

# Risikothoretische Konzepte unter Maple und Excel

Christian Hipp und Dietmar Pfeifer  
Universität Karlsruhe und Universität Hamburg

Grundlegende Konzepte der Risikothorie – wie die Gesamtschadenverteilung und Ruinwahrscheinlichkeiten – werden in der Praxis nur selten eingesetzt, obwohl sie doch in der internen Erfolgsrechnung, zum Beispiel bei der Bestimmung interner Solvabilitätskennziffern oder des für ein Portefeuille erforderlichen Eigenkapitals, durchaus ihren Platz haben. Diese Konzepte leiden unter dem Vorurteil, daß sie hohen Programmier- und Rechenaufwand erfordern; und daher werden Untersuchungen, in denen sie vorkommen, häufig an externe Aktuare, an Rückversicherer und Unternehmensberater vergeben. In diesem Artikel wollen wir versuchen, das Vorurteil abzubauen und zu zeigen, daß Gesamtschadenverteilungen ebenso wie Ruinwahrscheinlichkeiten ohne großen Rechenaufwand und mit geringem Programmieraufwand zu berechnen sind. Allerdings gehört zur Bestimmung unternehmerischer Entscheidungskennzahlen weit mehr als die Berechnung einer Summenverteilung, und daher wird sich die Auftragslage bei externen Aktuaren durch unseren Artikel nicht verschlechtern, im Gegenteil: Vielleicht wird das Interesse an risikothoretischen Konzepten verstärkt werden.

Wir benutzen zwei Computerprogramme, das Tabellenkalkulationsprogramm Excel und das Formelmanipulationsprogramm Maple. Unsere Beispiele laufen unter den Versionen Excel 5.0 und 6.0 und unter Maple V, Release 3 und 4, auf PC's mit Windows.

Um den Text angenehmer zu gestalten, haben wir nur die wichtigsten Formeln aufgeführt; alles notwendige ist in einem Formelanhang zu finden.

## 1 Gesamtschadenverteilung unter Excel

Für das Risikomanagement eines Versicherungsportefeuilles benötigt man Information über die Gesamtsumme aller Schadenzahlungen für Schäden aus einer zukünftigen Zeitperiode. Dieser Gesamtschaden ist aus heutiger Sicht unbekannt, er wird von vielerlei nicht vorhersehbaren Ereignissen und Faktoren beeinflußt und daher als Zufallsvariable modelliert. Dies bedeutet, daß man unter einem geeigneten Modell <sup>1</sup> eine Verteilung berechnet, welche das zufällige Verhalten des Gesamtschadens beschreibt. Die einfachsten Modelle für diesen Zweck sind Normalverteilungen und Normal-Power-Approximationen, bei denen eine Gesamtschadenverteilung aus dem Mittelwert, der Varianz und der Schiefe des Gesamtschadens berechnet wird. Wesentlich näher an der Realität sind Gesamtschaden-

---

<sup>1</sup>Albert Einstein soll gesagt haben: "Ein Modell sollte so einfach wie möglich sein, aber nicht zu einfach".

verteilungen, die im kollektiven Modell von Lundberg (1903) oder im individuellen Modell berechnet werden.

Im kollektiven Modell werden die Schadenanzahl und die einzelnen Schadenhöhen getrennt modelliert, und unter vereinfachenden Annahmen (Unabhängigkeit, Gleichartigkeit der Schadenhöhen) entsteht als Gesamtschadenverteilung eine Summenverteilung der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} R\{n\}Q^{*n}.$$

Es ist überraschend, daß bei einer derart einfachen Modellierung Verteilungen entstehen, für die es – in den meisten Fällen – keine geschlossenen analytischen Formeln gibt und deren numerische Berechnung wegen der auftretenden Faltungen sehr rechenaufwendig aussieht. Sonderfälle, in denen analytische Formeln möglich sind, werden im nächsten Abschnitt behandelt. Hier soll gezeigt werden, wie ein effizientes Berechnungsverfahren von Panjer (1982) in Excel implementiert werden kann. Dieses Rekursionsverfahren ist anwendbar für drei Klassen von Schadenanzahlverteilungen: Poissonverteilungen, Binomialverteilungen und negative Binomialverteilungen. Wir wollen hier den Fall ganzzahliger Schadenhöhen betrachten, der z.B. durch Rundung der Schadenzahlungen auf volle DM entsteht. Die Formel für die Berechnung der Punktwahrscheinlichkeiten von  $P$  hat dann die Form

$$P\{k+1\} = \sum_{i=1}^{k+1} \left( a + \frac{bi}{k+1} \right) Q\{i\}P\{k+1-i\}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Die Struktur dieser Formel paßt gut zum Excel-Befehl `summenprodukt`, bei dem die Einträge mehrerer Vektoren miteinander multipliziert und die entstehenden Produkte aufaddiert werden. Allerdings muß man zusätzliche Überlegungen anstellen, da Excel die in der Funktion `summenprodukt` eingetragenen Vektoren nur in ihrer natürlichen Indizierung liest; gibt man beispielsweise den Befehl

```
summenprodukt(A1 : A10; A10 : A1)
```

ein, so erscheint als Formel der Ausdruck

```
summenprodukt(A1 : A10; A1 : A10)
```

und als Wert die Zahl  $A1^2 + \dots + A10^2$ . Das im folgende beschriebene Spreadsheet berechnet die Punktwahrscheinlichkeiten  $P\{k\}$  der Gesamtschadenverteilung für  $k = 0, \dots, 300$ . Dabei wird jeweils nur der Inhalt der ersten beiden Zeilen angegeben, die Formeln für die Zeilen 3 bis 301 entstehen automatisch angepaßt durch Kopieren. Die Ausdrücke `ParA`, `ParB` und `ParR0` sind Namen für Parameterfelder, die (eventuell auf einer neuen Tabelle) festgelegt und mit numerischen Werten belegt werden müssen. In Spalte A lassen wir einen Index von 0 bis 300 laufen. In Spalte B tragen wir die Punktwahrscheinlichkeiten von  $Q$  ein, wobei wir mit Nullen auffüllen. Spalte C enthält dieselben Werte, aber in umgekehrter Reihenfolge: C1 wird durch die Formel

```
index(B$1 : B$301; 301 - A2)
```

festgelegt, die restlichen Felder der Spalte werden mit dem Kopierbefehl gefüllt. Die Spalte D wird mit den Punktwahrscheinlichkeiten von  $P$  gefüllt, und zwar D1 mit `ParR0`, das Feld D2 mit

```
summenprodukt(D$1 : D1;
               -A$1 : A1 * ParB/A2 + ParA + ParB;
Bereich.Verschieben(C$1 : C1; 301 - A2; 0)),
```

und D3 bis D301 werden wiederum durch Kopieren gefüllt. In unserer Abbildung 1.1 sind die mit diesem Algorithmus berechneten Punktwahrscheinlichkeiten der Summenverteilung mit Poissonscher Schadenszahl  $R = Poi(16)$  und diskreter Schadenhöhenverteilung  $Q\{2\} = Q\{9\} = 1/2$  wiedergegeben.

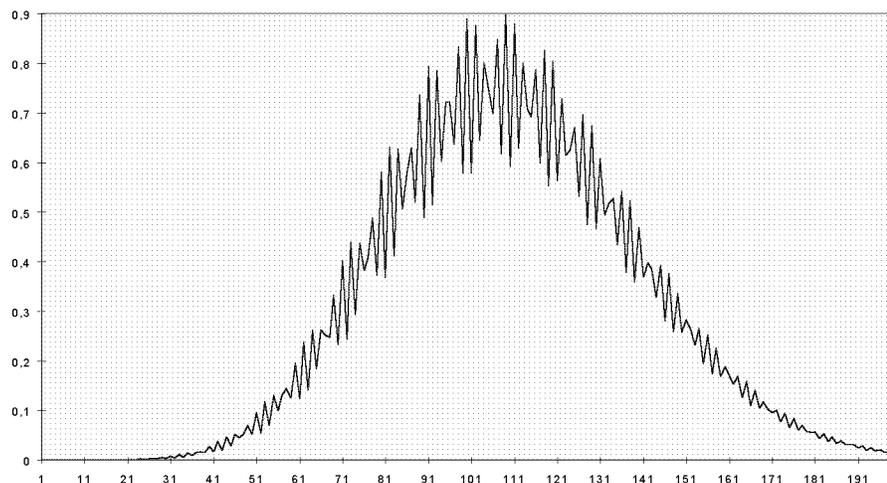


Abb. 1.1

In der folgenden Abbildung 1.2 wird die Summenverteilung mit  $R = Poi(4)$  und  $Q\{i\} = c/i, i = 1, \dots, 32$  mit  $1/c = \sum_{i=1}^{32} 1/i$  dargestellt.

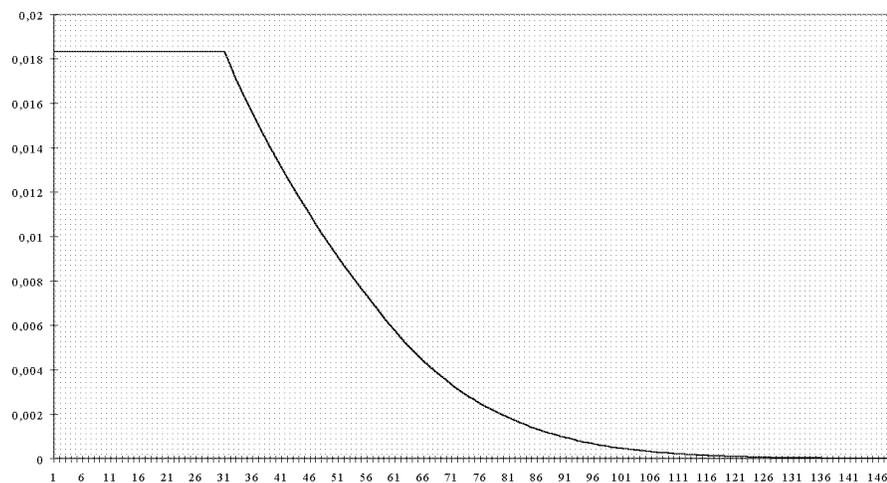


Abb. 1.2

Im ersten Beispiel entsteht eine Verteilung, die einer Normalverteilung ähnelt, im zweiten Fall eine ungewöhnlich schiefe, nicht normale Verteilung. Diese unterschiedlichen Ergebnisse zeigen die große Anwendungsbreite der oben angegebenen Summenverteilungen; die auf diese Weise modellierten Gesamtschadenverteilungen  $P$  haben oft eine völlig unerwartete Form. Daher ist die Möglichkeit, solche Verteilungen mit einem Standard-Tool zu berechnen, von großer Bedeutung.

## 2 Gesamtschadenverteilungen unter Maple

Computeralgebrasysteme [Formelmanipulationsprogramme] haben in den letzten Jahren eine stürmische Entwicklung erfahren und sind für wirtschaftsmathematische Anwendungen gut geeignet; eine Reihe von Anwendungsbeispielen mit Maple, Mathematica, Mathcad und Derive [neben Excel] findet man z.B. in Benker (1997). Für das Problem der Berechnung der Gesamtschadenverteilung [Summenverteilung] bieten sich hier neben der schon behandelten Panjer-Rekursion vor allem eine 'exakte' Berechnung z.B. über die erzeugende Funktion oder eine Anwendung der schnellen Fourier-Transformation an; versicherungsmathematische Grundlagen dieser Methoden findet man z.B. in Heilmann (1987) oder Feilmeier und Bertram (1987).

Im folgenden wollen wir wie oben den Fall betrachten, daß die Schadenzahl mit einem Parameter  $\lambda > 0$  Poisson-verteilt ist und die Schadenhöhen sich auf positive ganzzahlige Werte konzentrieren. Um den Formalismus überschaubar zu halten, wollen wir der Einfachheit halber in dem hier betrachteten Anwendungsbeispiel annehmen, daß der Träger der Schadenhöhen aus maximal fünf Werten  $a, b, c, d, e$  besteht; es kann aber grundsätzlich mit jeder beliebigen Zahl von Trägerpunkten  $a_1, a_2, \dots, a_n$  gearbeitet werden.

Die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion  $\psi$  des Gesamtschadens hat in diesem allgemeinen Fall die Form

$$\psi(t) = \exp \left\{ \lambda \left( \sum_{j=1}^n p_j t^{a_j} - 1 \right) \right\}, \quad t \geq 0,$$

wobei jetzt  $p_j$  die Wahrscheinlichkeit des Auftretens eines Einzelschadens der Höhe  $a_j$  bezeichnet; Es ist also in obiger Notation gerade  $p_j = Q\{a_j\}$ .

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Gesamtschadens ist nach obigem durch die Koeffizienten der Taylorreihe von  $\psi$  um den Nullpunkt gegeben; der wesentliche Befehl in Maple zur Entwicklung von  $\psi$  in ein entsprechendes Taylor-Polynom vom Grad  $L$  ist für unser Beispiel gegeben durch

```
poly:=taylor(exp(lambda*(p1*t^a+p2*t^b+p3*t^c+p4*t^d+p5*t^e-1)),t=0,L+1):
```

Um einen sinnvollen Bereich für die numerischen Werte dieser Verteilung zu erhalten, legen wir vorher den Polynomgrad folgendermaßen fest:

```
L:=trunc((lambda+sqrt(lambda))*max(a,b,c,d,e));
```

$L$  liegt damit größenordnungsmäßig im Bereich

(Erwartungswert der Schadenzahl + Standardabweichung)  $\times$  größter Einzelschaden.

Die errechneten Einzelwahrscheinlichkeiten lassen sich dann folgendermaßen tabellarisch in Dezimalschreibweise darstellen:

```
probab:=[seq(evalf(coeff(poly,t,1)),1=0..L)];
```

Diese drei Befehle genügen im Prinzip, die gewünschten Berechnungen vollständig durchzuführen. Das im Anhang wiedergegebene Worksheet enthält darüberhinaus noch einige Befehle zur graphischen Ausgabe der Ergebnisse, die wir hier nicht gesondert kommentieren. Die folgenden drei Graphiken zeigen das Ergebnis für das obige Beispiel mit  $R = Poi(16)$  und  $Q\{2\} = Q\{9\} = 1/2$  [d.h.  $a = 2, b = 9, c, d, e$  beliebig und  $p_1 = p_2 = 1/2$ ] sowie

$R = 10$  und verschiedene Werte für  $a, b, c, d, e$  und  $p_1, \dots, p_5$ . Man beachte auch hier die unterschiedlichen Formen der Gesamtschadenverteilung, insbesondere in den letzten beiden Graphiken, die sich nur durch die Änderung eines einzigen Trägerpunktes [von  $b = 6$  auf  $b = 2$ ] unterscheiden.

Der Polynomgrad beträgt im ersten Fall  $L = 180$ , in den beiden anderen  $L = 236$ ; die Rechenzeit auf einem Notebook PC mit einem Pentium-Prozessor mit 100 MHz Taktfrequenz unter Windows 95 betrug im ersten Fall 6.3 sec, im zweiten jeweils 11.5 sec.

**Gesamtschaden: lambda=16, Träger= [2,9,0,0,0], p=[.5 .5 0 0 0]**

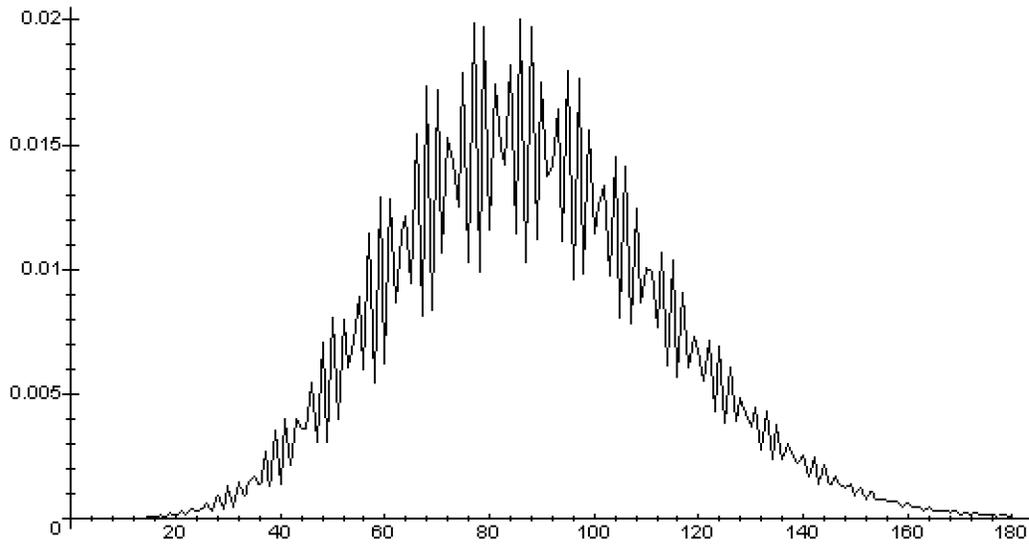


Abb. 2.1

**Gesamtschaden: lambda=10, Träger= [1,6,12,13,18], p=[.1 .35 .5e-1 .2 .30]**

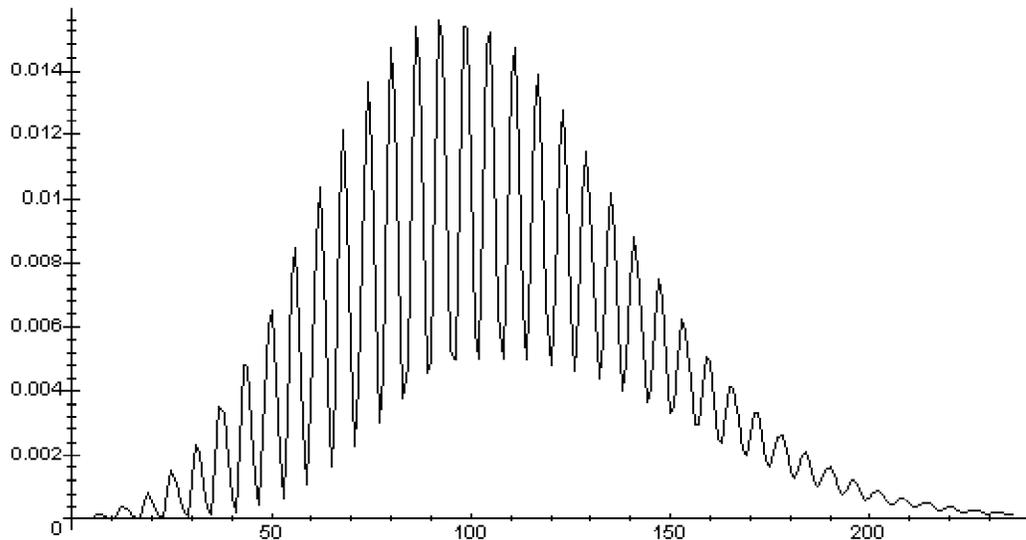


Abb. 2.2

Gesamtschaden:  $\lambda=10$ , Träger= [1,2,12,13,18],  $p=[.1 \ .35 \ .5e-1 \ .2 \ .30]$

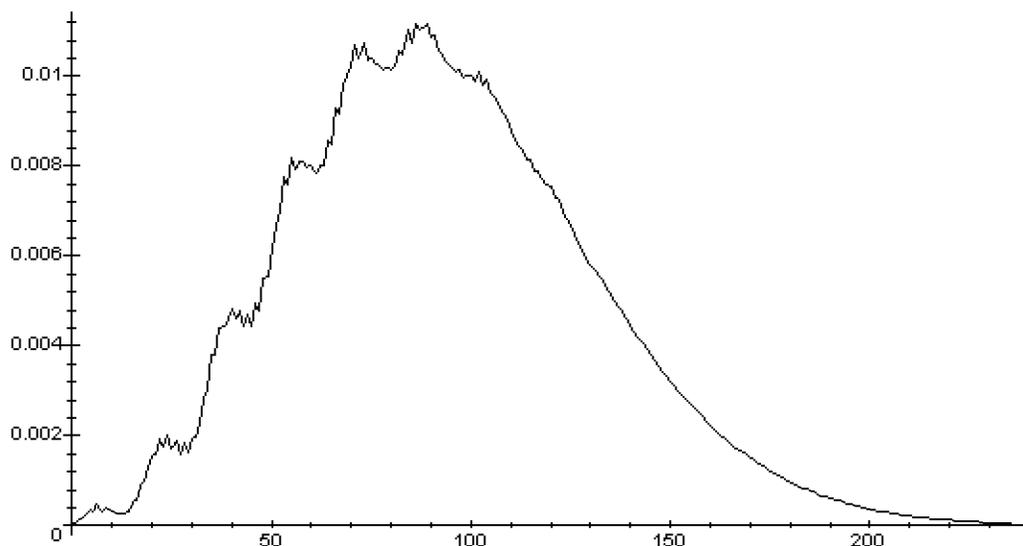


Abb. 2.3

Mit Hilfe des ebenfalls im Anhang wiedergegebenen, etwas aufwendigeren Worksheets zur Fast-Fourier-Transformation lassen sich einjährige Gesamtschadenverteilungen für Risiko-Todesfallversicherungen berechnen; als Eingabeparameter werden hier eine Sterbetafel sowie die Policendaten der Versicherten [Alter, Versicherungssumme] benötigt. Das Worksheet berechnet die Gesamtschadenverteilung 'exakt' einmal nach der schon besprochenen Methode der erzeugenden Funktion, zum anderen mit der Fast-Fourier-Methode [dazu gibt es automatisierte Befehle unter Maple] sowie aproximativ nach der Panjer-Methode, wobei die binomialverteilten Zufallsgrößen  $X_i$  mit den Werten 0 und 1 für 'Überlebensfall' und 'Todesfall' für die Versicherten  $i$  jeweils durch eine Poissonverteilte Zufallsgröße  $Y_i$  mit demselben Erwartungswert  $\lambda_i = E(X_i)$  aproximiert werden. Wegen der i.a. geringen einjährigen Sterbewahrscheinlichkeit ist dieses Vorgehen durch den Poisson'schen Grenzwertsatz ['Gesetz der seltenen Ereignisse'] gerechtfertigt. Die Einzelschadenhöhen werden dabei wie üblich über Vielfache des größten gemeinsamen Teilers diskretisiert.

Die folgende Graphik zeigt das Ergebnis einer Rechnung für ein Kollektiv von 50 Versicherten mit Altern zwischen 20 und 60 Jahren sowie unterschiedlichen Versicherungssummen zwischen DM 5000,- und DM 410000,- [ggT = DM 5000,-], dargestellt in logarithmischem Maßstab. Das zur erzeugenden Funktion gehörige Polynom ist hier vom Grad 631!

**Einjährige Gesamtschadenverteilung, exakt: ---, FFT: o, Panjer: +, 50 Fälle**

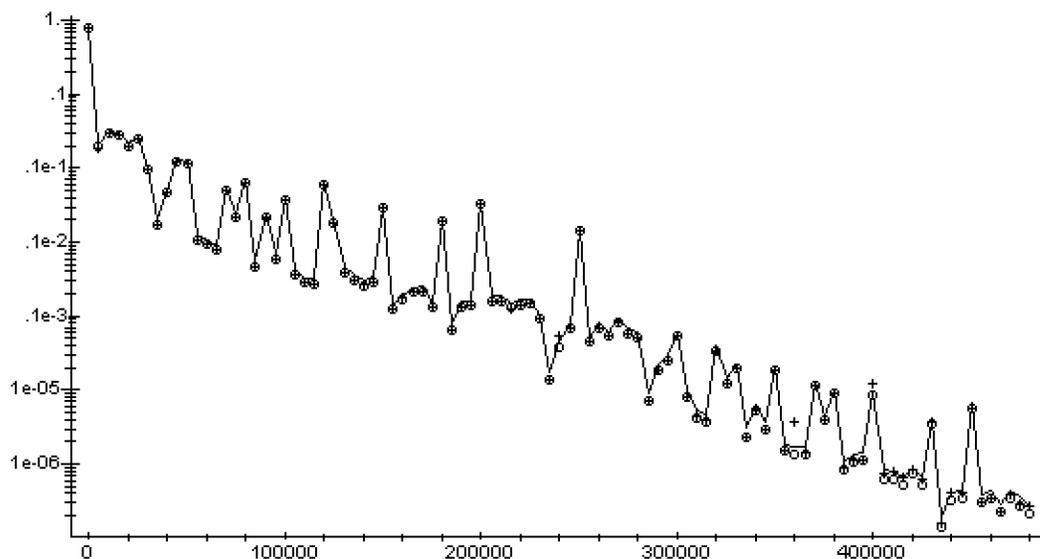


Abb. 2.4

Man beachte, daß sich die numerischen Werte nach der (hier deutlich schnelleren) Methode der erzeugenden Funktion und der (hier langsameren) Fast-Fourier-Transformation praktisch nicht unterscheiden, und die Panjer-Poisson-Approximation im Vergleich dazu lediglich geringfügige Fehler von unter  $10^{-5}$  für die Einzelwahrscheinlichkeiten aufweist.

Eine vollständige Programmsammlung zur Versicherungsmathematik mit Maple sowie Beispieldateien sind in Pfeifer (1997) enthalten und können vom Autor direkt bezogen werden.

### 3 Ruinwahrscheinlichkeiten unter Maple

Wir betrachten die Ruinwahrscheinlichkeit  $\psi(s)$  im klassischen Risikoprozeß (also mit unendlichem Planungshorizont und ohne Zinsen), die vom Startkapital  $s$ , der Schadenhöhenverteilung  $Q$ , der Prämienrate  $c$  und der Poisson-Intensität  $\lambda$  abhängt. Für exponentialverteilte Schadenhöhen mit Mittelwert  $\mu$ , also für  $Q = \text{Exp}(1/\mu)$ , kann man  $\psi(s)$  explizit darstellen:

$$\psi(s) = \frac{\lambda\mu}{c} \exp\left(-\frac{s}{\mu} \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right)\right).$$

Es gibt eine große Klasse von Verteilungen, für die man eine explizite Darstellung für  $\psi(s)$  mit Maple erhalten kann: die sogenannte Klasse der Phasentyp-Verteilungen. Sie sind von Neuts (1975) entdeckt worden, und Asmussen und Rolski (1992) haben sie in der Ruintheorie eingesetzt. Diese Klasse umfaßt alle Exponentialverteilungen, alle Faltungen von Exponentialverteilungen und alle endlichen Mischungen von Exponentialverteilungen. Die Klasse ist abgeschlossen unter Faltungen und unter endlichen Mischungen, und sie liegt dicht in der Menge aller möglichen Schadenhöhenverteilungen bezüglich der Verteilungskonvergenz. Mit dieser Menge von Schadenhöhenverteilungen hat man also eine große Modellierungsvielfalt.

Phasentyp-Verteilungen (der Stufe  $I$ ) entstehen bei Markov-Ketten  $X(t)$ ,  $t \geq 0$ , auf dem Zustandsraum  $\{0, 1, \dots, I\}$ , bei denen der Zustand 0 absorbierend ist. Solche Markov-Ketten werden charakterisiert durch einen Startvektor  $p$  und eine Intensitätsmatrix  $B$ :

$$\begin{aligned} P\{X(0) = i\} &= p_i, \quad i = 1, \dots, I, \\ P\{X(t+h) = j | X(t) = i\} &= b_{ij}h + o(h), \quad i, j = 1, \dots, I, \quad i \neq j, \\ P\{X(t+h) = i | X(t) = i\} &= 1 - b_{ii}h + o(h), \quad i = 1, \dots, I. \end{aligned}$$

Die Phasentyp-Verteilung mit den Parametern  $p$  und  $B$  ist die Verteilung der Wartezeit  $T$  bis zur Absorption in der zugehörigen Markov-Kette:

$$T = \inf\{t : X(t) = 0\}.$$

Bei  $I = 2$  und

$$B = \begin{pmatrix} -a & a \\ 0 & -b \end{pmatrix}$$

erhält man für  $p = (0, 1)$  die Exponentialverteilung  $Exp(b)$ , und für  $p = (1, 0)$  entsteht die Faltung von  $Exp(a)$  und  $Exp(b)$ . Die Verteilung  $Q$  mit  $p, B$  hat Tailwahrscheinlichkeiten

$$Q(t, \infty) = p' \exp(tB)e,$$

wobei  $e$  der Vektor ist, dessen Komponenten alle 1 sind. Phasentyp-Verteilungen haben eine rationale Laplace-Transformierte, und daher kann die Gammaverteilung mit Parametern  $1/2, 1/2$  nicht phasentyp sein.

Ist  $Q$  die Phasentyp-Verteilung mit Parametern  $p, B$ , dann ist  $\psi(s)$  Tailwahrscheinlichkeit einer Phasentyp-Verteilung:

$$\psi(s) = \frac{\lambda\mu}{c} p'_* \exp(tB_*)e,$$

wobei

$$p_* = -\frac{1}{\mu} (B')^{-1} p \quad \text{und} \quad (B_*)_{ij} = b_{ij} + \frac{\lambda\mu}{c} p_j b_{i0}, \quad i, j = 1, \dots, I.$$

Diese Formel kann man nun sehr einfach mit Maple berechnen: im Modul `linalg` sind nämlich Exponentiale von Matrizen implementiert. Die Zeilen

```
with(linalg):
B:=matrix(2,2,[-a,a,0,-b]);
C:=exponential(B,t);
```

erzeugen beispielsweise das Ergebnis

$$C := \begin{bmatrix} e^{-at} & \frac{a}{a-b} (e^{-at} - e^{-bt}) \\ 0 & e^{-bt} \end{bmatrix}.$$

Die nächste Grafik zeigt die Ableitung  $-\psi'(s)$  der Überlebenswahrscheinlichkeit  $1 - \psi(s)$  für die Schadenhöhenverteilung, die die Mischung zweier Gammaverteilungen ist:

$$Q = 0.5 \text{ Gamma}(2; 2) + 0.5 \text{ Gamma}(2; 0.01),$$

bei vorgegebenem  $\psi(0) = 2/3$ . Man sieht, daß eine Erhöhung des Eigenkapitals bis auf etwa 60 Einheiten mehr Sinn macht als eine noch weitergehende Erhöhung.

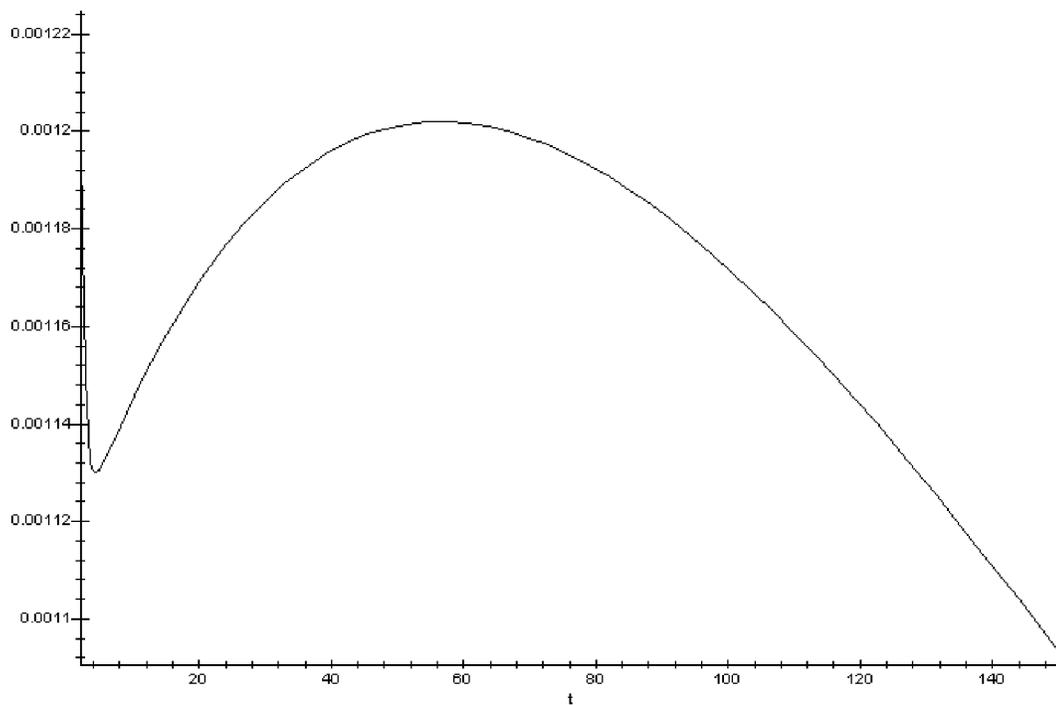


Abb. 3.1

## 4 Anhang

### Die Gesamtschadenverteilung (Summenverteilung)

Die Summenverteilung, welche im ersten Abschnitt erwähnt wurde, entsteht folgendermaßen: Der Gesamtschaden eines Portefeuilles wird modelliert durch die Schadenanzahl  $N$  und die einzelnen Schadenhöhen  $X_1, X_2, \dots$ :  $S = X_1 + \dots + X_N$ . Unter der Annahme, daß die Schadenanzahl und die Schadenhöhen stochastisch unabhängig sind mit  $R$  als Schadenanzahlverteilung und  $Q$  als Schadenhöhenverteilung, entsteht die Verteilung

$$\sum_{n=0}^{\infty} R\{n\}Q^{*n}$$

für den Gesamtschaden  $S$ .  $Q^{*n}$  ist die  $n$ -fache Faltung, und  $Q^{*0}$  ist die in Null konzentrierte Verteilung, wobei  $Q^{*0}\{0\} = 1$ .

### MAPLE-Worksheet zur Gesamtschadenverteilung

Mit diesem Worksheet kann die Gesamtschadenverteilung im kollektiven Modell berechnet und graphisch dargestellt werden, wobei als Schadenanzahlverteilung eine Poisson-Verteilung mit Parameter  $\lambda > 0$  und als Schadenhöhenverteilung eine auf maximal fünf vorgebbare Punkte konzentrierte Verteilung betrachtet werden. Die exakte Berechnung der Gesamtschadenwahrscheinlichkeiten erfolgt über die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion.

```
>restart: E:=exp(1):
```

```
>with(plots):
```

Eingabe von lambda (Poisson-Parameter):

```
>lambda:=10;
```

Eingabe der Trägerpunkte a,b,c,d,e>0:

```
>a:=1; b:=6; c:=12; d:=13; e:=18;
```

Eingabe der Wahrscheinlichkeiten p1,p2,p3,p4 für a,b,c,d:

```
>p1:=0,1; p2:=0.35; p3:=0.05; p4:=0.2; p5:=1-p1-p2-p3-p4;
```

Berechnung der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion:

```
>L:=trunc((lambda+sqrt(lambda))*max(a,b,c,d,e));
```

```

>poly:=taylor(exp(lambda*(p1*t^a+p2*t^b+p3*t^c +p4*t^d+p5*t^e-1)),t=0,L+1):
>probab:=[seq(evalf(coeff(poly,t,l)),l=0..L)];
Graphische Darstellung:
>Index:=[seq(r,r=0..L)]:
>Graph:=zip((u,v)->[u,v],Index,probab):
>plot(Graph,style=LINE,title=cat('Gesamtsschaden: lambda=',lambda,' ,Träger=
[' ,a',' ,b',' ,c',' ,d',' ,e',' ], p=[',convert(p1,string),' ',convert(p2,string),' ',
convert(p3,string),' ',convert(p4,string),' ',convert(p5,string),' '));

```

## MAPLE-Worksheet zur Fast-Fourier-Transformation

Mit diesem Worksheet können einjährige Schadenssummenverteilungen aus Lebensversicherungsportefolles exakt, mit der Poisson-Panjer-Approximation und der FFT-Methode approximativ berechnet und graphisch dargestellt werden. Als Eingabedateien werden eine aktuelle Sterbetafel [einspaltig, ASCII-Format] sowie eine Datei mit den Angaben: Eintrittsalter  $x$  und Versicherungssumme  $VS$  [in ganzen Zahlen; zweispaltig, ASCII-Format] benötigt.

```
>restart: E:=exp(1):
```

File mit aktueller Sterbetafel:

```
>file:='astm91.int';
```

File mit Versicherten-Daten:

```
>file2:='daten2.pan';
```

Laden verschiedener MAPLE-Sub-Pakete (Lineare Algebra, Zeichnen):

```
>with(linalg):
```

```
>with(plots):
```

Einlesen der Daten (Sterblichkeitsintensitäten  $\mu$ ):

```
>readlib(readdata):
```

```
>readlib(FFT):
```

```
>mu:=readdata(file):
```

```
>omega:=vectdim(mu)-1;
```

```
[Endalter]
```

Einlesen der Versicherten-Daten:  $x, VS$ :

```
>Daten:=readdata(file2,integer,2):
```

```
>Anzahl:=vectdim(Daten);
```

```
[Anzahl der Fälle]
```

```
>Daten:=array(Daten);
```

```
>Alter:=seq(Daten[j,1],j=1..Anzahl):
```

```
[Eintrittsalter]
```

```
>VS:=seq(Daten[j,2],j=1..Anzahl):
```

```
[Versicherungssummen]
```

```
>Delta:=igcd(VS);
```

```
[Schrittweite]
```

```
>m:=[seq(VS[r]/Delta,r=1..Anzahl)]:
```

```
>s:=sum(m[i],i=1..Anzahl):
```

Exakte Berechnung der Wahrscheinlichkeiten mit der erzeugenden Funktion:

```
>erzpoly:=expand(product((1+mu[Alter[i]+1]*(t^m[i]-1)),i=1..Anzahl)):
```

```
>probab:=[seq(coeff(erzpoly,t,l),l=0..s)]:
```

```
>A:=0:
```

```
>while(probab[A+1]>0.0000001 or probab[A+1]=0) do A:=eval(A)+1: prob[A]:=probab[A]: od:
```

```
>pr:=[seq(prob[i],i=1..A)]:
```

```
[Anfängliche exakte Wahrscheinlichkeiten oberhalb 0.0000001]
```

```

Poisson-Approximation:
>lambda:=sum(mu[Alter[u]],u=1..Anzahl):
>ps[0]:=evalf(E^(-lambda)):
>for k from 1 to A do p[k]:=0: od:
>for k from 1 to Anzahl do p[m[k]]:=p[m[k]]+mu[Alter[k]]: od:

Panjer-Rekursion:
>for k from 0 to A-1 do ps[k+1]:=1/(k+1)*sum((k+1-v)*p[k+1-v]*ps[v], v=0..k) od:
>Index:=[seq(z*Delta,z=0..A-1)]:
>exakt=pr;
>Approx:=[seq(ps[k],k=0..A-1)];

FFT-Approximation:
>L:=trunc(evalf(log[2](A)))+1;
>M:=2^L;
>z:=convert([seq(1,r=1..M)],array):
>for i from 1 to Anzahl do x:=convert([seq(0,r=1..M)],array):
  x[1]:=1-mu[Alter[i]]: x[m[i]+1]:=mu[Alter[i]]: y:=convert([seq(0,r=1..M)],array):
  FFT(L,x,y): for j from 1 to M do z[j]:=(x[j]+y[j]*I)*z[j]:od: od: for j from 1 to M do
  x[j]:=Re(z[j]): y[j]:=Im(z[j]): od:
>iFFT(L,x,y):
>exakt:=pr;
>Approx:=[seq(ps[k],k=0..A-1)];
>FFT:=[seq(x[k],k=1..A)];

Graphische Darstellung: exakt = —, FFT = o, Panjer = +:
[Aus Gründen der Darstellbarkeit im logarithmischen Maßstab werden die Wahrscheinlichkeiten mit Wert
0 auf den Wert 10-8 abgebildet]
>Index:=[seq(Delta*k,k=0..A-1)]:
>Graph:=zip((u,v)->[u,max(v-10-8,10-8)],Index,FFT):
>Graph2:=zip((u,v)->[u,max(v-10-8,10-8)],Index,exakt):
>Graph3:=zip((u,v)->[u,max(v-10-8,10-8)],Index,Approx):
>pic1:=logplot(Graph,style=point,symbol=CIRCLE, title=cat('Einjährige
Gesamtschadenverteilung, exakt: ---, FFT: o, Panjer: +, ',Anzahl,' Fälle'),color=navy):
pic2:=logplot(Graph2,style=PATCH,color=red):
pic3:=logplot(Graph3,style=point,symbol=CROSS,color=violet):
display([pic1,pic2,pic3]);

```

## MAPLE-Worksheet zur Phasentyp-Verteilung

Das Maple-Programm, welches Abb. 3.1 produziert, hat folgende Form:

```

>restart:
>with(linalg):
>B:=matrix(4,4,[-2,2,0,0,0,-2,0,0,0,0,-0.01,0.01,0,0,0,-0.01]);
>pi:=vector(4,[1/2,0,1/2,0]);e:=vector(4,[1,1,1,1]);
>pist:=evalm(inverse(transpose(B))*pi);
>mean:=evalm(transpose(pist)*e);
>pist1:=evalm(pist/mean);
>Lambda:=vector(4,[0,2.,0,0.01]);
>p:=2/3;
>C:=evalm(Lambda*transpose(pist1));
>Bst:=evalm(B+p*C);
>g1:=p*(evalm(transpose(pist1)*exponential(Bst,t)*e));
>g2:=-diff(g1,t);
>plot(g2,t=2..150);

```

## 5 Literatur

- Asmussen, S. und Rolski, T. (1992)** Computational methods in risk theory: a matrix–algorithmic approach. *Insurance: Mathematics and Economics* 10(4), 259 – 274.
- Benker, H. (1997)** Wirtschaftsmathematik mit dem Computer. Eine praktische Einführung in das Arbeiten mit Computeralgebra-, Mathematik- und Tabellenkalkulationsprogrammen. Vieweg Verlag, Braunschweig.
- Feilmeier, M. und Bertram, J. (1987)** Anwendung numerischer Methoden in der Risikothorie. Schriftenreihe Angewandte Versicherungsmathematik, Heft 16. VVW Karlsruhe.
- Heilmann, W.–R. (1987)** Grundbegriffe der Risikothorie. VVW Karlsruhe.
- Lundberg, F. (1903)** I. Approximerad Framställning av Sannolikhetsfunktioner. II. Aterförsäkring av Kollektivrisker. Almqvist & Wiksell, Uppsala.
- Neuts, M.F. (1975)** Probability distributions of phase–type. In: *Liber Amicorum Prof. Emeritus H. Florin*, Department of Mathematics, University of Louvain, Belgium, 173 – 206.
- Panjer, H.H. (1982)** Recursive evaluation of a family of compound distributions. *Astin Bulletin* 12, 22 – 26.
- Pfeifer, D. (1997)** VMath: Software zur Vorlesung Versicherungsmathematik. Institut für Mathematische Stochastik, Universität Hamburg.