2. Risikotheorie – wesentliche Grundlage für die Versicherungs- und Finanzmathematik

Mit dem Begriff Risikotheorie assoziiert man denjenigen Teilbereich der angewandten Stochastik, der die wesentliche Grundlage für die Versicherungsmathematik und zum Teil auch die moderne Finanzmathematik bildet. Als historischer Ausgangspunkt der Entwicklung der Risikotheorie wird im Allgemeinen die Dissertation des schwedischen Aktuars Filip Lundberg aus dem Jahr 1903 angesehen. Lundberg behandelte in seinen Arbeiten schon zu einem sehr frühen Zeitpunkt mathematische Methoden (u. a. zu Stochastischen Prozessen, zur Ruintheorie und zur Rückversicherung), die erst sehr viel später in rigoroser Form mathematisch präzisiert werden konnten. Eine Fortsetzung der Entwicklung geschah wesentlich durch den schwedischen Mathematiker und Aktuar Harald Cramér, der neben Beiträgen zur Reinen Mathematik auch großen Anteil an der Entwicklung der mathematischen Wahrscheinlichkeitstheorie hatte.

Als klassische Themenfelder der Risikotheorie, die auch heute noch unverändert aktuell sind, gelten:

- Individuelles und kollektives Risikomodell
- Approximationen der Gesamtschadenverteilung
- Prämienkalkulationsprinzipien
- Credibility-Theorie
- Ruintheorie

Im **individuellen Risikomodell** wird der (üblicherweise auf ein Versicherungsjahr bezogene) Gesamtschaden in einem Versicherungsbestand als die Summe der Schadenhöhen aller *Risiken* des Bestandes definiert. Dabei spielt es keine Rolle, wie im Einzelnen die Schäden je Risiko entstehen. Wichtig ist aber, dass der Bestand möglichst homogen ist, also aus weitestgehend ähnlichen, idealerweise stochastisch unabhängigen und identisch verteilten Risiken besteht. Jedes Risiko wird dabei durch eine geeignete Zufallsvariable modelliert. Weitgehend homogene Bestände findet man beispielsweise bei Todesfallversicherungen für Personen gleichen Alters und gleichen Geschlechts oder in der Kraftfahrt-Haftpflichtversicherung bei Differenzierung nach Regional- und Typklasse, Eintrittsalter, Geschlecht usw.

Das **kollektive Risikomodell** berücksichtigt demgegenüber für den Gesamtschaden die Summe der Schadenhöhen aus allen *Schäden*, unabhängig davon, welches Risiko den jeweiligen Schaden verursacht hat. Das kollektive Risikomodell ist deshalb durch die beiden fundamentalen stochastischen Größen *Schadenfrequenz* und *Einzelschadenhöhe* charakterisiert. Während im individuellen Risikomodell die Gesamtschadenverteilung idealerweise als Faltung einer endlichen Zahl von Risikoverteilungen dargestellt werden kann, ist die Situation im kollektiven Modell komplexer, weil der Gesamtschaden hier eine *zufällige* Summe stochastischer Größen mit nicht a priori beschränkter Summationsanzahl ist. Die sich hier ergebende Gesamtschadenverteilung kann in der Regel nicht mehr geschlossen dargestellt werden; aus diesem Grund bedient man sich meist geeigneter **Approximationsverfahren zur Berechnung der Gesamtschadenverteilung** oder der *Monte-Carlo-Simulation*. Die historisch bedeutsame *Nor-*

mal-Power-Approximation (und deren Varianten), die auf einer näherungsweisen Darstellung der Quantile der Gesamtschadenverteilung auf der Basis von Quantilen der Normalverteilung und höheren Momenten der Gesamtschadenverteilung beruht, ist heute weitestgehend durch rekursive Verfahren vom *Panjer-Typ* oder die *schnelle Fourier-Transformation* (FFT) abgelöst worden. Grundlage für diese Verfahren ist eine geeignete Diskretisierung der Einzelschadenhöhenverteilung in Kombination mit der Reihenentwicklung der *wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion* des Gesamtschadens. Durch den Fortschritt moderner Computer-Algebra-Systeme ist mittlerweise sogar eine abstrakte Reihenentwicklung der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion bis zu einer beliebigen Ordnung möglich, ohne die bei den rekursiven Verfahren nötige Einschränkung auf bestimmte Verteilungsklassen für die Schadenfrequenz oder den unvermeidbaren Abschneidefehler bei der Fouriertransformation im Fall unbeschränkten Schadenfrequenzen in Kauf nehmen zu müssen.

Das kollektive Risikomodell ist auch Grundlage der so genannten *geophysikalischen Modelle*, die in jüngerer Zeit in Form kommerzieller Produkte überwiegend im Naturkatastrophenbereich zur Tarifierung von Rückversicherungsverträgen in der Sachversicherung (hauptsächlich Gebäudeversicherung) eingesetzt werden. Sie basieren auf einer großen Zahl einzelner Szenarien (bis zu 50 000 und mehr), denen historische Datenbanken zu Grunde liegen (beobachtete schwere Stürme, Überschwemmungen, Erdbeben usw.). Durch stochastische Modifikationen der geophysikalischen Parameter wird eine solche Datenbank in eine so genannte *Event Loss Table* transformiert. Jede Zeile, also jedes Szenario einer solchen Tabelle repräsentiert ein eigenes kollektives Risikomodell mit Parametern für die Schadenfrequenz und Schadenhöhe. Diese Parameter werden durch geeignete *Transferfunktionen* (*damage functions*) aus dem zu Grunde liegenden Versicherungs-Portfolio generiert, wobei meist eine räumliche Auflösung auf Postleitzahl-Ebene oder anderen sinnvollen kleinräumigen Zonierungen gewählt wird. Die Transferfunktionen ordnen dabei dem in der gewählten Zone vorherrschenden Gebäudetyp eine virtuelle Schadenverteilung zu, die unmittelbar von den geophysikalischen Parametern abhängt (z. B. Windrichtung und Windgeschwindigkeit). Die Gesamtschadenverteilung ergibt sich hier durch die Summation aller Schäden der individuellen Szenario-basierten kollektiven Teilmodelle. Im Falle von Poisson-verteilten Schadenfrequenzen je Szenario kann auf Grund der strukturellen Eigenschaften der Poisson-Verteilung das zu der Event Loss Table gehörende komplexe Modell vereinfacht werden; die Gesamtschadenverteilung ist dann identisch mit der Gesamtschadenverteilung eines einzigen kollektiven Modells, deren Schadenfrequenzverteilung wieder eine Poisson-Verteilung ist und deren Einzelschadenhöhenverteilung sich als Mischung der Einzelschadenhöhenverteilungen der Szenarien darstellen lässt, wobei die Gewichte proportional zu den individuellen Poisson-Parametern sind.

Die Kenntnis der Verteilung der Risiken bzw. des Gesamtschadens ist eine wesentliche Grundlage für die *Tarifierung*. Nach dem Äquivalenzprinzip der Versicherung ist eine faire Prämie in erster Linie orientiert am *Erwartungswert*, also nach dem Gesetz der großen Zahlen näherungsweise an demjenigen monetären Wert, der sich ergibt, wenn man die auftretenden Schäden gleichmäßig auf ein großes Kollektiv von Versicherten verteilt. Es lässt sich aber mathematisch zeigen, dass eine Tarifierung allein auf Basis des Erwartungswerts ruinös ist, d. h. mit Wahrscheinlichkeit 1 tritt dann im Laufe der Zeit eine Situation ein, in der das Versicherungsunternehmen technisch insolvent wird. Aus diesem Grunde muss auf den Erwartungswert ein geeigneter *Sicherheitszuschlag* erhoben werden. Die mathematische Bestimmung solcher Sicherheitszuschläge kann z. B. mit Hilfe von **Prämienkalkulationsprinzipien** geschehen. Hierunter versteht man Methoden, die im Rahmen einer sinnvollen Axiomatik eine Prämie bestimmen, die nur von der Verteilung des zu Grunde liegenden Risikos abhängt. Zu der üblicherweise verwendeten Axiomatik gehören neben der unverzichtbaren Forderung, dass die Prämie den Erwartungswert nicht unterschreiten soll, als Auswahl etwa die Forderung der *positiven Homogenität* (die Prämie ist invariant gegenüber Skalierungen, d. h. es spielt keine Rolle, in welcher Währung die Prämie berechnet wird), der *Monotonie* (stochastisch größere Risiken erfordern eine höhere Prämie), der *Additivität* (die Prämie für ein Summenrisiko aus stochastisch unabhängigen Einzelrisiken ist die Summe der Einzelprämien) oder der *Maximalschadenbegrenztheit* (die Prämie ist nicht höher als der maximal mögliche Schaden). Entsprechend vielfältig sind die in der Literatur vorgeschlagenen Prämienprinzipien; allerdings ist es praktisch unmöglich, neben dem Erwartungswert – der in dem hier behandelten Sinn selbst auch ein Prämienprinzip ist – ein Prämienprinzip zu finden, das *allen* axiomatisch sinnvollen Forderungen gleichzeitig gerecht wird.

Man kann die bekannten Prämienkalkulationsprinzipien grob in drei Klassen einteilen: zum Ersten in Prinzipien, die einen rein additiven Zuschlag zum Erwartungswert vorsehen (*Varianz- und Semivarianzprinzip, Standardabweichungsprinzip*), zum Zweiten in Prinzipien, die sich durch direkte Rechnung aus nicht-linearen Transformationen der Risiken ergeben (*Mittelwert-Prinzip, Esscher-Prinzip, Karlsruhe-Prinzip*) und schließlich in Prinzipien, die sich nur indirekt durch Lösen einer Gleichung ergeben (*Quantilprinzip, Nullnutzen-Prinzip*). Das letztgenannte Prinzip bestimmt die Prämie so, dass unter einer geeigneten (definitionsgemäß konkaven) Nutzenfunktion der Erwartungswert des Nutzens des Betriebsergebnisses, also der Differenz aus Einnahmen (Prämien) und Ausgaben (Schäden), Null wird.

Viele der genannten Prämienprinzipien sind für die Praxis der Tarifierung allerdings nur von untergeordneter Bedeutung, da es keine natürliche Vorgabe für die Methodenwahl gibt, etwa welche konkrete Nutzenfunktion zu verwenden ist.

Prämienkalkulationsprinzipien weisen eine gewisse Ähnlichkeit zu den heute sehr populären **Risikomaßen** auf, die aktuell für die Berechnung von *Solvenzkapitalien* (Basel II, Solvency II) verwendet werden.

Weitere interessante Fragestellungen im Rahmen der Tarifierung ergeben sich unter dem Aspekt der *Prämiendifferenzierung*. Die hiermit verbundenen mathematischen Probleme werden meist im Rahmen der **Credibility-Theorie** (oder *Erfahrenstarifierung*) behandelt, die mit den *Bayes-Verfahren* der mathematischen Statistik in Zusammenhang steht. Hierbei wird angenommen, dass das gesamte Kollektiv in (gegebenenfalls unendlich viele) homogene Teilkollektive zerfällt, von denen jedes einzelne durch einen so genannten *Strukturparameter* charakterisiert ist. Innerhalb eines solchen Teilkollektivs wird angenommen, dass die zugehörigen Risiken stochastisch unabhängig und identisch verteilt sind. Mathematisch präziser ausgedrückt bedeutet dies, dass die Risiken der Teilkollektive unter einem gegebenen Strukturparameter *bedingt stochastisch unabhängig* und *bedingt identisch verteilt* sind. Insbesondere gehört zu jedem Teilkollektiv eine eigene Prämie, die sich aus der vom Strukturparameter funktional abhängigen Risikoverteilung berechnen lässt. Ferner wird angenommen, dass der

Strukturparameter selbst eine Realisierung einer Zufallsvariablen ist, die der Einfachheit halber selbst auch Strukturparameter genannt wird. In der praktischen Anwendung bedeutet dies, dass die Strukturparameter der Risiken der Teilkollektive unbekannt sind, jedoch durch Beobachtungen des Schadenverlaufs geschätzt werden können. Ziel der Erfahrens-Tarifierung ist es, mit zunehmender Sicherheit, d. h. mit zunehmendem Beobachtungsumfang der im Teilportfolio beobachteten Schäden, den zugehörigen Strukturparameter und damit die zugehörige Prämie immer genauer zu bestimmen. Auf diese Weise wird einem Versicherungsnehmer, der zu Beginn der Versicherung mangels Schadenvorerfahrung die (undifferenzierte) Prämie des Kollektivs zahlt, im Laufe der Zeit die „richtige" Prämie zugeordnet; dies entspricht genau dem Prinzip der *Prämiendifferenzierung*. Angewendet werden solche Methoden vor allem in der Kraftfahrzeug-Haftpflichtversicherung (*Bonus-Malus-Systeme*). Aus mathematischer Sicht ist die exakte Bestimmung der *Credibility-Prämie* recht anspruchsvoll. In gewissen Fällen (bei so genannten *konjugierten Verteilungen* für den Strukturparameter und die Einzelschadenhöhen der zugehörigen Teilkollektive) ergibt sich allerdings eine recht einfache Prämien-Struktur, die sich in einer linearen Gewichtung der Kollektiv-Prämie und des Durchschnitts der Vorschäden ausdrückt. Man kann eine Credibility-Prämie approximativ auch gleich in einer solchen linearen Form ansetzen und dann die Gewichte aus den Vorschäden im Rahmen eines Regressionsansatzes schätzen. Dies ist in der einfachsten Form das so genannte *Bühlmann-Modell*, zu dem es zahlreiche Varianten und Weiterentwicklungen gibt (*Bühlmann-Straub-Modell, Hachemeister-Modell*).

Das letzte der oben aufgeführten klassischen Themengebiete ist die **Ruintheorie**. Sie wird schon in den Arbeiten von Lundberg und Cramér behandelt und befasst sich mit der Berechnung oder Abschätzung der Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Versicherungsunternehmen bei einem konstanten deterministischen Prämienaufkommen pro Zeiteinheit und einer gegebenen anfänglichen Kapitalaustattung im Laufe der Zeit einen technischen Ruin erleidet, d. h. die Summe aller Schadenzahlungen bis zu diesem Zeitpunkt erstmalig die Summe aller Prämieneinnahmen übersteigt. Eine wichtige Größe ist in diesem Zusammenhang der so genannte *Cramér-Lundberg-Anpassungskoeffizient*, der sich implizit aus der momenterzeugenden Funktion der Einzelschadenhöheverteilung ergibt. Damit lässt sich zeigen, dass die Ruinwahrscheinlichkeit – plakativ ausgedrückt – mindestens negativ exponentiell mit der Höhe der Anfangsreserve abnimmt.

Ruintheorie gibt es in vereinfachter Form auch für diskrete Zeit; die anspruchsvollere zeitstetige Theorie baut jedoch auf der Theorie *stochastischer Prozesse* auf. Hier spielen vor allem Poisson- und *zusammengesetzte Poisson-Prozesse* eine wichtige Rolle. Neben der reinen Ruinwahrscheinlichkeit ist auch die Verteilung des Verlustes im Ruinfall von Interesse; diese kann in gewissen Fällen, z. B. bei exponentialverteilten Einzelschadenhöhen, sogar explizit bestimmt werden. Die moderne Ruintheorie verwendet auch tiefer liegende stochastische Konzepte wie die *Martingaltheorie* (eine Theorie, die mit fairen Spielen zusammenhängt) und in jüngerer Zeit auch so genannte *Phasentyp-Verteilungen*, die im Zusammenhang mit *Wartezeitverteilungen* bei *Markoff-Ketten* und *Markoff-Prozessen* auftreten. Ruintheorie wird aktuell auch im Zusammenhang mit finanzmathematischen Fragestellungen (Ausschüttung von Dividenden, Berücksichtigung von Steuern usw.) betrieben.

Weiteren Auftrieb hat die Risikotheorie in neuer Zeit insbesondere durch die Modellierung von *stochastischen Abhängigkeiten* zwischen Risiken erhalten, z. B. durch den Einsatz von *Copulas*. Das sind – anschaulich gesprochen – Verteilungsfunktionen mehrdimensionaler Zufallsvariablen, deren Randverteilungen stetige Gleichverteilungen auf dem Einheitsintervall sind. Nach einem bekannten Satz von Sklar lässt sich nämlich die gemeinsame Verteilungsfunktion einer mehrdimensionalen Zufallsvariablen mit Hilfe einer Copula und den eindimensionalen Randverteilungsfunktionen darstellen. Diese Darstellung ist eindeutig, wenn die gemeinsame Verteilung stetig ist. Der Vorteil dieser Methodik liegt darin, dass z. B. Kumulrisiken, insbesondere bei Naturgefahren, besser erfasst werden können und die Risikoeinschätzung für solche Portfolios dadurch genauer wird.

In der aktuellen Diskussion über neue Standards im Zusammenhang mit der europaweiten Harmonisierung der Versicherungsaufsicht (Solvency II) spielt die Risikotheorie eine gewichtige Rolle bei der Entwicklung so genannter *interner Modelle*, mit deren Hilfe die Gesamtheit aller unternehmerischen Risiken (versicherungstechnische, finanzielle und operationelle) abgebildet werden kann, um auf dieser Basis individuelle Solvenzkapitalanforderungen zu bestimmen.

Literatur (Auswahl)

Asmussen, S.: Ruin Probabilities. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore 2000

Boland, P. J.: Statistical and Probabilistic Methods in Actuarial Science. Chapman & Hall, Boca Raton 2007

Bühlmann, H.: Mathematical Methods in Risk Theory. Springer, Berlin 1970

Bühlmann, H., Gisler, A.: A Course in Credibility Theory and its Applications. Springer, Berlin 2005

Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M., Kaas, R.: Actuarial Theory for Dependent Risks. Wiley, Chichester 2005

De Vylder, F. E.: Advanced Risk Theory. A Self-Contained Introduction. Editions de l'Université de Bruxelles and Swiss Association of Actuaries, 1996

Gerber, H. U.: An Introduction to Mathematical Risk Theory. Richard D. Irwin, Inc., Homewood, Illinois 1979

Grandell, J.: Aspects of Risk Theory. 2nd ed., Springer, Berlin 1992

Grossi, P., Kunreuther, H.: Catastrophe Modeling: A New Approach to Managing Risk. Springer, N.Y. 2005

Heilmann, W.-R.: Grundbegriffe der Risikotheorie. Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe 1987

Hipp, C. H., Michel, R.: Risikotheorie: Stochastische Modelle und statistische Methoden. Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe 1990

Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J., Denuit, M.: Modern Actuarial Risk Theory. Kluwer, Boston 2001

Klugman, S. A., Panjer, H. H., Willmot, G. E.: Loss Models. From Data to Decisions. Wiley, Hoboken 2004

Mack, T.: Schadenversicherungsmathematik, 2. Aufl. Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe 2002

Schmidt, K. D.: Lectures on Risk Theory. Teubner, Stuttgart 1996

Schmidt, K. D.: Versicherungsmathematik. Springer, Berlin 2001

Schröter, K. J.: Verfahren zur Approximation der Gesamtschadenverteilung. Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe 1995

Sundt, B.: An Introduction to Non-Life Insurance Mathematics. Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe 1993

Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V., Teugels, J.: Stochastic Processes for Insurance and Finance. Wiley, Chichester 1999