

Mathematische Grundlagen geophysikalischer Naturgefahrenmodelle

Tagung der Fachschaft Mathematik/Informatik des Cusanuswerks

"Mathematik von Naturkatastrophen"

28. Mai – 1. Juni 2014

Dietmar Pfeifer

Institut für Mathematik

Inhalt

- Anbieter geophysikalischer Modelle
- Kreislaufprozess geophysikalischer Modelle
- Mathematische Grundlagen: Das kollektive Modell der Risikotheorie
- Formaler Aufbau geophysikalischer Modelle
- Vergleich kommerzieller Produkte

Anbieter geophysikalischer Modelle

EQECAT



*EQECAT, Inc., ist ein Teil von EQE International, die wiederum zur ABS Consulting Gruppe gehört.
Gegründet 1981*

AIR (Applied Insurance Research)



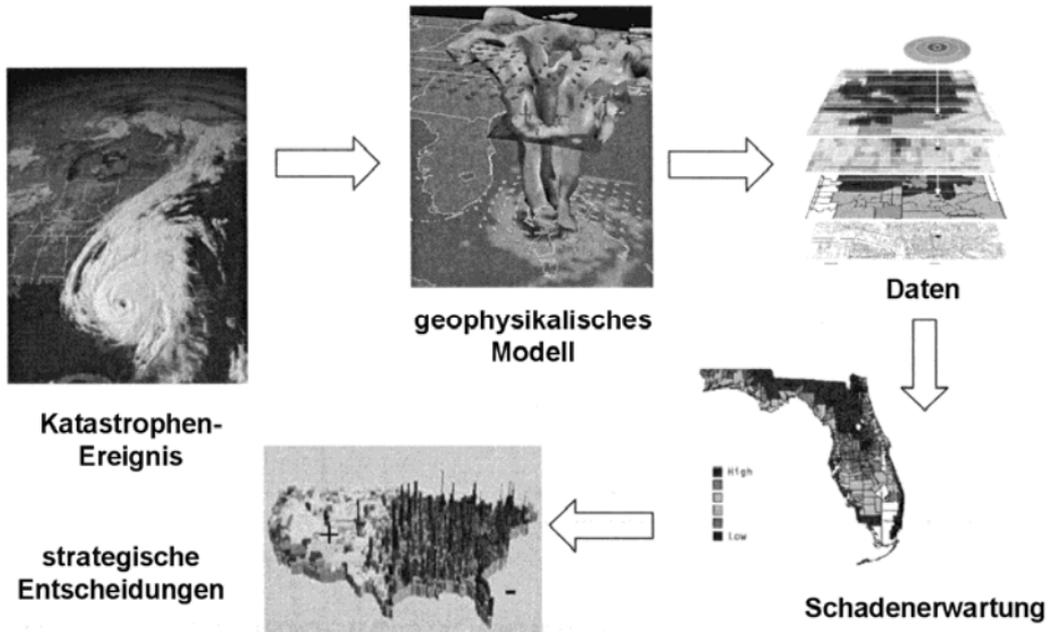
AIR ist eine Tochter der Insurance Services Office, Inc. (ISO). Gegründet 1987

RMS (Risk Management Solutions)



*RMS ist eine Tochter der DMG Information, die wiederum Teil der britischen Daily Mail und General Trust, plc. Media Enterprise.
Gegründet 1988 an der Universität Stanford*

Kreislaufprozess geophysikalischer Modelle



Mathematische Grundlagen: Das kollektive Modell der Risikotheorie

Im kollektiven Modell der Risikotheorie werden die folgenden zwei Aspekte betrachtet:

- die (zufällige) *Schadenfrequenz* N , das ist die Anzahl der Schäden, die sich für dasselbe versicherte Risiko in der Versicherungsperiode ereignen
- die *positiven Einzelschadenhöhen* Y_1, \dots, Y_N , die dabei eintreten.

Der Schaden pro Versicherungsperiode ist damit gegeben durch die zufällige Summe

$$X = \sum_{k=1}^N Y_k.$$

Mathematische Grundlagen: Das kollektive Modell der Risikotheorie

Auch hier wird zunächst wieder davon ausgegangen, dass die Einzel-schadenhöhen identisch (wie Y) verteilt sind und sowohl untereinander als auch von der Schadenfrequenz stochastisch unabhängig sind.

Die Beschreibung von Risiken über Schadenfrequenz und Einzel-schadenhöhe ist das charakteristische Merkmal des *kollektiven Modells der Risikotheorie*. Dieses wird auch beim *Loss Distribution Approach* zur Modellierung *Operationaler Risiken* verwendet.

Für die analytische Berechnung der Verteilung von X gibt es mehrere Möglichkeiten, von denen wir hier nur eine spezielle besprechen, nämlich die *Panjer-Rekursion* für eine *Poisson-verteilte* Schadenfrequenz.

Mathematische Grundlagen: Das kollektive Modell der Risikotheorie

Zur Verwendung des Panjer-Algorithmus muss die Einzelschadenhöhenverteilung geeignet *diskretisiert* werden, z. B. aufgerundet als Vielfache von 1.000 EUR oder anderen, geeigneten monetären Einheiten.

Das so diskretisierte (positive!) Risiko wird mit Y_{Δ} bezeichnet. Abkürzend setzen wir noch:

$$f_k := P(Y_{\Delta} = k), \quad g_k := P(X_{\Delta} = k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Die f_k geben also die Wahrscheinlichkeiten der diskretisierten Einzelschadenhöhen wieder, die g_k die Wahrscheinlichkeiten des gesuchten

(diskretisierten) Summenschadens $X_{\Delta} = \sum_{k=1}^N Y_{\Delta i}$.

Mathematische Grundlagen: Das kollektive Modell der Risikotheorie

Diese Wahrscheinlichkeiten lassen sich sukzessive folgendermaßen berechnen (*Panjer-Rekursion*):

$$g_0 = e^{-\lambda}, \quad g_k = \frac{\lambda}{k} \sum_{j=1}^k j \cdot f_j \cdot g_{k-j}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Explizit:

$$g_0 = e^{-\lambda}$$

$$g_1 = \lambda f_1 g_0$$

$$g_2 = \frac{\lambda}{2} (f_1 g_1 + 2f_2 g_0)$$

$$g_3 = \frac{\lambda}{3} (f_1 g_2 + 2f_2 g_1 + 3f_3 g_0)$$

$$g_4 = \frac{\lambda}{4} (f_1 g_3 + 2f_2 g_2 + 3f_3 g_1 + 4f_4 g_0)$$

⋮

Mathematische Grundlagen: Das kollektive Modell der Risikotheorie

Eine Besonderheit des Poisson-Frequenzmodells, das insbesondere für Naturgefahrenmodelle von Bedeutung ist, besteht in der Möglichkeit, auch Schäden aus gewissen *inhomogenen* (Teil-)Kollektiven zu aggregieren und ihre Summenverteilung explizit zu bestimmen.

Dazu nehmen wir an, dass das Gesamtkollektiv aus K in sich *homogenen*, aber unterschiedlichen *Teilkollektiven* besteht, wovon jedes für sich in folgender Art beschrieben werden kann:

- Jedes Teilkollektiv entspricht einem kollektiven Modell der Risikotheorie mit einer Poisson-verteilten Schadenfrequenz $\lambda_j > 0$ und einer Einzelschadenhöhenverteilung Q_j .
- Die Schadenfrequenzen und Einzelschadenhöhen aller Teilkollektive sind untereinander stochastisch unabhängig.

Mathematische Grundlagen: Das kollektive Modell der Risikotheorie

Dann lässt sich das Gesamtkollektiv beschreiben durch ein äquivalentes kollektives Modell der Risikotheorie mit der Poisson-verteilten Schadenfrequenz

$$\lambda = \sum_{j=1}^K \lambda_j$$

und der Einzelschadenhöhenverteilung

$$Q = \sum_{j=1}^K \frac{\lambda_j}{\lambda} Q_j$$

(*Mischung* der Einzelschadenhöhenverteilungen Q_1, \dots, Q_K mit den Gewichten $\frac{\lambda_1}{\lambda}, \dots, \frac{\lambda_K}{\lambda}$).

Mathematische Grundlagen: Das kollektive Modell der Risikotheorie

Beispiel: Die Einzelschadenhöhenverteilung in einer Sturmversicherung sei gegeben durch die Dichte

$$f(x) = \frac{6x}{(1+x)^4} \text{ für } x > 0$$

mit der Verteilungsfunktion

$$F(x) = \int_0^x f(u) du = \frac{x^2(3+x)}{(1+x)^3} \text{ für } x > 0$$

(monetäre Einheit: 1 Mio. EUR). Die Anzahl der Stürme im Jahr sei Poisson-verteilt mit Erwartungswert $\lambda = 1,7$. Das Versicherungsunternehmen hat eine Reserve in Höhe von 8 Mio. EUR zur Begleichung der Sturmschäden gebildet. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der jährliche Gesamtschaden im Segment Sturm die Reserve übersteigt.

Mathematische Grundlagen: Das kollektive Modell der Risikotheorie

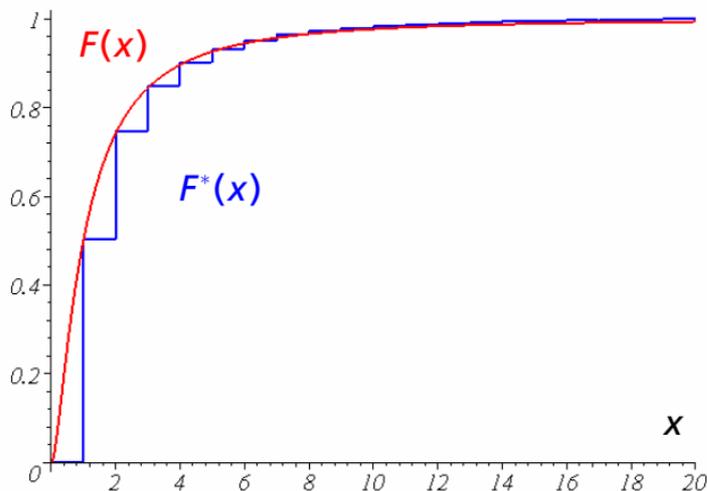
Beispiel: Für eine (approximative) Lösung mit der Panjer-Rekursion muss die Verteilung zunächst diskretisiert werden. Wir teilen dafür den Bereich $[0,20]$ auf der x-Achse in 20 gleich große Teilintervalle der Länge 1 ein und wählen:

$$f_k = \frac{F(k) - F(k-1)}{F(20)} \text{ für } k = 1, \dots, 20.$$

Faktisch wird die Einzelschadenhöhenverteilung damit bei 20 Mio. EUR nach oben abgeschnitten; die Division durch $F(20)$ ist dabei notwendig, damit sich alle f_k zu eins addieren.

Mathematische Grundlagen: Das kollektive Modell der Risikotheorie

Beispiel: Die folgende Grafik zeigt die Verteilungsfunktion F^* der Diskretisierung (als Treppenfunktion) zusammen mit der originären Verteilungsfunktion F :



Mathematische Grundlagen: Das kollektive Modell der Risikotheorie

Beispiel: Tabellarisch:

| | | | | | | | |
|-------|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| f_k | 0 | 0,5033 | 0,2423 | 0,1037 | 0,0526 | 0,0301 | 0,0188 |

| | | | | | | | |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| k | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| f_k | 0,0125 | 0,0087 | 0,0063 | 0,0047 | 0,0036 | 0,0029 | 0,0023 |

| | | | | | | | |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| k | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| f_k | 0,0018 | 0,0015 | 0,0013 | 0,0011 | 0,0009 | 0,0008 | 0,0007 |

Mathematische Grundlagen: Das kollektive Modell der Risikotheorie

Beispiel: Numerisches Ergebnis der Panjer-Rekursion:

| | | | | | | | |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| g_k | 0,1827 | 0,1563 | 0,1421 | 0,1157 | 0,0910 | 0,0702 | 0,0537 |

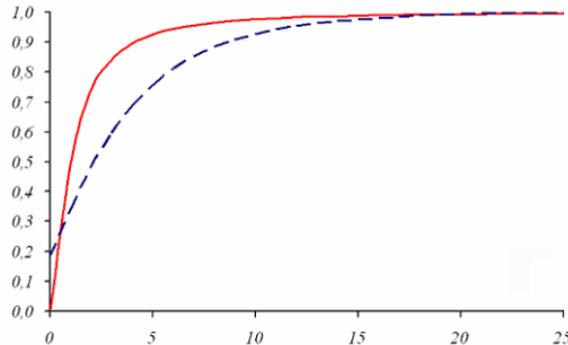
| | | | | | | | |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| k | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| g_k | 0,0410 | 0,0314 | 0,0241 | 0,0187 | 0,0146 | 0,0115 | 0,0091 |

| | | | | | | | |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| k | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| g_k | 0,0073 | 0,0059 | 0,0048 | 0,0040 | 0,0033 | 0,0028 | 0,0023 |

Mathematische Grundlagen: Das kollektive Modell der Risikotheorie

Beispiel: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der jährliche Gesamtschaden im Segment Sturm die Reserve übersteigt, ist hier gegeben durch

$$1 - \sum_{k=0}^8 g_k = 0,11595.$$



Verteilungsfunktion der Einzelschadenhöhen (durchgezogene Linie) und des Gesamtschadens nach Panjer-Rekursion, linear geglättet (gestrichelte Linie)

Mathematische Grundlagen: geophysikalische Modelle

Das Poisson-Frequenzmodell spielt hier eine wesentliche Rolle, weil für die einzelnen Naturgefahren historische Szenarien (*Historic Event Sets*) vorliegen, die den homogenen Teilkollektiven des Poisson-Frequenzmodells entsprechen. Durch stochastische Perturbationen der zusammen mit den Szenarien hinterlegten geophysikalischen Parameter wie Windrichtung und Zugbahn, Windgeschwindigkeit, Sturmdauer, Lage der Epizentren von Erdbeben, Art und Stärke der Schockwellenausbreitung usw. lassen sich hieraus leicht weitere repräsentative virtuelle Szenarien generieren (*Stochastic Event Sets*), die oft 50.000 und mehr Einträge umfassen können. Wählt man unter diesen Szenarien diejenigen aus, die ein bestimmtes Versicherungskollektiv tangieren (z. B. die gegen Sturmschäden oder Überschwemmung versicherten Gebäude einer Versicherungsgesellschaft in Norddeutschland), lassen sich auf diese Weise mit dem Computer alle wesentlichen Aspekte der Schadenverteilung für das Kollektiv berechnen oder simulieren.

Mathematische Grundlagen: geophysikalische Modelle

Die Basisversion eines geophysikalischen Modells ist durch zwei wesentliche Eingabeparameter gekennzeichnet:

- den typischen oder durchschnittlichen Schaden L_j (*Loss*), der bei jeder Realisation des Szenarios j eintritt
- den Schadenfrequenz-Parameter λ_j (*Rate*), d. h. die erwartete Anzahl des wiederholten Eintretens des Szenarios j pro Jahr

Eine Auflistung dieser Parameter in tabellarischer Form wird üblicherweise als *Event Loss Table* (ELT) bezeichnet.

Da die Schadenfrequenzen λ_j in realen geophysikalischen Modellen relativ klein ausfallen (typischerweise deutlich unterhalb von 1), stimmen sie aufgrund der Formeln für die Poisson-Verteilung in sehr guter Näherung mit der Eintrittswahrscheinlichkeit des Szenarios j überein.

Mathematische Grundlagen: geophysikalische Modelle

Beispiel einer typischen *Event Loss Table*:

| Analysis Name | Scenario | Modelled Loss | Standard Deviation | Exposed SI | Rate |
|-----------------------|----------|---------------|--------------------|----------------|--------------|
| Example Wind Analysis | 3656 | 1,940,550,920 | 36,794,128 | 68,947,100,000 | 0.0000062953 |
| Example Wind Analysis | 3968 | 1,563,781,833 | 49,352,347 | 95,221,396,000 | 0.0000129744 |
| Example Wind Analysis | 7264 | 1,482,396,982 | 41,468,066 | 69,668,353,333 | 0.0000113048 |
| Example Wind Analysis | 7219 | 1,461,229,040 | 43,029,488 | 72,023,880,000 | 0.0000113048 |
| Example Wind Analysis | 3665 | 1,431,950,171 | 47,062,942 | 73,402,510,667 | 0.0000047371 |
| Example Wind Analysis | 7222 | 1,332,616,058 | 40,221,122 | 78,780,377,333 | 0.0000113048 |
| Example Wind Analysis | 6283 | 1,169,279,403 | 35,134,601 | 74,784,286,000 | 0.0000468744 |

Mathematische Grundlagen: geophysikalische Modelle

In der Versicherungstechnik – insbesondere im Hinblick auf eine sinnvolle Rückversicherungsstruktur – sind die folgenden Schadentypen besonders interessant:

- der Jahresgesamtschaden S (*Aggregate Loss*)
- der Jahresmaximalschaden M , der auch als Ereignisschaden (*Occurrence Loss*) bezeichnet wird

Es hat sich eingebürgert, diese beiden Schadentypen durch die jeweilige komplementäre Verteilungsfunktion (Überschreitungswahrscheinlichkeiten) zu beschreiben, also:

$$AEP(x) = P(S > x) \text{ und } OEP(x) = P(M > x) \text{ für } x > 0.$$

Hierbei steht AEP für „**A**ggregate **L**oss **E**xceeding **P**robability“ und OEP für „**O**ccurrence **L**oss **E**xceeding **P**robability“.

Mathematische Grundlagen: geophysikalische Modelle

Das Poisson-Frequenzmodell erlaubt eine einfache Berechnung der *OEP*-Kurve, wenn die Szenarien nach Größe der Schäden L_j angeordnet sind, d. h., wenn gilt:

$$L_1 < L_2 < \dots < L_j < \dots$$

Die *OEP*-Kurve hat dann die Form:

$$P(M > L_j) = 1 - \exp \left\{ - \sum_{i>j} \lambda_i \right\}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Mathematische Grundlagen: geophysikalische Modelle

Die Verteilung des Jahresgesamtschadens S und damit die *AEP*-Kurve lässt sich bequem mit der Panjer-Rekursion berechnen, wenn die im Basismodell als deterministisch angenommenen Schäden L_j ganzzahlige Vielfache einer geeigneten monetären Einheit sind (z. B. 1.000 EUR). Die zur Rechnung benötigte Mischverteilung ist hier sehr einfach: Es ist die diskrete Verteilung mit den „Ergebnissen“ L_j und den „Eintrittswahrscheinlichkeiten“ $\frac{\lambda_j}{\lambda}$ mit $\lambda = \sum_j \lambda_j$.

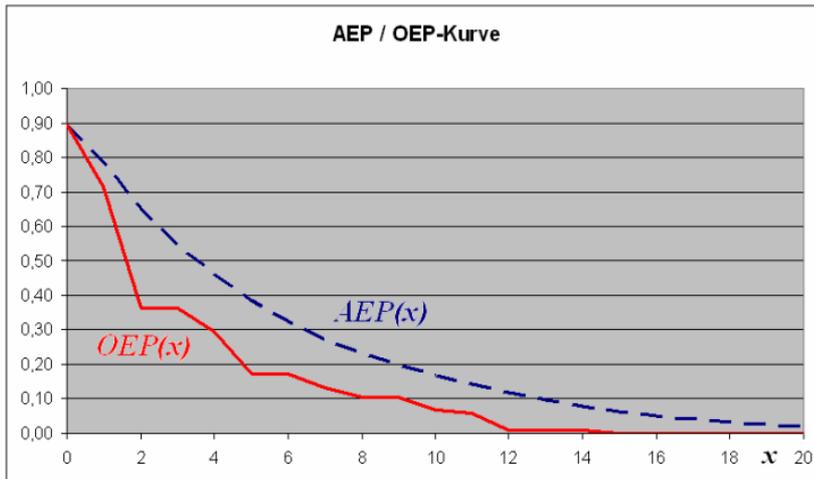
Mathematische Grundlagen: geophysikalische Modelle

Beispiel: Für die Analyse des Sturmrisikos eines Kollektivs liegt folgende Basis-ELT vor (monetäre Einheit: 1 Mio. EUR):

| | | | | | | | | | | | |
|------------------|---|-----|-----|------|------|------|------|------|------|------|-----------|
| Szenario j | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | λ |
| Loss L_j | 1 | 2 | 4 | 5 | 7 | 8 | 10 | 11 | 12 | 15 | |
| Rate λ_j | 1 | 0,8 | 0,1 | 0,16 | 0,05 | 0,03 | 0,04 | 0,01 | 0,05 | 0,01 | 2,25 |

Mathematische Grundlagen: geophysikalische Modelle

Beispiel: Als Lösung erhält man folgende Grafik (linear geglättet):



Es ist anschaulich klar, dass die AEP -Kurve immer oberhalb der OEP -Kurve liegt, weil der Jahressummenschaden S immer mindestens so groß wie der Jahresmaximalschaden M ist. Die AEP -Kurve ist typischerweise auch „glatter“ als die OEP -Kurve.

Mathematische Grundlagen: geophysikalische Modelle

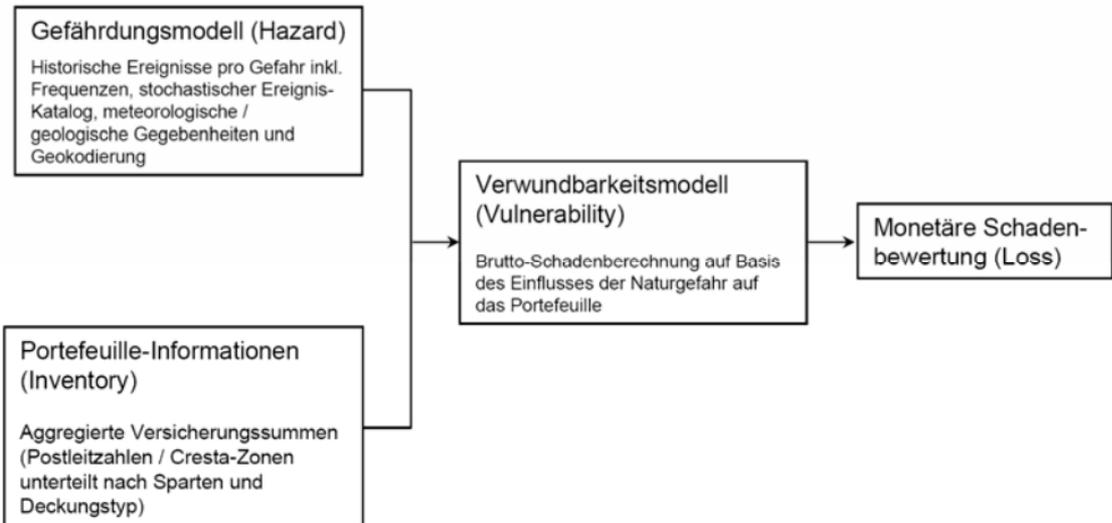
Fortgeschrittene geophysikalische Modelle enthalten neben den deterministischen Schäden L_j auch Angaben zu den Standardabweichungen oder sogar ganze Verteilungsmodelle (sogenannte *Secondary Uncertainties*).

Meist werden auch noch Varianten für die Frequenzverteilungen der Szenarien betrachtet.

Die *AEP*- und *OEP*-Kurven können dann im Allgemeinen nicht mehr explizit berechnet werden; sie werden in diesen Fällen alternativ mit Methoden der Monte-Carlo-Simulation generiert.

Formaler Aufbau geophysikalischer Modelle

Die einzelnen Komponenten eines geophysikalischen Modells folgen grundsätzlich folgendem Aufbau:



Quelle: modifiziert nach Grossi und Kunreuther (2005)

Formaler Aufbau geophysikalischer Modelle

Das **Gefährdungsmodell** enthält neben den historischen und synthetischen Ereignissen (Szenarien) die Schadenfrequenz-Parameter (Rates) λ_j im Poisson-Frequenzmodell oder andere Angaben und Parameter für alternative Frequenzverteilungen.

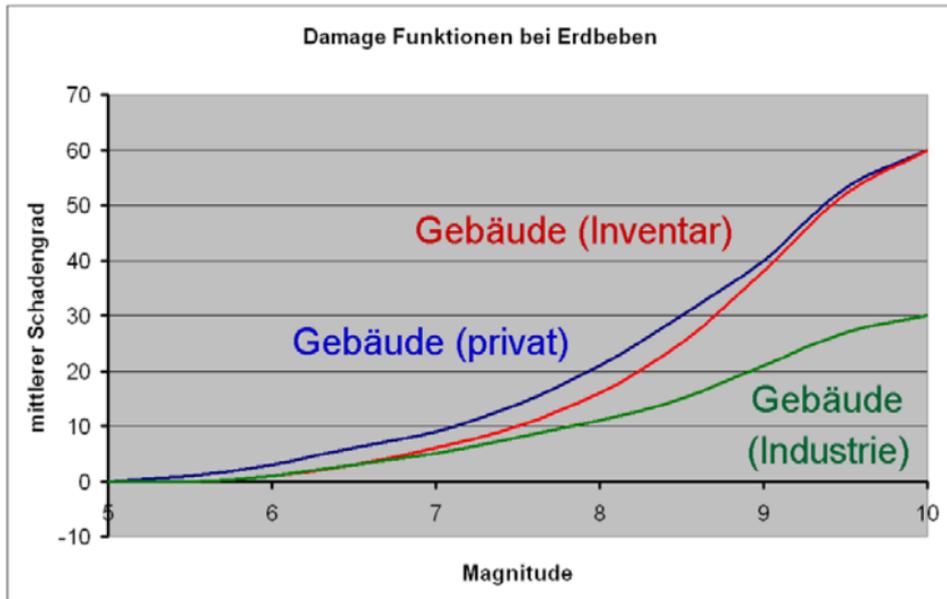
Das **Inventarmodell** gibt u. a. Auskunft darüber, wo sich die versicherten Objekte befinden, welche Art von Versicherung vorliegt und wie groß die betroffenen Versicherungssummen sind.

Formaler Aufbau geophysikalischer Modelle

Das **Verwundbarkeitsmodell** beruht sehr wesentlich auf ingenieurwissenschaftlichen Erkenntnissen darüber, welche Schäden (Art und Höhe) je nach geophysikalischen Gegebenheiten an den versicherten Objekten entstehen können. Die dabei als Funktion von Winddruck, Windstärke, Magnitude (MMI) bei Erdbeben, Überschwemmungshöhe und -dauer usw. verwendeten Kurven zur Darstellung des Grades der Beschädigung heißen *Damage Functions* und bilden vor allem bei den kommerziellen Anbietern geophysikalischer Modelle ein Herzstück ihrer Produkte.

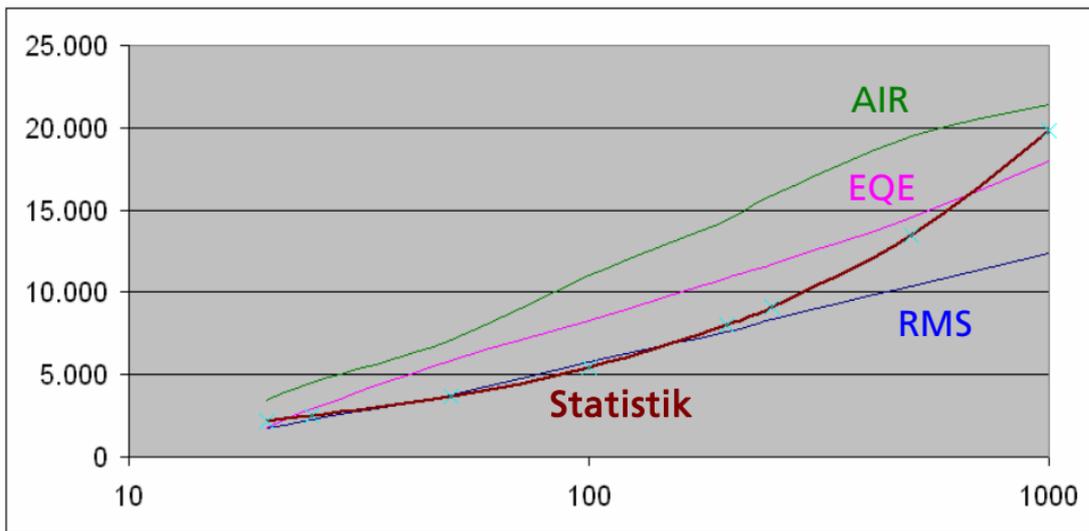
Das **Schadenbewertungsmodell** transferiert schließlich die Beschädigungsgrade in äquivalente Geldgrößen; hierdurch ergeben sich im Prinzip die monetären Schäden L_j (*Losses*).

Formaler Aufbau geophysikalische Modelle



Beispiel einer *Damage Function*

Vergleich kommerzieller Produkte (mit der statistischen Analyse des GDV-Datensatzes)



Value@Risk als Funktion der Wiederkehrperiode $T_\alpha = \frac{1}{\alpha}$; Einheit: 1 Mio €

Quelle: AON Benfield, Hamburg

Literatur:

DONG, W. (2001): *Building a More Profitable Portfolio: Modern Portfolio Theory with Application to Catastrophe Insurance*. Reactions Publishing Group, London.

GROSSI, P. und KUNREUTHER, H. (2005): *Catastrophe Modeling: A new Approach to Managing Risk*. Springer, N.Y.