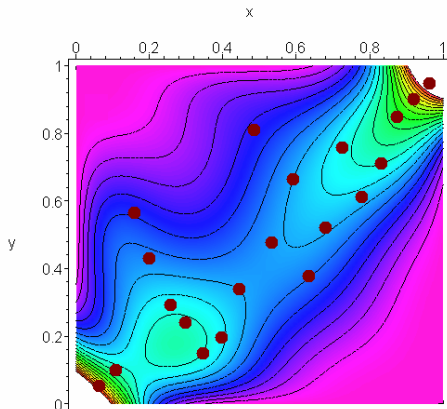
$$\begin{aligned}
 c(x, y) = & 10(1-x)^9(1-y)^9 + 7560x^3(1-x)^6y(1-y)^8 + 12960x^2(1-x)^7y^2(1-y)^7 \\
 & + 52920x^4(1-x)^5y^3(1-y)^6 + 35280x^6(1-x)^3y^3(1-y)^6 + 5670x(1-x)^8y^4(1-y)^5 \\
 & + 79380x^5(1-x)^4y^4(1-y)^5 + 5670x(1-x)^8y^5(1-y)^4 + 52920x^6(1-x)^3y^5(1-y)^4 \\
 & + 52920y^6(1-y)^3x^5(1-x)^4 + 15120y^6(1-y)^3x^7(1-x)^2 + 6480y^7(1-y)^2x^7(1-x)^2 \\
 & + 1620x^8(1-x)y^7(1-y)^2 + 5670x^4(1-x)^5y^8(1-y) + 405x^8(1-x)y^8(1-y) + 10x^9y^9
 \end{aligned}$$



$c(x, y)$



Von der empirischen zur Bernstein-Copula



Höhenlinien der Bernstein-Copula-Dichte
überlagert mit Punkten der empirischen Copula

Von der empirischen zur Bernstein-Copula

Problem: Randsummen eventuell nicht „passend“

- Optimierungsproblem zur Approximation durch eine “zulässige” Kontingenztafel $[x_{ij}]$ (mit $m \times m$ -Gitterung):

$$\min! \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (x_{ij} - a_{ij})^2 \text{ unter den Nebenbedingungen}$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ik} = \sum_{j=1}^m x_{\ell j} = \frac{1}{m} \text{ und } x_{\ell,k} \geq 0 \text{ für } k, \ell = 1, \dots, m.$$

- explizite Lösung rechnerisch aufwändig ($\rightarrow$ Karush-Kuhn-Tucker-Theorem)

Von der empirischen zur Bernstein-Copula

Suboptimale Lösung: äquivalentes Lagrange-Problem ohne die Nichtnegativitätsbedingung:

$$x_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{\bullet j}}{m} - \frac{a_{i \bullet}}{m} + \frac{2}{m^2} \quad \text{für } i, j = 1, \dots, m,$$

Positivitäts-Korrektur:

$$[y_{ij}] = \left[\frac{x_{ij} - a}{1 - m^2 \cdot a} \right] \quad \text{mit } a := \min \{0, x_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq m\}$$

- Explizite suboptimale Lösung in jeder Dimension bekannt!

- Problem tritt nicht auf, wenn m Teiler der Datenzahl ist!

Simulationen mit Bernstein-Copulas

Mehrdimensionales Problem: analoges Lagrange-Problem:

$$\min! \sum_{(i_1 \dots i_d) \in I^d} \left(x_{i_1 \dots i_d} - a_{i_1 \dots i_d} \right)^2 \quad \text{unter } x_{\bullet[k]}(i_k) := \sum_{(i_1 \dots i_d) \in I_k^d(i_k)} x_{i_1 \dots i_d} = \frac{1}{m}$$

mit $I_k^d(i) := \{1, \dots, m\}^{k-1} \times \{i\} \times \{1, \dots, m\}^{d-k}$

Allgemeine suboptimale Lösung (vor Positivitätskorrektur):

$$x_{i_1 \dots i_d} = a_{i_1 \dots i_d} - \frac{1}{m^{d-1}} \sum_{k=1}^d a_{\bullet[k]}(i_k) + \frac{d}{m^d} \quad \text{für } (i_1, \dots, i_d) \in \{1, \dots, m\}^d$$

$$\left[y_{i_1 \dots i_d} \right] = \left[\frac{x_{i_1 \dots i_d} - a}{1 - m^d a} \right] \quad \text{mit } a := \min \{ 0, x_{i_1 \dots i_d} \mid 1 \leq i_1, \dots, i_d \leq m \}$$

Simulationen mit Bernstein-Copulas

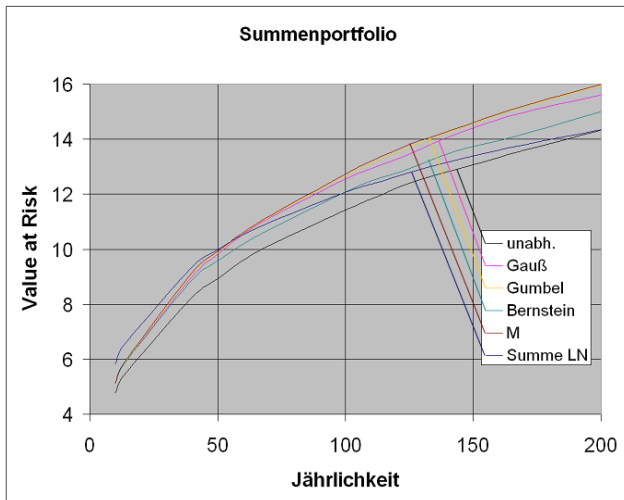
- Bernstein-Copula-Dichte c ist nach oben beschränkt (etwa durch $M = m^d \max\{y_{i_1 \dots i_d} \mid 1 \leq i_1, \dots, i_d \leq m\}$)
- Verwerfungsmethode:
 1. Erzeuge $d + 1$ unabhängige Zufallszahlen $u_1, \dots, u_{d+1}$.
 2. Falls $c(u_1, \dots, u_d) > M u_{d+1}$, gehe zu 3, anderenfalls zu 1.
 3. $(u_1, \dots, u_d)$ ist "Stichprobe" der Bernstein-Copula.
- durchschnittliche Stichprobenrate: $1 / M$

Ein Anwendungsbeispiel

Simulationsstudie zur Bestimmung des **Value at Risk** für das Summenportfolio im obigen Beispiel (Folie 27) unter verschiedenen Modell-Annahmen (Randverteilungen mit Q-Q-Plot geschätzt):

- Gauß-Copula (elliptisch)
- Gumbel-Copula (Archimedisch)
- Untere Fréchet-Hoeffding-Schranke
- Bernstein-Copula (nichtparameterisch)
- Verteilungsanpassung für Summendaten (Lognormal)

Ein Anwendungsbeispiel



Literatur

- [1] AAS, K., CZADO, C., FRIGESSI A. AND BAKKEN, H. (2009): *Pair-copula constructions of multiple dependence*. Insurance, Mathematics and Economics 44, 182-198.
- [2] T. BOUEZMARNI, J. V.K. ROMBOUTS, A. TAAMOUTI (2008): *Asymptotic properties of the Bernstein density copula for dependent data*. CORE discussion paper 2008/45, Leuven University, Belgium.
- [3] V. DURRLEMAN, A. NIKEGHBALI, T. RONCALLI (2000): *Copulas approximation and new families*. Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, France, Working Paper.
- [4] G. KAUERMANN, C. SCHELLHASE, C. AND D. RUPPERT (2011): *Flexible Copula Density Estimation with Penalized Hierarchical B-Splines*. Preprint.
- [5] T. KULPA (1999): *On approximation of copulas*. Internat. J. Math. & Math. Sci. 22, 259 – 269.
- [6] X. LI, P. MIKUSINSKI, H. SHERWOOD, M.D. TAYLOR (1997): *On approximation of copulas*. In: V. Beneš and J. Štěpán (Eds.), Distributions with Given Marginals and Moment Problems, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [7] O. OKHRIN, Y. OKHRIN AND W. SCHMID (2011): *Determining the structure and estimation of hierarchical Archimedean copulas*. Under revision in Journal of Econometrics.
- [8] D. PFEIFER, D. STRABBURGER, J. PHILIPPS (2011): *Modelling and simulation of dependence structures in nonlife insurance with Bernstein copulas*. Revised Preprint.
- [9] A. SANCETTA, S.E. SATCHELL (2004): *The Bernstein copula and its applications to modelling and approximations of multivariate distributions*. Econometric Theory 20(3), 535 – 562.
- [10] M. SALMON, C. SCHLEICHER (2007): *Pricing multivariate currency options with copulas*. In: Copulas. From Theory to Application in Finance, J. Rank (ed.), Risk Books, London, 219 – 232.