

Berufsbegleitender Masterstudiengang

Risikomanagement für Finanzdienstleister (M.Sc.)



Prof. Dr. Dietmar Pfeifer

Spezielle Themen des Risikomanagements

Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, 2019

Impressum

Autor: Prof. Dr. Dietmar Pfeifer

Herausgeber: Carl von Ossietzky Universität Oldenburg - Center für lebenslanges Lernen C3L

Auflage: Erste Auflage 2016

Layout: Andreas Altvater, Franziska Vondrlík

Copyright: Vervielfachung oder Nachdruck auch auszugsweise zum Zwecke einer Veröffentlichung durch Dritte nur mit Zustimmung der Herausgeber, 2019

Oldenburg, April 2019

Prof. Dr. Dietmar Pfeifer



Akademischer Werdegang

- 1971-1977 Diplom-Studium der Mathematik mit Nebenfach Wirtschaftswissenschaften an der RWTH Aachen
- 1977-1986 Wissenschaftlicher Assistent am Institut für Statistik und Wirtschaftsmathematik der RWTH Aachen
- 1980 Promotion zum Dr.rer.nat.
- 1984 Habilitation für Mathematik an der RWTH Aachen
- 1986-1987 Heisenberg-Stipendiat, diverse Gastaufenthalte in den USA
- 1987 Ernennung zum Universitätsprofessor (C3) für Mathematik an der Universität Oldenburg [Mathematisierung der Wirtschaftswissenschaften]
- 1995 Ernennung zum Universitätsprofessor (C4) für Mathematik an der Universität Hamburg [Versicherungsmathematik]
- 2000 Ernennung zum Universitätsprofessor (C4) für Mathematik an der Universität Oldenburg [Angewandte Wahrscheinlichkeitstheorie]
- Seit Oktober 2016 im Ruhestand

Akademische Nebentätigkeiten

- 1991-1995 Dozent an der Berufsakademie Oldenburger Münsterland e.V., Vechta
- 2003-2007 Mitglied des Vorstands der DGVFM (Deutsche Gesellschaft für Versicherungs- und Finanzmathematik)
- 2007-2013 Dozent für die Deutsche Aktuarvereinigung im Bereich Stochastische Risikomodellierung und statistische Methoden
- 2009-2013 Mitglied im Leitungsteam der ASTIN-Fachgruppe der DAV

Sonstige Nebentätigkeiten

- 1996-2016 Wissenschaftlicher Berater für den Rückversicherungsmakler AON Benfield, Hamburg (ehemals Jauch & Hübener)
- seit 2006 Mitglied des Aufsichtsrats der Gegenseitigkeit Versicherung Oldenburg
- 2007-2014 Mitgründer und Mitgesellschafter der Unternehmensberatung acs actuarial solutions GmbH, Hamburg
- 2014 – 2018 Mitgründer und Mitgesellschafter der Unternehmensberatung eAs efficient actuarial solutions GmbH, Hamburg

Schwerpunkte in Forschung und Lehre

Angewandte Wahrscheinlichkeitstheorie [insbesondere Copulas], Extremwertstatistik, Risikotheorie, Quantitatives Risikomanagement, aktuarielle Aspekte von Solvency II.

INHALTSVERZEICHNIS

EINFÜHRUNG.....	4
I. EXTREMWERTVERTEILUNGEN	8
II. ORDNUNGSSTATISTIKEN	18
III. DER POT-ANSATZ UND VERALLGEMEINERTE PARETO-VERTEILUNGEN.....	23
IV. SCHÄTZVERFAHREN FÜR EXTREMWERTVERTEILUNGEN, HILL-PLOTS	33
V. GRUNDZÜGE GEOPHYSIKALISCHER NATURGEFAHRENMODELLE	41
VI. DERIVATE UND IHRE BEWERTUNG	51
LITERATURVERZEICHNIS	69

EINFÜHRUNG

In diesem Modul werden einige speziellere Aspekte des Risikomanagements bei Banken und Versicherungen behandelt, die inhaltlich auf anderen, eher grundsätzlichen Modulen aufbauen. Ein Schwerpunkt dieses Moduls bilden die mathematisch-statistischen Grundlagen für das Management operationaler Risiken mit Bezügen zur Extremwertstatistik, speziell den POT-Methoden, die auch für die Modellierung von Extremereignissen im Naturgefahrenbereich bei Versicherungen eine große Rolle spielen. Deshalb werden hier ebenfalls die Grundlagen sogenannter geophysikalischer Modelle behandelt, die insbesondere von Rückversicherern – oft unter Verwendung kommerzieller Software – angewendet werden, um entsprechende Rückversicherungsverträge mit Sachversicherungsunternehmen zu tarifieren. Schlussendlich werden in diesem Modul einige Grundlagen der stochastischen Finanzmathematik vertieft, wobei das Hauptaugenmerk auf der arbitragefreien Preisfindung für Derivate liegt.

Zum Thema operationale Risiken schreibt Heinrich Rommelfanger in einem Geleitwort:

»Operationelle Risiken, d. h. Risiken aus fehlerhaften Prozessen und Systemen, externen Ereignissen und menschlichem Versagen, sind in den letzten Jahren verstärkt in den Blickpunkt von Unternehmen gerückt. Insbesondere im Bankenbereich wurden in den letzten Jahren große Fortschritte im Managen von operationellen Risiken gemacht. Dies steht in Zusammenhang mit dem Inkrafttreten der neuen Basler Eigenkapitalvereinbarung im Jahre 2007, in der Banken erstmals dazu angehalten werden, sich mit diesem Thema stärker auseinanderzusetzen und auch für Operationelle Risiken Eigenkapital zu hinterlegen.

Ein erstes Problem beim Managen operationeller Risiken ist die schlechte Datenlage, da operationelle Risiken in der Vergangenheit als »nicht bedeutsam« vernachlässigt wurden. Dies ist menschlich auch nachvollziehbar, da niemand gerne eigene Fehler eingesteht, Kollegen »anschwärzt« oder allgemein ein düsteres Bild der Lage wiedergibt. Für ein gutes Risikomanagement ist aber eine umfassende Identifizierung und Quantifizierung der operationellen Risiken unverzichtbar. Es stellt sich daher die Frage, wie die Datengewinnung organisiert und die Mitarbeiter aller Hierarchiestufen davon überzeugt werden können, wahrheitsgemäß über operationelle Risiken zu berichten.

Ein zweiter wichtiger Punkt ist die Organisation des Risikomanagements im Unternehmen. Zu klären ist, ob die Organisationsstruktur eher zentral oder stärker dezentral aufgebaut werden soll und wer für die einzelnen Prozessschritte zuständig ist.

Liegen ausreichend viele interne und externe Verlustdaten zu operationellen Risiken vor, dann stellt sich die Frage nach geeigneten Systemen zur Modellierung von Abhängigkeiten, Verlusthöhen und -häufigkeiten. Auch ist zu klären, wie interne Risikomodelle bei der Gesamtrisikosteuerung zu berücksichtigen sind. « (M. Auer (2008), S. 9)

Zum gleichen Thema schreiben Anna Chernobai et al.:

»Often in financial institutions when there is a discussion of risk management, the two major risks identified are credit risk and market risk. Risks not attributable to either of these two risks are labelled other risks and, unfortunately, do not receive the same level of attention as credit risk and market risk. As we explain in Chapter 1, a number of prominent financial institutions have been shaken by losses in excess of \$1 billion each in the past couple of decades. Even worse, many of these failures resulted in bankruptcies. None of these losses, however, were due to credit risk or market risk. Rather, they were attributable to operational risk, one of the risks that has been historically lumped into other risks. The irony is that operational risk, which is at the core of these high-profile failures, appears to be, at least in part, a byproduct of the recent

rapid technological innovation, revolutionary advances in information network, financial de-regulation, and globalization.

The banking system has faced the painful reality that it is not sufficiently prepared to handle operational risk. Many banks now share the opinion of Roger Ferguson (who served as the vice chairman of the board of governors of the Federal Reserve System from 2001 to 2006), who said in 2003, "In an increasingly technologically driven banking system, operational risks have become an even larger share of total risk. Frankly, at some banks, they are probably the dominant risk."

As a drastic countermeasure, the Basel Committee for Banking Supervision introduced an amendment to the Basel Capital Accord to support operational risk with regulatory capital and outlined several measurement approaches in 2001. The implementation of the Basel II Capital Accord has begun in 2007 for all internationally active banks (with a few exceptions and some transitional adjustments). « (A. Chernobai et al. (2007), S. XV f.)

Mit Bezug auf die neuen aufsichtsrechtlichen Anforderungen unter Solvency II führt Wim van de Kraats aus:

»Operational risk is as old as the human race and has always been managed, but nevertheless is considered as a relatively young risk category by many risk professionals. There can be many reasons for this, but one of the most plausible arguments would be that an internal control framework combined with a strong audit function has long been considered sufficient.

As financial institutions grew larger and operational failures occurred that had a very large impact, such as the collapse of the Barings Bank due to fraud, regulators stepped in with requirements for operational risk management. As absolute assurance cannot be provided on the effectiveness of an internal control framework, holding capital for operational risk seemed a logical next step. This approach has been difficult to put into practice, however, due to lack of data, which triggered the need to start collecting loss information, and expert judgement still cannot be avoided when assessing operational risk.

At the same time, companies started working on frequent selfassessments of operational risks and controls by the business. In addition, they endeavoured to supplement loss data collection with root-cause analyses to ensure proper lessons were learned from risk events. Finally, companies monitored developments in operational risk exposure at an early stage through a concise but meaningful set of key risk indicators. « (in: R. Doff (2014), S. 209 f.)

Zur Bedeutung einer wissenschaftlich soliden Naturgefahrenmodellierung führen Patricia Grossi et al. aus:

»Catastrophe modeling is not rooted in one field or discipline. The science of assessing and managing catastrophe risk originates in the fields of property insurance and the science of natural hazards. Insurers may well argue that catastrophe modeling's history lies in the earliest days of property insurance coverage for fire and lightning. In the 1800's, residential insurers managed their risk by mapping the structures that they covered. Not having access to Geographic Information Systems (GIS) software, they used tacks on a wall-hung map to indicate their concentration of exposure. This crude technique served insurers well and limited their risk. Widespread usage of mapping ended in the 1960's when it became too cumbersome and time-consuming to execute.

On the other hand, a seismologist or meteorologist may well argue that the origin of catastrophe modeling lies in the modern science of understanding the nature and impact of natural hazards. In particular, the common practice of measuring an earthquake's magnitude and a hurricane's intensity is one of the key ingredients in catastrophe modeling. A standard set of metrics for a given hazard must be established so that risks can be assessed and managed. This measurement began in the 1800's, when the first modern seismograph (measuring earthquake ground motion) was invented and modern versions of the anemometer (measuring wind speed) gained widespread usage.

In the first part of the twentieth century, scientific measures of natural hazards advanced rapidly. By the 1970's, studies theorizing on the source and frequency of events were published. Significant analyses include the U.S. Water Resources Council publication on flood hazard (US-WRC, 1967), the Algermissen study on earthquake risk and National Oceanic and Atmospheric Administration (NOAA) hurricane forecasts. These developments led U.S. researchers to compile hazard and loss studies, estimating the impact of earthquakes, hurricanes, floods, and other natural disasters. Notable compilations include Brinkmann's summary of hurricane hazards in the United States and Steinbrugge's anthology of losses from earthquakes, volcanoes, and tsunamis.

These two separate developments – mapping risk and measuring hazard – came together in a definitive way in the late 1980's and early 1990's, through *catastrophe modeling*. Computer-based models for measuring catastrophe loss potential were developed by linking scientific studies of natural hazards' measures and historical occurrences with advances in information technology and geographic information systems (GIS). The models provided estimates of catastrophe losses by overlaying the properties at risk with the potential natural hazard(s) sources in the geographic area. With the ability to store and manage vast amounts of spatially referenced information, GIS became an ideal environment for conducting easier and more cost-effective hazard and loss studies.

Around the same time, several new modeling firms developed computer software for analyzing the implications of natural hazard risk. Three major firms emerged: AIR Worldwide was founded in 1987 in Boston; Risk Management Solutions (RMS) was formed in 1988 at Stanford University; and EQECAT began in San Francisco in 1994 as a subsidiary of EQE International. « (in: P. Grossi et al. (2005), S. 23 f.)

Der folgende Auszug aus einem in der Schweiz verwendeten Schulbuch zeigt, dass operationale Risiken auch mit Derivaten und deren Bewertung zu tun haben können:

»Um 1990 gab es nur wenige Nichtfachleute, die Optionen als Finanzinstrument kannten. Das ist nicht weiter verwunderlich, wenn man bedenkt, dass in den meisten Ländern - unter anderem auch in der Schweiz - der professionelle Handel mit Optionen in grösserem Umfang an eigens dafür eingerichteten Börsen erst zwischen 1980 und 1990 einsetzte.

Im Jahr 1995 erlangten Optionen schlagartig eine zweifelhafte Berühmtheit. Am Montag, 27. Februar 1995, sorgte ein 28-jähriger Bankangestellter aus England namens Nick Leeson weltweit für Schlagzeilen. Er hatte die traditionsreiche angesehene englische Privatbank Barings im Alleingang in den Bankrott getrieben. Barings hatte allein wegen Leeson innerhalb weniger Wochen einen Verlust von über 1 Milliarde Dollar erlitten.

Leeson war für Barings an der Börse von Singapur als Händler tätig. Ende 1994 verkaufte er unter anderem in grosser Zahl so genannte Put-Optionen auf den japanischen Börsenindex Nikkei. Mit dem Verkauf dieser Optionen schloss Leeson eine Wette auf die zukünftige Entwicklung des Nikkei-Index ab:

Falls der Nikkei-Index in den kommenden Monaten in etwa stabil bleibt oder gar steigt, gewinnt Leeson die Wette. Er kann dann die aus dem Verkauf der Optionen eingenommenen Prämien als Gewinn verbuchen.

Falls der Nikkei-Index dagegen unter eine bestimmte Marke sinkt, verliert Leeson die Wette. Sein Verlust ist umso grösser, je stärker der Kurs unter die Marke sinkt. Für Leeson würde dabei jedes Prozent, um das der Nikkei-Index unter die Marke sinkt, einen Verlust von rund 100 Millionen Dollar bedeuten!

Ende 1994 stand der Nikkei-Index bei 20000 Punkten. Die für Leeson kritische Marke lag bei 18000 Punkten. Mitte Februar 1995 durchbrach der Index diese Marke und sank bis Ende Februar auf unter 17000 Punkte. Leeson hatte die Wette verloren, und Barings ging Bankrott.

Leesons Motiv für sein risikoreiches Handeln war das Streben nach Anerkennung. Er wollte ein Star werden. Leeson stammte aus der englischen Unterschicht und hatte keine höhere Schule besucht. Er arbeitete sich bei Barings hoch. Er schamte den Sprung vom Back Office an die

Front. Zum Desaster kam es nicht, weil Leeson mit Optionen spekulierte - das war Teil seines Jobs. Zum Desaster kam es, weil es bei Barings keine Stelle gab, welche die Höhe der Einsätze der Händler kontrollierte und limitierte und weil die eingegangenen Risiken nicht durch Gegengeschäfte mindestens teilweise abgesichert wurden. « (M. Adelmeyer (2000), S. 3)

Ich hoffe, dass diese wenigen Anmerkungen Ihr Interesse an der Materie geweckt haben.

Literatur:

- M. Adelmeyer (2000): Call & Put. Einführung in Optionen aus wirtschaftlicher und mathematischer Sicht. Orell Füssli, Zürich.
- M. Auer (2008): Operationelles Risikomanagement bei Finanzinstituten. Risiken identifizieren, analysieren und steuern. Wiley VCH, Weinheim.
- A.S. Chernobai, S.T. Rachev und F.J. Fabozzi (2007): Operational Risk. A Guide to Basel II Capital Requirements, Models, and Analysis. Wiley, N.Y.
- R. Doff (Ed.) (2014): The Solvency II Handbook. Practical Approaches to Implementation. RISK Books, London.
- P. Grossi und H. Kunreuther (2005): Catastrophe Modeling: A New Approach to Managing Risk. Springer, Boston.

KAPITEL 1: EXTREMWERTVERTEILUNGEN

I. EXTREMWERTVERTEILUNGEN

Motivation für die Beschäftigung mit Extremwertverteilungen:

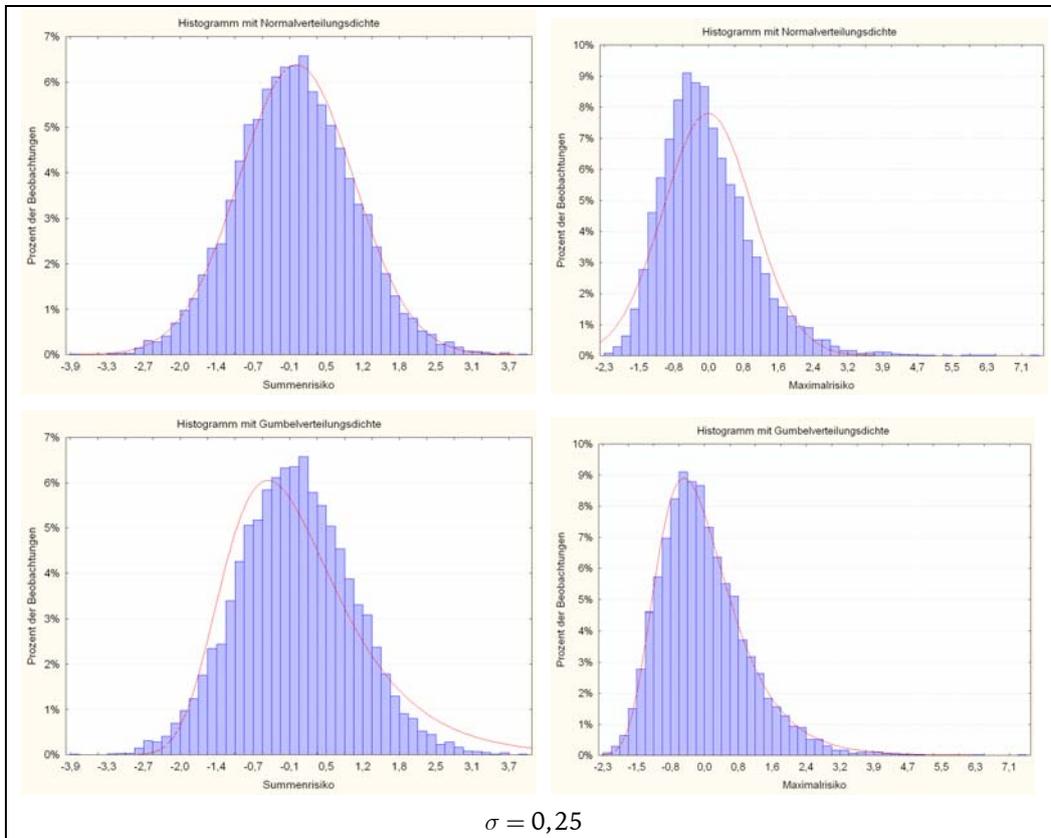
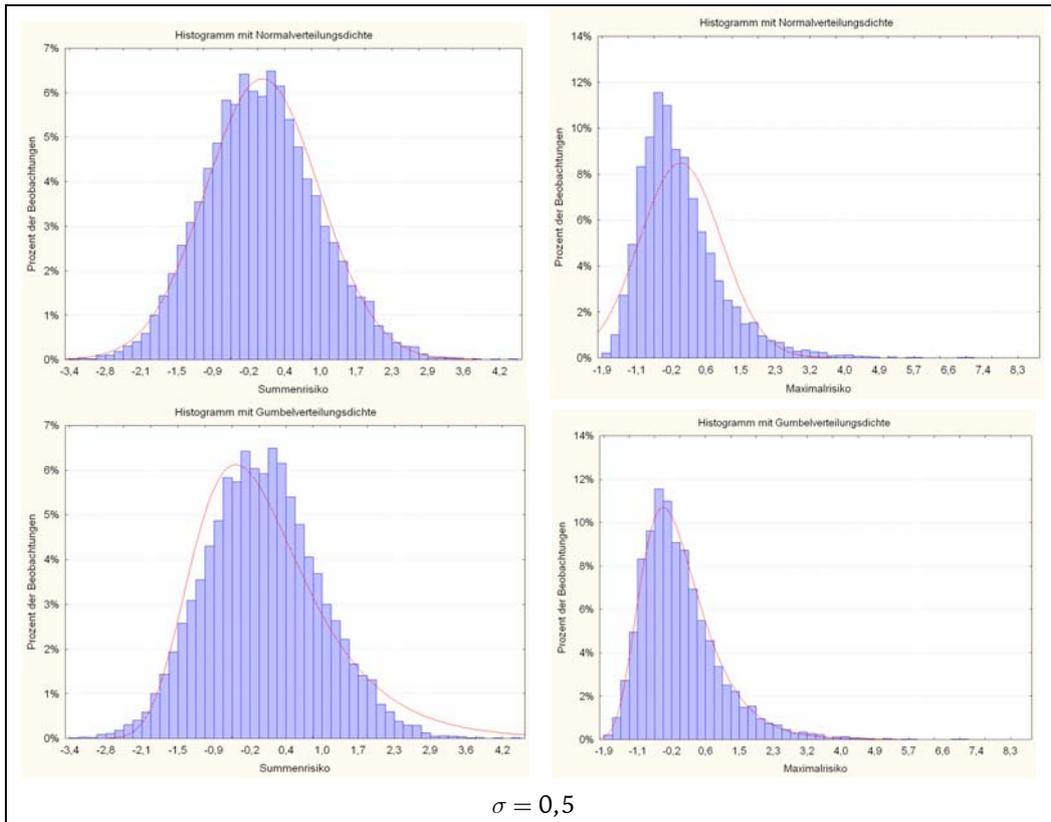
- **Substantielle Verluste** im Versicherungsbereich z.B. auf Grund von Naturereignissen (Stürme, Überschwemmungen, Erdbeben, ...)
- **Substantielle Verluste** im Bankbereich z.B. auf Grund wirtschaftlicher und politischer Krisen
- **Substantielle Verluste** in beiden Bereichen z.B. auf Grund von persönlichem Fehlverhalten (Fehleinschätzungen des Managements, Betrug, ...) oder externen Ereignissen (IT-Ausfall, Sabotage, Brand, Unglücksfälle, ...)
- Statistische Verteilungen daraus resultierender Verluste unterscheiden sich deutlich von der Verteilung „normaler“ Verluste.
- Extremwertverteilungen lassen sich mathematisch „begründen“ (ähnlich der Normalverteilung durch den Zentralen Grenzwertsatz).
- Extremwertverteilungen spielen eine zentrale Rolle z.B. bei der Bewertung Operationaler Risiken unter Basel III und Solvency II.
- Extremwertverteilungen und die damit verwandten verallgemeinerten Pareto-Verteilungen bilden die Grundlage der Modellierung von Schäden in der Rückversicherung.

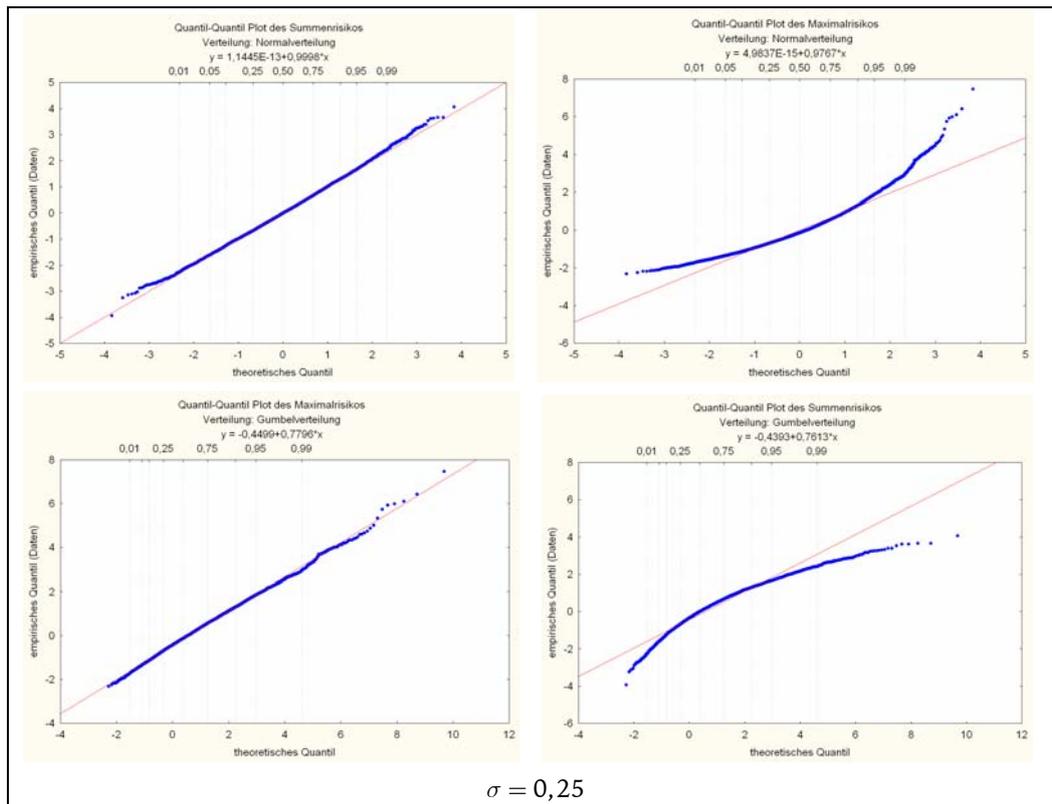
Numerische Studie zur Motivation:

10.000-fache Wiederholung eines Experiments mit jeweils 50 stochastisch unabhängigen $\mathcal{LN}\left(-\frac{\sigma^2}{2}, \sigma^2\right)$ -lognormalverteilten Risiken, d.h. zu Grunde liegen X_{ij} , $i = 1, \dots, 10.000$, $j = 1, \dots, 50$ für $\sigma > 0$. Dies impliziert für die Erwartungswerte $E(X_{ij}) = 1$ und für die Varianzen $Var(X_{ij}) = \exp(\sigma^2) - 1$.

Wir betrachten die Risiken $S_i := \sum_{j=1}^{50} X_{ij}$ und $M_i := \max_{1 \leq j \leq 50} \{X_{ij}\}$ sowie ihre empirischen Standardisierungen S_i^* und M_i^* , so dass $E(S_i^*) = E(M_i^*) = 0$ und $Var(S_i^*) = Var(M_i^*) = 1$ gilt. Die folgenden Graphiken zeigen für beide Standardisierungen empirische Histogramme mit verschiedenen Werten von σ .

I. EXTREMWERTVERTEILUNGEN





Diese Graphiken zeigen wegen der offensichtlichen Linearität im linken und der Nichtlinearität im rechten Bild außerdem, dass die Verteilungen des Summen- und des Maximalrisikos nicht aus derselben Lage-Skalen-Familie stammen können.

Überlegungen zur Herleitung von Extremwertverteilungen:

Sind X_1, \dots, X_n stochastisch unabhängige Zufallsvariablen (Risiken) und bezeichnet $X_{n:n} = \max(X_1, \dots, X_n)$ für $n \in \mathbb{N}$, so gilt:

$$P(X_{n:n} \leq x) = P\left(\bigcap_{k=1}^n \{X_k \leq x\}\right) = F^n(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

wobei F die Verteilungsfunktion der X_k bezeichne. Mit noch geeignet zu bestimmenden Konstantenfolgen $\{a_n\}$ (mit $a_n > 0$) und $\{b_n\}$ kann man nun versuchen, ähnlich zum Zentralen Grenzwertsatz einen Grenzwert für die normalisierten Maxima $Z_n = \frac{X_{n:n} - b_n}{a_n}$ zu finden. Wir zeigen hier exemplarisch am Beispiel der Exponentialverteilung $\mathcal{E}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$, dass dies in gewissen Fällen funktioniert.

Wir wählen $a_n = \frac{1}{\lambda}$ und $b_n = \frac{\ln n}{\lambda}$. Dann folgt für $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} P(Z_n \leq x) &= P\left(\frac{X_{n:n} - b_n}{a_n} \leq x\right) = P(X_{n:n} \leq a_n x + b_n) = F^n(a_n x + b_n) \\ &= F^n\left(\frac{x + \ln n}{\lambda}\right) = \left(1 - \exp\left[-\lambda \cdot \left(\frac{x + \ln n}{\lambda}\right)^+\right]\right)^n \\ &= \left(1 - \exp\left(-(x + \ln n)^+\right)\right)^n = \left\{1 - \frac{e^{-x}}{n}\right\}^n \rightarrow \exp(-\exp(-x)) \end{aligned}$$

für $n \rightarrow \infty$. Die zugehörige Grenzverteilung heißt Gumbelverteilung oder doppelte Exponentialverteilung.

Nach einem klassischen **Satz von Fisher und Tippett** gilt allgemein, dass im Falle der Konvergenz die (nicht-degenerierten) Grenzverteilungsfunktionen bis auf positiv-lineare Transformationen (Lage-Skalen-Familien) von genau einem der drei folgenden Typen sind:

$$\text{Fréchet-Klasse: } \Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \exp\{-x^{-\alpha}\}, & x > 0 \end{cases} \quad (\alpha > 0)$$

$$\text{Weibull-Klasse: } \Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\{-(-x)^\alpha\}, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad (\alpha > 0)$$

$$\text{Gumbel-Klasse: } \Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

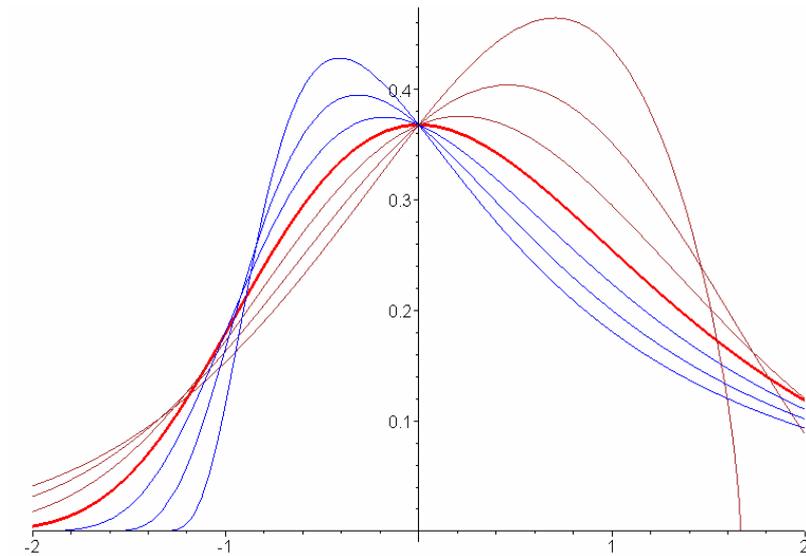
Man kann die drei Klassen von Verteilungsfunktionen auch durch eine einzige Verteilungsfunktionsklasse (mit nur einem Parameter) charakterisieren, und zwar folgendermaßen:

$$G_\xi(x) = \exp\left(-(1 + \xi x)^{-1/\xi}\right), \quad 1 + \xi x > 0 \quad (\xi \in \mathbb{R}),$$

wobei der Sonderfall $\xi = 0$ als Grenzfall aufzufassen ist.

- Für $\xi > 0$ ergibt sich die *Fréchet-Klasse*,
- für $\xi < 0$ die *Weibull-Klasse* (in beiden Fällen mit $\alpha = 1/|\xi|$)
- und für $\xi = 0$ die *Gumbel-Klasse*.

Der Parameter $\xi \in \mathbb{R}$ wird hier auch als *extremaler Index* bezeichnet.



Dichten der Standard-Grenzverteilungen in ξ -Parametrisierung

Bemerkung: Es ist nicht immer gewährleistet, dass man geeignete Folgen $\{a_n\}$ (mit $a_n > 0$) und $\{b_n\}$ finden kann, so dass $Z_n = \frac{X_{n:n} - b_n}{a_n}$ eine (nicht-degenerierte) Grenzverteilung besitzt. Eine exakte Charakterisierung solcher Fälle ist mathematisch kompliziert und kann hier nicht genauer dargestellt werden.

Man kann aber folgendes sagen:

Bezeichnet $x_{\text{sup}} := \sup\{x \in \mathbb{R} | F(x) < 1\}$ und $\beta_n := F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$ (mit der Quantilfunktion F^{-1}), so gilt:

- a) Die Grenzverteilung von $Z_n = \frac{X_{n:n} - b_n}{a_n}$ liegt in der *Gumbel-Klasse* genau dann, wenn eine Funktion g existiert mit der Eigenschaft

$$\lim_{t \uparrow x_{\text{sup}}} \frac{1 - F(t + x g(t))}{1 - F(t)} = e^{-x} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Eine mögliche Wahl von g ist $g(t) = \int_t^{x_{\text{sup}}} \frac{1 - F(u)}{1 - F(t)} du$ für $t < x_{\text{sup}}$. Als Normalisierungskonstanten können $a_n = g(\beta_n)$, $b_n = \beta_n$ für $n \in \mathbb{N}$ gewählt werden.

- b) Die Grenzverteilung von $Z_n = \frac{X_{n:n} - b_n}{a_n}$ liegt in der *Fréchet-Klasse* genau dann, wenn $x_{\text{sup}} = \infty$ ist und

$$\lim_{t \uparrow \infty} \frac{1 - F(t \cdot x)}{1 - F(t)} = x^{-\alpha} \text{ für alle } x > 0$$

gilt. Als Normalisierungskonstanten können $a_n = \beta_n$, $b_n = 0$ für $n \in \mathbb{N}$ gewählt werden.

- c) Die Grenzverteilung von $Z_n = \frac{X_{n:n} - b_n}{a_n}$ liegt in der *Weibull-Klasse* genau dann, wenn $x_{\text{sup}} < \infty$ ist und

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1 - F(x_{\text{sup}} - x \cdot h)}{1 - F(x_{\text{sup}} - h)} = x^\alpha \text{ für alle } x > 0$$

gilt. Als Normalisierungskonstanten können $a_n = x_{\text{sup}} - \beta_n$, $b_n = x_{\text{sup}}$ für $n \in \mathbb{N}$ gewählt werden.

Beispiele:

Für die *Exponentialverteilung* $\mathcal{E}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$ haben wir schon direkt gezeigt, dass die Grenzverteilung von $Z_n = \frac{X_{n:n} - b_n}{a_n}$ in der *Gumbel-Klasse* liegt.

Hier ist $x_{\text{sup}} = \infty$ und $\beta_n = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{\ln n}{\lambda}$, mit

$$g(t) = \int_t^\infty \frac{1 - F(u)}{1 - F(t)} du = \int_t^\infty \exp(-\lambda(u - t)) du = \int_0^\infty \exp(-\lambda v) dv = \frac{1}{\lambda} \text{ für } t < \infty.$$

Dies bestätigt den in der Herleitung gewählten Ansatz.

Die *Pareto-Verteilung* $\mathcal{Pa}(\alpha)$ mit $\alpha > 0$ besitzt die Verteilungsfunktion

$$F(x) = 1 - \frac{1}{(1+x)^\alpha} \text{ für } x \geq 0.$$

Hier ist $x_{\text{sup}} = \infty$ und $\beta_n = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = n^{1/\alpha} - 1$.

Es gilt $\lim_{t \uparrow \infty} \frac{1 - F(t \cdot x)}{1 - F(t)} = \lim_{t \uparrow \infty} \frac{\frac{1}{(1+tx)^\alpha}}{\frac{1}{(1+t)^\alpha}} = \lim_{t \uparrow \infty} \frac{(1+t)^\alpha}{(1+tx)^\alpha} = x^{-\alpha}$, d.h. die Grenzverteilung

von $Z_n = \frac{X_{n:n} - b_n}{a_n}$ liegt in der *Fréchet-Klasse*. Als Normalisierungskonstanten können $a_n = \beta_n$, $b_n = 0$ für $n \in \mathbb{N}$ gewählt werden.

Bemerkung:

Mit $a_n = \beta_n$, $b_n = 0$ für $n \in \mathbb{N}$ erhält man auch direkt

$$\begin{aligned} P(Z_n \leq x) &= P\left(\frac{X_{n:n} - b_n}{a_n} \leq x\right) = P(X_{n:n} \leq a_n x) = F^n(\beta_n x) \\ &= \left(1 - \frac{1}{(1 + \beta_n x)^\alpha}\right)^n \approx \left(1 - \frac{1}{(n^{1/\alpha} x)^\alpha}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x^\alpha}\right)^n \rightarrow \exp(-x^{-\alpha}). \end{aligned}$$

Die *stetige Gleicherteilung* $\mathcal{U}[a, b]$ mit $a < b < \infty$ besitzt die Verteilungsfunktion

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a} \text{ für } a \leq x \leq b.$$

Hier ist $x_{\text{sup}} = b < \infty$ und $\beta_n = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = a + (b-a) \cdot \frac{n-1}{n}$.

Es gilt $\lim_{h \downarrow 0} \frac{1 - F(x_{\text{sup}} - x \cdot h)}{1 - F(x_{\text{sup}} - h)} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{x \cdot h}{h} = x$ mit $\alpha = 1$, d.h. die Grenzverteilung

von $Z_n = \frac{X_{n:n} - b_n}{a_n}$ liegt in der *Weibull-Klasse*. Als Normalisierungskonstanten

können $a_n = b - \beta_n = \frac{b-a}{n}$, $b_n = b$ für $n \in \mathbb{N}$ gewählt werden.

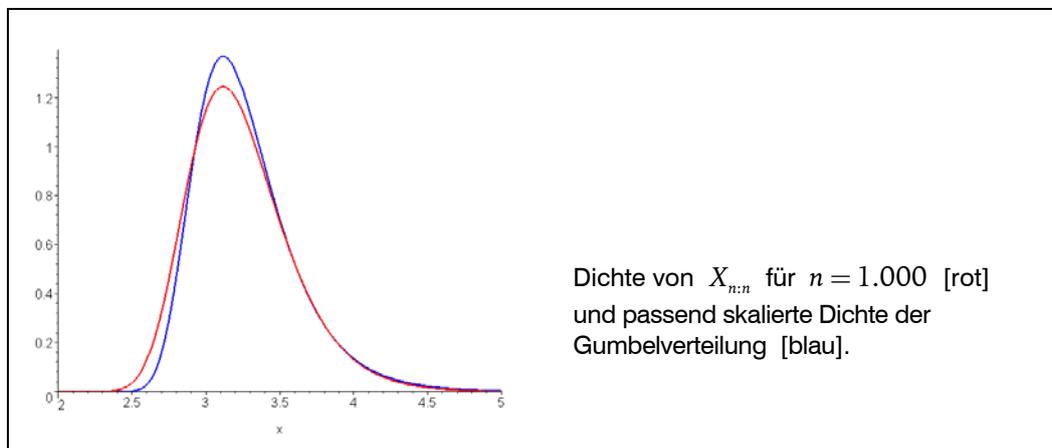
Bemerkungen:

- Ist die ursprüngliche Verteilung bereits aus der Fréchet-/ Weibull-/ Gumbel-Klasse, so auch die (dann stets existierende) Grenzverteilung von $Z_n = \frac{X_{n:n} - b_n}{a_n}$. Man nennt diese Verteilungsklassen daher auch *max-stabil*.
- Für diskrete Verteilungen über Teilmengen von \mathbb{Z} existiert für *keine Wahl* normalisierender Konstanten für $Z_n = \frac{X_{n:n} - b_n}{a_n}$ eine nicht-degenerierte Grenzverteilung.
- Das *theoretische* Quantil $\beta_n := F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$ entspricht in gewisser Weise dem *empirischen* Quantil $X_{n:n}$ (\rightarrow Q-Q Plot).

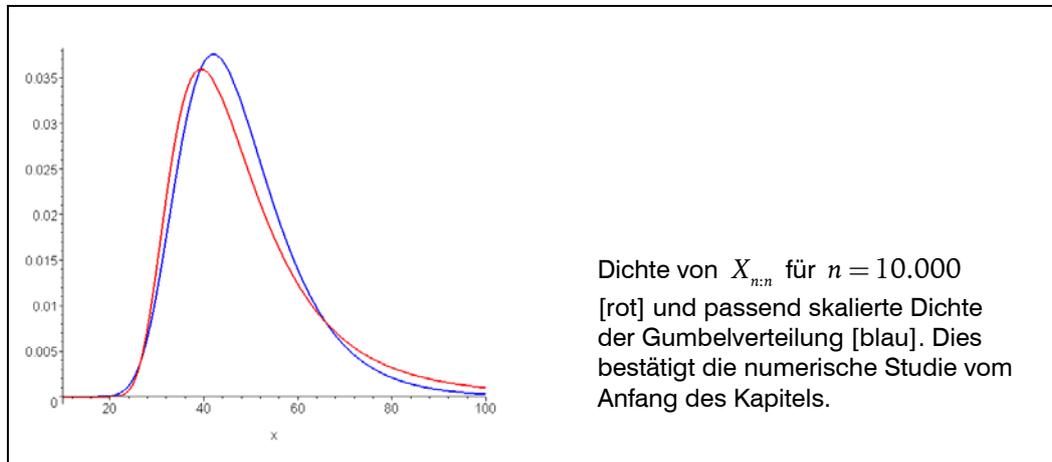
Weitere Beispiele:

Die Grenzverteilung der normalisierten Maxima von Risiken mit einer *Standard-Normalverteilung* $\mathcal{N}(0,1)$ liegt in der *Gumbel-Klasse*, mit

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2 \ln n}} \quad \text{und} \quad b_n = \sqrt{2 \ln n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln(\ln n) + \ln(4\pi)}{\sqrt{2 \ln n}} \quad \text{für } n \geq 2.$$



Die Grenzverteilung der normalisierten Maxima von Risiken mit einer *Standard-Lognormalverteilung* $\mathcal{LN}(0,1)$ liegt ebenfalls in der *Gumbel-Klasse*, mit den Konstanten $\tilde{a}_n = a_n \cdot \exp(b_n)$ und $\tilde{b}_n = \exp(b_n)$ für $n \geq 2$ mit a_n, b_n wie zuvor.



Literatur zur Vertiefung:

- Embrechts, P., Klüppelberg, C. und Mikosch, T. (1997): *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer, Berlin. [Kapitel 3, Unterabschnitte 3.1 bis 3.3]
- Reiss, R. D. und Thomas, M. (2007): *Statistical Analysis of Extreme Values with Applications to Insurance, Finance, Hydrology and Other Fields*. Birkhäuser, Basel (3. Aufl.). [Kapitel 1, Unterabschnitte 1.1 bis 1.3]
- Beirlant, J., Goegebeur, Y., and Teugels, J. (2004): *Statistics of Extremes. Theory and Applications*. Wiley, N.Y. [Kapitel 1, Unterabschnitt 1.2.1 und Kapitel 2]

KAPITEL 2: ORDNUNGSSTATISTIKEN

II. ORDNUNGSSTATISTIKEN

Motivation für die Beschäftigung mit Ordnungsstatistiken:

- Ordnungsstatistiken bilden die natürliche Verallgemeinerung von Extremwerten wie Maxima und Minima von Zufallsvariablen (Risiken).
- Ordnungsstatistiken bilden die Grundlage der Quantil-Quantil-Plots für Daten aus Lage-Skalen-Familien.
- Ordnungsstatistiken bilden die Grundlage vieler statistischer Schätzverfahren für Extremwertverteilungen bzw. ihrer Parameter (insbesondere des extremalen Index ξ bzw. des Parameters $\alpha = \frac{1}{|\xi|}$ im Fall der *Fréchet*- und der *Weibull-Klasse*).
- Ordnungsstatistiken bilden die natürliche Grundlage für die statistische Schätzung des Risikomaßes Value at Risk auf der Basis von Monte-Carlo-Simulationen.

Empirische Verteilungsfunktion:

Sind X_1, \dots, X_n ($n \in \mathbb{N}$) unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen (Risiken) mit der (theoretischen) Verteilungsfunktion F , so ist die empirische Verteilungsfunktion \hat{F}_n definiert durch

$$\hat{F}_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{(-\infty, x]}(X_k) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Hierbei ist die Indikatorfunktion $\mathbb{1}_A$ eines Ereignisses A gegeben durch

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Interpretation:

Die empirische Verteilungsfunktion \hat{F}_n ist die Verteilungsfunktion einer (zufälligen) diskreten Gleichverteilung auf den „Punkten“ X_1, \dots, X_n .

Satz von Glivenko-Cantelli (Zentralsatz der Statistik):

Die empirische Verteilungsfunktion \hat{F}_n konvergiert gleichmäßig gegen die „wahre“ Verteilungsfunktion F für $n \rightarrow \infty$, d.h. es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\hat{F}_n(x) - F(x)| = 0.$$

Bemerkung:

Die schwächere (punktweise) Aussage $\lim_{n \rightarrow \infty} |\hat{F}_n(x) - F(x)| = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist eine direkte Konsequenz des Gesetzes der großen Zahlen (GGZ), angewendet auf die Folge $B(1, F(x))$ -binomialverteilter Zufallsvariablen $Y_n(x) := \mathbb{1}_{(-\infty, x]}(X_n)$ für $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.

Ordnungsstatistiken:

Sind X_1, \dots, X_n ($n \in \mathbb{N}$) unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen (Risiken) mit der (theoretischen) Verteilungsfunktion F , so ist die k -te Ordnungsstatistik $X_{k:n}$ als ein Quantil der empirischen Verteilungsfunktion \hat{F}_n definiert durch

$$X_{k:n} := \hat{F}_n^{-1}\left(\frac{k}{n}\right) \text{ für } k = 1, \dots, n.$$

Interpretation:

Die k -te Ordnungsstatistik entspricht dem k -größten Wert unter den X_1, \dots, X_n , d.h. es gilt $\min\{X_1, \dots, X_n\} = X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$.

Falls die zu Grunde liegende Verteilung diskrete Anteile besitzt, können hierbei sogenannte *Bindungen* (d.h. gleiche Werte) mit positiver Wahrscheinlichkeit auftreten. Im Fall stetiger Verteilungen geschieht dies nur mit Wahrscheinlichkeit Null.

Hieraus ergibt sich im stetigen Fall eine alternative Darstellung der empirischen Verteilungsfunktion zu

$$\hat{F}_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x < X_{1:n} \\ \frac{k}{n} & \text{wenn } X_{k:n} \leq x < X_{k+1:n} \text{ für } k \in \{1, \dots, n-1\} \text{ für } k = 1, \dots, n \\ 1 & \text{wenn } x \geq X_{n:n}. \end{cases}$$

Statistische Eigenschaften von Ordnungsstatistiken:

Für die *Verteilungsfunktion* einer Ordnungsstatistik gilt:

$$F_{X_{k:n}}(x) = P(X_{k:n} \leq x) = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} F^i(x) [1 - F(x)]^{n-i} \text{ für } x \in \mathbb{R}, k = 1, \dots, n.$$

Beweisskizze:

$$\begin{aligned} P(X_{k:n} \leq x) &= P\left(\hat{F}_n^{-1}\left(\frac{k}{n}\right) \leq x\right) = P\left(\frac{k}{n} \leq \hat{F}_n(x)\right) = P\left(\sum_{i=1}^n Y_i(x) \geq k\right) \\ &= \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} F^i(x) [1 - F(x)]^{n-i}. \end{aligned}$$

Für die Verteilungsdichte einer Ordnungsstatistik gilt, sofern F die Dichte f besitzt:

$$f_{X_{k:n}}(x) = \frac{f(x)}{B(k, n-k+1)} F^{k-1}(x) [1-F(x)]^{n-k} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, k = 1, \dots, n,$$

mit der Beta-Funktion $B(a, b) = \frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ für $a, b > 0$.

Im Falle der Ganzzahligkeit gilt hier einfacher

$$B(a, b) = \frac{(a-1)!(b-1)!}{(a+b-1)!} = \frac{1}{b \cdot \binom{a+b-1}{a-1}} = \frac{1}{a \cdot \binom{a+b-1}{b-1}}.$$

Beweisskizze:

$$\begin{aligned} f_{X_{k:n}}(x) &= \frac{d}{dx} F_{X_{k:n}}(x) = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \frac{d}{dx} \left\{ F^i(x) [1-F(x)]^{n-i} \right\} \\ &= f(x) \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \left\{ i F^{i-1}(x) [1-F(x)]^{n-i} - (n-i) F^i(x) [1-F(x)]^{n-i-1} \right\} \\ &= f(x) \left[n \sum_{i=k-1}^{n-1} \binom{n-1}{i} F^i(x) [1-F(x)]^{n-1-i} - n \sum_{i=k}^{n-1} \binom{n-1}{i} F^i(x) [1-F(x)]^{n-1-i} \right] \\ &= n \binom{n-1}{k-1} f(x) F^{k-1}(x) [1-F(x)]^{n-k} = \frac{f(x)}{B(k, n-k+1)} F^{k-1}(x) [1-F(x)]^{n-k}. \end{aligned}$$

Ordnungsstatistiken bei speziellen Verteilungen:

- Sind die Zufallsvariablen (Risiken) unabhängig und über $[0,1]$ stetig gleichverteilt, so ist $X_{k:n} \sim \mathcal{B}(k, n-k+1)$ Beta-verteilt mit der Dichte

$$f_{X_{k:n}}(x) = \frac{x^{k-1} (1-x)^{n-k}}{B(k, n-k+1)} \quad \text{für } 0 \leq x \leq 1.$$

- Sind die Zufallsvariablen (Risiken) unabhängig $\mathcal{E}(\lambda)$ -exponentialverteilt mit $\lambda > 0$, dann sind die Zuwächse (sukzessive Differenzen) $X_{1:n}, X_{2:n} - X_{1:n}, X_{3:n} - X_{2:n}, \dots, X_{n:n} - X_{n-1:n}$ ebenfalls unabhängig und exponentialverteilt, wobei $X_{k:n} - X_{k-1:n}$ einer $\mathcal{E}((n-k+1)\lambda)$ -Verteilung für $k = 1, \dots, n$ folgt. Dies impliziert u.a. für große Werte von n :

$$E(X_{n:n}) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \approx \frac{\ln n}{\lambda}, \quad \text{Var}(X_{n:n}) = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} \approx \frac{\pi^2}{6\lambda^2}.$$

Satz von Smirnov:

Haben unter den Bedingungen des Satzes von Fisher-Tippett die normalisierten Maxima

$$Z_n = \frac{X_{n:n} - b_n}{a_n}$$

eine Grenzverteilung in der Fréchet-/Weibull-/Gumbel-Klasse mit der

Grenzverteilungsfunktion G , so haben die normalisierten Ordnungsstatistiken

$$Z_{n-k:n} = \frac{X_{n-k:n} - b_n}{a_n}$$

für festes $k \in \mathbb{Z}^+$ ebenfalls eine Grenzverteilung, mit der Grenzver-

teilungsfunktion (\rightarrow Poisson-Verteilung)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_{n-k:n} \leq x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n-k}^n \binom{n}{i} F^i(a_n x + b_n) [1 - F(a_n x + b_n)]^{n-i} = G(x) \sum_{j=0}^k \frac{[-\ln G(x)]^j}{j!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Literatur zur Vertiefung:

- Embrechts, P., Klüppelberg, C. und Mikosch, T. (1997): Modelling Extremal Events for Insurance and Finance. Springer, Berlin. [Kapitel 4, Unterabschnitte 4.1 bis 4.2]
- David, H. A. und Nagaraja, H. M. (2003): Order Statistics. Wiley, N.Y. (3. Aufl.). [Kapitel 2, Unterabschnitte 2.1 und 2.5]
- Beirlant, J., Goegebeur, Y., and Teugels, J. (2004): Statistics of Extremes. Theory and Applications. Wiley, N.Y. [Kapitel 3]

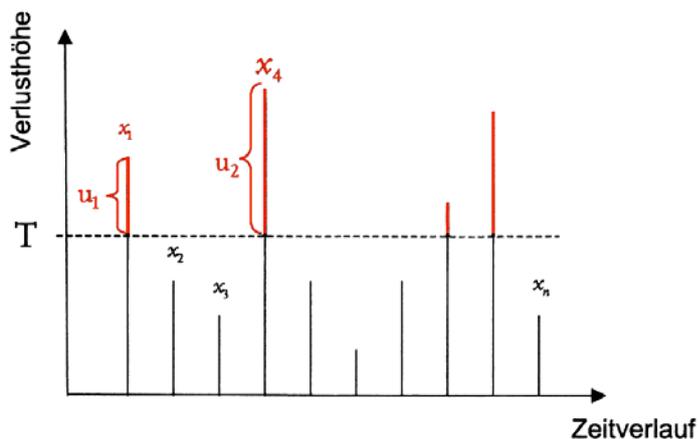
**KAPITEL 3:
DER POT-ANSATZ UND
VERALLGEMEINERTE PARETO-VERTEILUNGEN**

III. DER POT-ANSATZ UND VERALLGEMEINERTE PARETO-VERTEILUNGEN

Motivation:

- Rückversicherungen erhalten in der Regel von ihren Kunden nur Meldungen von Schäden oberhalb eines definierten Selbstbehalts (=Threshold). Die asymptotische Verteilung solcher Schäden (bei wachsendem Threshold) unterscheidet sich jedoch von einer klassischen Extremwertverteilung, lässt sich aber damit darstellen.
- Die hier betrachteten Ansätze korrespondieren in gewisser Weise mit dem Risikomaß *Expected Shortfall*.
- Es gibt einen natürlichen Zusammenhang zwischen dem extremalen Index in der klassischen Extremwertstatistik und den Parametern der hier auftretenden Grenzverteilungen (verallgemeinerte Pareto-Verteilungen).

Der Peaks-over-Threshold-Ansatz (POT-Ansatz)



Modifiziert nach Auer, S. 180, Abb. 6.9

Der Ausgangspunkt ist hier die Betrachtung von Überschreitungen von unabhängigen, identisch verteilten Risiken X_1, \dots, X_n über ein festgelegtes Verlustniveau T (Threshold).

Dies impliziert zwei Aspekte:

- die (zufällige) Anzahl N_T von Überschreitungen
- die (bedingte) Verteilung des *Exzesses* über T .

Die Verteilung von $N_T = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{(T, \infty)}(X_k)$ ist bei festem n eine $B(n, p_T)$ -Verteilung mit dem Parameter $p_T = P(X_k > T) = 1 - F(T)$.

Die (bedingte) Verteilungsfunktion des *Exzesses* über T ist gegeben durch

$$F_T(x) = P(X_k - T \leq x | X_k > T) = \frac{F(x+T) - F(T)}{1 - F(T)} \text{ für } x > 0.$$

Beispiele:

Sind die Risiken X_1, \dots, X_n $\mathcal{E}(\lambda)$ -exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$, so ist

$$p_T = 1 - F(T) = e^{-\lambda T}$$

und die Exzess-Verteilungsfunktion gegeben durch

$$F_T(x) = \frac{F(x+T) - F(T)}{1 - F(T)} = \frac{e^{-\lambda T} - e^{-\lambda(x+T)}}{e^{-\lambda T}} = 1 - e^{-\lambda x} \text{ für } x > 0,$$

d.h. der Exzess ist genauso verteilt wie jedes einzelne Risiko (\rightarrow Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung).

Sind die Risiken X_1, \dots, X_n stetig über $[a, b]$ gleichverteilt mit $a < b < \infty$, so ist

$$p_T = 1 - F(T) = \frac{b - T}{b - a} \text{ für } a < T < b$$

und die Exzess-Verteilungsfunktion gegeben durch

$$F_T(x) = \frac{F(x+T) - F(T)}{1 - F(T)} = \frac{\frac{x+T-a}{b-a} - \frac{T-a}{b-a}}{1 - \frac{T-a}{b-a}} = \frac{x}{b-T} \text{ für } 0 < x < b-T,$$

d.h. der Exzess ist ebenfalls stetig gleichverteilt, jedoch über dem kleineren Intervall $[0, b - T]$.

Sind die Risiken X_1, \dots, X_n $\mathcal{Pa}(\alpha)$ -Pareto-verteilt mit $\alpha > 0$, so ist

$$p_T = 1 - F(T) = \frac{1}{(1+T)^\alpha}$$

und die Exzess-Verteilungsfunktion gegeben durch

$$F_T(x) = \frac{F(x+T) - F(T)}{1 - F(T)} = \frac{\frac{1}{(1+T)^\alpha} - \frac{1}{(1+x+T)^\alpha}}{\frac{1}{(1+T)^\alpha}} = 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{1+T}\right)^\alpha} \text{ für } x > 0,$$

d.h. der Exzess ist ebenfalls Pareto-verteilt, jedoch mit einer Skalenänderung.

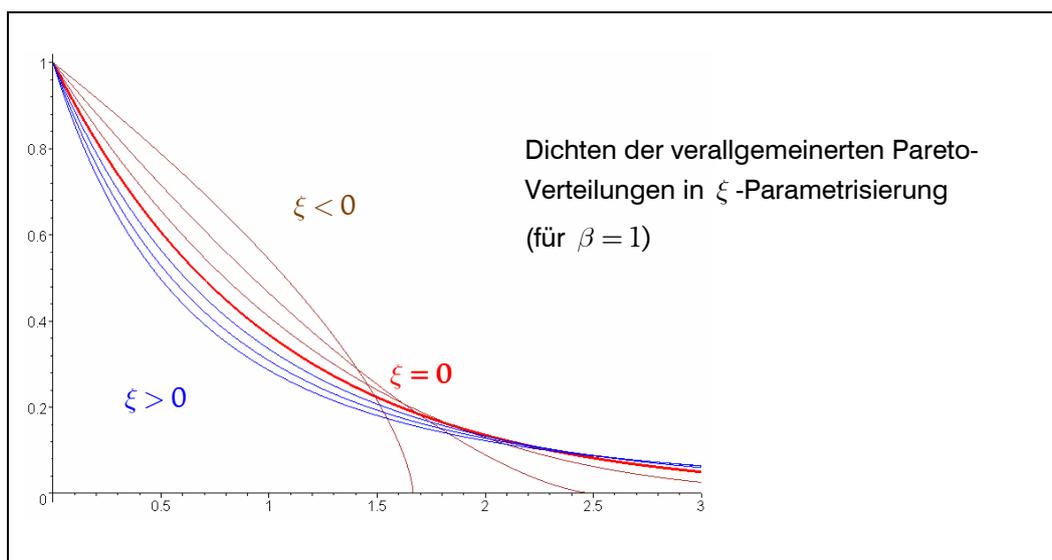
Verallgemeinerte Pareto-Verteilungen:

Eine *verallgemeinerte Pareto-Verteilung* mit den Parametern $\xi \in \mathbb{R}$ und $\beta > 0$ ist gegeben durch ihre Verteilungsfunktion

$$G_{\xi, \beta}(x) = 1 - \left(1 + \frac{\xi}{\beta} x\right)^{-1/\xi}, \quad x \in D(\xi, \beta),$$

mit dem Definitionsbereich $D(\xi, \beta) = \begin{cases} [0, \infty) & \text{für } \xi \geq 0 \\ [0, -\beta / \xi] & \text{für } \xi < 0. \end{cases}$

Der Grenzfall $\xi = 0$ entspricht der $\mathcal{E}\left(\frac{1}{\beta}\right)$ -Exponentialverteilung.



Für die (bedingte) Verteilungsfunktion des Exzesses einer *verallgemeinerten Pareto-Verteilung* gilt im Fall $\beta + \xi T > 0$:

$$F_T(x) = \frac{G_{\xi,\beta}(x+T) - G_{\xi,\beta}(T)}{1 - G_{\xi,\beta}(T)} = 1 - \left(1 + \frac{\xi}{\beta + \xi T} x\right)^{-1/\xi} = G_{\xi,\beta+\xi T}(x)$$

für $x \in D(\xi, \beta + \xi T)$, d.h. der Exzess besitzt ebenfalls eine verallgemeinerte Pareto-Verteilung, mit der Verteilungsfunktion $G_{\xi,\beta+\xi T}$.

POT-Grenzwertsatz:

Genau dann, wenn unter den Bedingungen des Satzes von Fisher-Tippett die normalisierten Maxima $Z_n = \frac{X_{n:n} - b_n}{a_n}$ eine nicht-degenerierte Grenzverteilung mit der Verteilungsfunktion G_ξ in der ξ -Parametrisierung besitzen, gilt

$$\lim_{T \rightarrow x_{\text{sup}}} \sup_{0 < x < x_{\text{sup}} - T} |F_T(x) - G_{\xi,\beta(T)}(x)| = 0$$

mit einer geeigneten positiven Funktion $\beta(T)$, die im Allgemeinen vom Threshold T abhängt.

Bemerkung:

Liegt die Grenzverteilung der normalisierten Maxima $Z_n = \frac{X_{n:n} - b_n}{a_n}$ in der Gumbel-

Klasse, kann $\beta(T) = \int_T^{x_{\text{sup}}} \frac{1 - F(u)}{1 - F(T)} du$ gewählt werden.

Folgerung:

Bei einem genügend großen Threshold T kann die Verteilungsfunktion der Risiken im Tail approximiert werden durch

$$\begin{aligned} 1 - F(x + T) &= (1 - F(T)) \cdot (1 - F_T(x)) \\ &\approx (1 - F(T)) \cdot (1 - G_{\xi,\beta(T)}(x)) = p_T \cdot (1 - G_{\xi,\beta(T)}(x)) \end{aligned}$$

für $0 < x < x_{\text{sup}} - T$. Für praktische Anwendungen sind die Parameter p_T , ξ und $\beta(T)$ geeignet aus den Daten zu schätzen.

Beispiele:

Sind die Risiken X_1, \dots, X_n $\mathcal{E}(\lambda)$ -exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$, so ist

$$x_{\text{sup}} = \infty \text{ und } F_T(x) = 1 - e^{-\lambda x} \text{ für } x > 0,$$

so dass mit $\xi = 0$ und $\beta(T) = \frac{1}{\lambda} = \int_T^\infty \frac{1-F(u)}{1-F(T)} du$ folgt:

$$F_T(x) = G_{\xi, \beta(T)}(x) \text{ für } x > 0, \text{ also } \lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{x > 0} |F_T(x) - G_{\xi, \beta(T)}(x)| = 0.$$

Sind die Risiken X_1, \dots, X_n stetig über $[a, b]$ gleichverteilt mit $a < b < \infty$, so gilt für $a < T < b$:

$$x_{\text{sup}} = b \text{ und } F_T(x) = \frac{x}{b-T} \text{ für } 0 < x \leq b-T,$$

so dass mit $\xi = -1 < 0$ und $\beta(T) = b-T$ folgt:

$$F_T(x) = G_{\xi, \beta(T)}(x) \text{ für } 0 < x < b-T, \text{ also } \lim_{T \rightarrow b} \sup_{0 < x < b-T} |F_T(x) - G_{\xi, \beta(T)}(x)| = 0.$$

Achtung: Hier gilt $\int_T^b \frac{1-F(u)}{1-F(T)} du = \frac{b-T}{2} \neq \beta(T) = b-T$.

Sind die Risiken X_1, \dots, X_n $\mathcal{Pa}(\alpha)$ -Pareto-verteilt mit $\alpha > 0$, so gilt für $a < T < b$:

$$x_{\text{sup}} = \infty \text{ und } F_T(x) = 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{1+T}\right)^\alpha} \text{ für } x > 0,$$

so dass mit $\xi = \frac{1}{\alpha} > 0$ und $\beta(T) = \frac{1+T}{\alpha}$ folgt:

$$F_T(x) = G_{\xi, \beta(T)}(x) \text{ für } x > 0, \text{ also } \lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{x > 0} |F_T(x) - G_{\xi, \beta(T)}(x)| = 0.$$

Achtung: Hier gilt für $\alpha > 1$: $\int_T^\infty \frac{1-F(u)}{1-F(T)} du = \frac{1+T}{\alpha-1} \neq \beta(T) = \frac{1+T}{\alpha}$.

Mean-Excess Funktion:

Hierunter versteht man den (bedingten) Erwartungswert des Exzesses (\rightarrow *Expected Shortfall*). Sind die Risiken wie X verteilt, gilt

$$e(T) := E(X - T | X > T), \quad T \in \mathbb{R}.$$

Bei verallgemeinerten Pareto-Verteilungen mit Verteilungsfunktion $G_{\xi, \beta}$ gilt im Fall $\xi < 1$ und $\beta + \xi T > 0$:

$e(T) = \frac{\beta + \xi T}{1 - \xi}$, d.h. die Mean-Excess Funktion ist in T linear. Auch diese Eigenschaft kann für statistische Zwecke ausgenutzt werden.

Beweisskizze:

Der Exzess hat die Verteilungsfunktion $G_{\xi, \beta + \xi T}$, also gilt mit $c = \frac{\xi}{\beta + \xi T}$ und

$$b := \begin{cases} \infty, & \xi \geq 0 \\ -\frac{1}{c}, & \xi < 0 \end{cases} \quad \text{die Herleitung}$$

$$e(T) = \int_0^b (1 - G_{\xi, \beta + \xi T}(x)) dx = \int_0^b (1 + cx)^{-1/\xi} dx = \frac{(1 + cx)^{1-1/\xi} \Big|_0^b}{c \cdot \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)} = -\frac{1}{c \cdot \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)} = \frac{\beta + \xi T}{1 - \xi}.$$

Eine andere Darstellung für die Mean-Excess Funktion ist

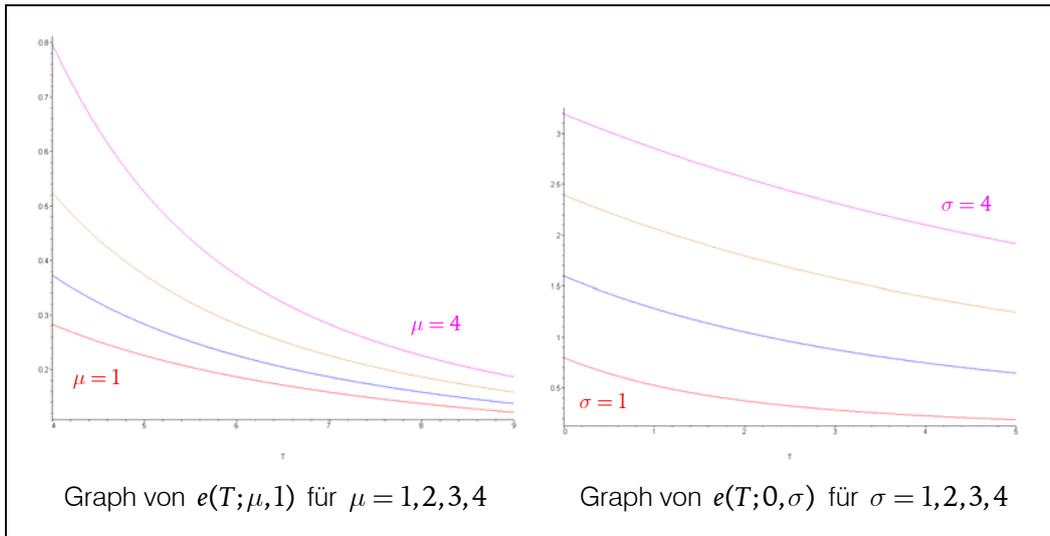
$$e(T) = E(X - T | X > T) = \frac{E(X) - E(\min\{X, T\})}{1 - F(T)}, \quad T \in \mathbb{R}.$$

Dies ist für eine Berechnung von Vorteil, weil für viele Verteilungen Formeln für $E(\min\{X, T\})$ in der Literatur vorhanden sind, z.B. in Klugman et al. (2012), Appendix A. Siehe auch Klugman et al. (2012), S. 462 unten.

Stammen die Risiken nicht aus einer verallgemeinerten Pareto-Verteilung, kann sich ein vollständig anderes Bild ergeben.

Beispiel: $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -Verteilung (mit Φ = Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung):

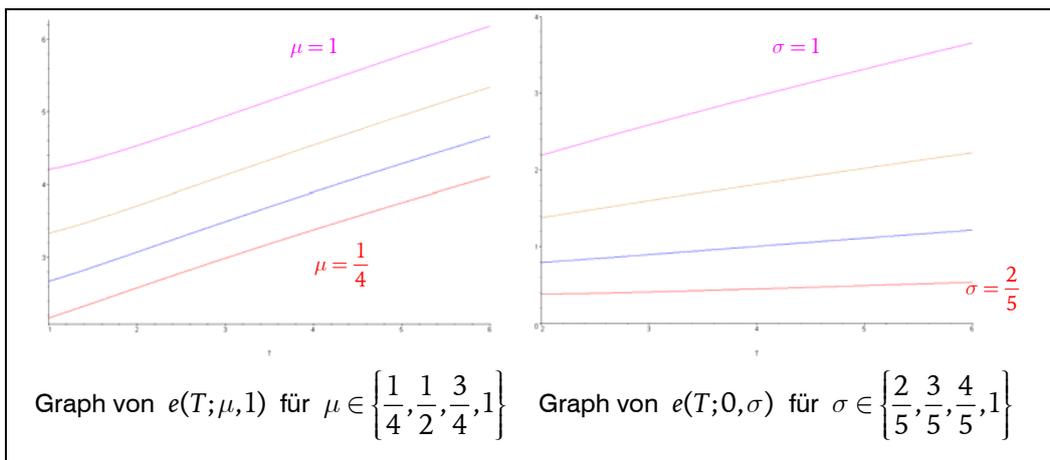
$$e(T; \mu, \sigma) = \frac{E(X) - E(\min\{X, T\})}{1 - F(T)} = \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{(T - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{T - \mu}{\sigma}\right)} - T, \quad T > \mu.$$



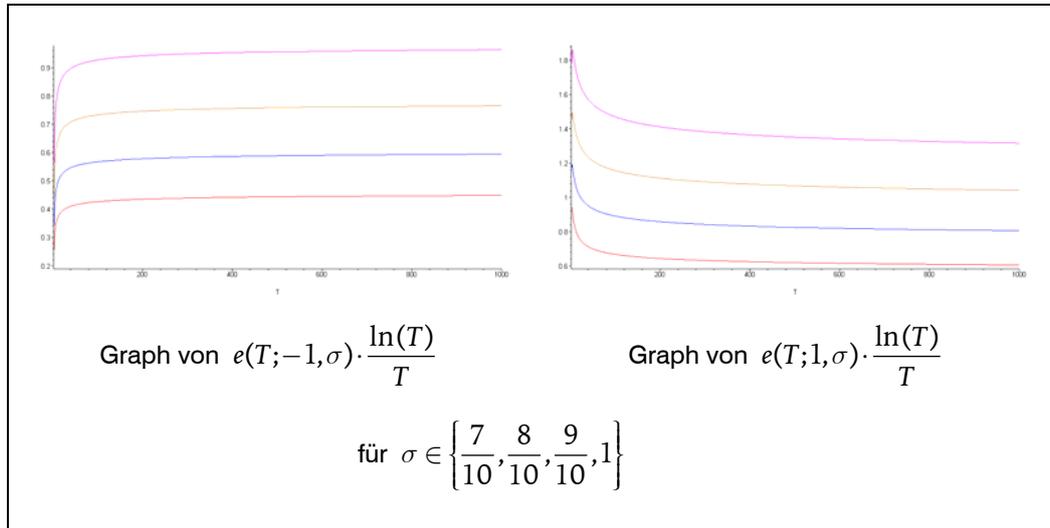
Hier strebt die Mean-Excess Funktion $e(T; \mu, \sigma) = E(X - T | X > T)$ für $T \rightarrow \infty$ immer gegen Null. Genauer gilt: $\lim_{T \rightarrow \infty} e(T; \mu, \sigma) \cdot T = \sigma^2$, unabhängig von $\mu \in \mathbb{R}$, also $e(T; \mu, \sigma) = E(X - T | X > T) \approx \frac{\sigma^2}{T}$ für große T .

Beispiel: $\mathcal{LN}(\mu, \sigma^2)$ -Verteilung (mit Φ = Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung):

$$e(T; \mu, \sigma) = \frac{E(X) - E(\min\{X, T\})}{1 - F(T)} = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{1 - \Phi\left(\frac{\ln T - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{\ln T - \mu}{\sigma}\right)} - T, T > 0.$$



Die Mean-Excess Funktion $e(T; \mu, \sigma) = E(X - T | X > T)$ ist hier auch asymptotisch nicht linear, es gilt vielmehr $\lim_{T \rightarrow \infty} e(T; \mu, \sigma) \cdot \frac{\ln(T)}{T} = \sigma^2$, unabhängig von $\mu \in \mathbb{R}$, also $e(T; \mu, \sigma) = E(X - T | X > T) \approx \frac{\sigma^2 T}{\ln(T)}$ für große T .



Konkretes Anwendungsbeispiel: Moscadelli-Studie für die von der Risk Management Group (RMG) erhobenen Daten des Baseler Komitees, Operational Risk Loss Data Collection Exercise (LDCE) aus dem Jahr 2002:

TABLE 8.3 Estimates of the threshold value, GPD parameters, goodness-of-fit statistic values, and value-at-risk measures in the Moscadelli study with 2002 LDCE data

	BL1	BL2	BL3	BL4	BL5	BL6	BL7	BL8
1. Sample Size and Threshold								
n	423	5,132	28,882	3,414	1,852	1,490	1,109	3,267
N_u	42	512	1,000	315	187	158	107	326
μ (euro '000)	400.28	193.00	247.00	270.00	110.00	201.66	235.00	149.51
2. GPD Parameter Estimates (μ; equals μ)								
ξ	1.19	1.17	1.01	1.39	1.23	1.22	0.85	0.98
β (euro '000)	774	254	233	412	107	243	314	124
3. Goodness-of-Fit Statistics								
KS test	0.099	0.027	0.020	0.058	0.028	0.064	0.060	0.033
AD test	0.486	0.508	0.675	1.541	0.247	0.892	0.217	0.291
4. Value-at-Risk								
95%VaR (euro '000)	1,222	463	176	668	230	501	511	272
99%VaR (euro '000)	9,743	3,178	826	6,479	1,518	3,553	2,402	1,229
99.9%VaR (euro '000)	154,523	47,341	8,356	159,671	25,412	58,930	17,825	11,539

Source: Moscadelli (2004, pp. 37, 40, and 49), with modifications.

Quelle: Chernobai et al. (2007), S. 174.

Literatur zur Vertiefung:

- Chernobai, A., Rachev, S. T. und Fabozzi, F. J. (2007): Operational Risk. A Guide to Basel II Capital Requirements, Models, and Analysis. Wiley, N.Y. [Kapitel 8]
- Embrechts, P., Klüppelberg, C. und Mikosch, T. (1997): Modelling Extremal Events for Insurance and Finance. Springer, Berlin. [Kapitel 3, Unterabschnitt 3.4 und Kapitel 6, Unterabschnitt 6.5.1]
- Beirlant, J., Goegebeur, Y., and Teugels, J. (2004): Statistics of Extremes. Theory and Applications. Wiley, N.Y. [Kapitel 1, Unterabschnitt 1.2.2]
- Klugman, S.A., Panjer, H.H. und Willmot, G.E. (2012): Loss Models. From Data to Decisions. Wiley, N.Y. (4. Aufl.) [Appendix A]
- Reiss, R. D. und Thomas, M. (2007): Statistical Analysis of Extreme Values With Applications to Insurance, Finance, Hydrology And Other Fields. Birkhäuser, Basel (3. Aufl.). [Kapitel 1, Unterabschnitt 1.4]

**KAPITEL 4:
SCHÄTZVERFAHREN FÜR
EXTREMWERT-VERTEILUNGEN, HILL-PLOTS**

IV. SCHÄTZVERFAHREN FÜR EXTREMWERT- VERTEILUNGEN, HILL-PLOTS

Für viele Anwendungen hat es sich als nützlich herausgestellt, Großrisiken (z.B. Naturgefahren, Operationale Risiken) durch Extremwertverteilungen zu modellieren. Sind ausreichend viele Daten vorhanden, kann z.B. ein Quantil-Quantil Plot verwendet werden, um (ggf. nach einer geeigneten Transformation)

- die Annahme einer Extremwertverteilung zu validieren und
- zugehörige Lage- und Skalenparameter (bzw. Skalen- und Formparameter) zu schätzen.

Beispiel:

Ist ein Risiko X Fréchet-verteilt, so ist das Risiko $Y = \ln(X)$ Gumbel-verteilt. Hat die Verteilung von Y den Lageparameter $\mu \in \mathbb{R}$ und den Skalenparameter $\sigma > 0$, d.h. gilt

$$F_Y(x; \mu, \sigma) = \exp\left(-\exp\left(-\frac{x - \mu}{\sigma}\right)\right) \text{ für } x \in \mathbb{R},$$

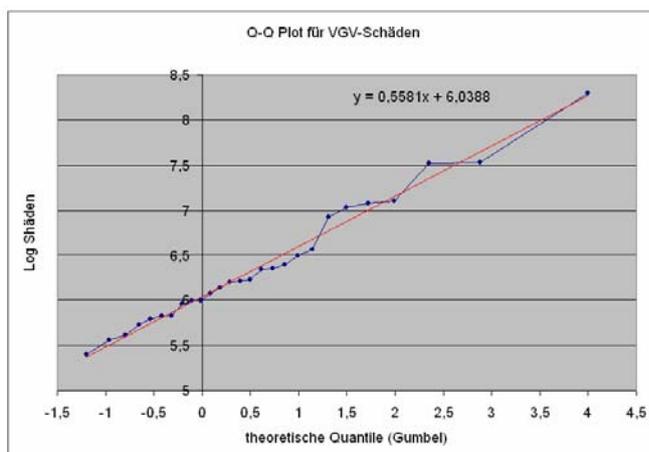
so besitzt X die Verteilungsfunktion

$$F_X(x; \mu, \sigma) = P(X \leq x) = P(Y \leq \ln x) = \exp\left(-\exp\left(-\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)\right) = \exp\left(-(e^{-\mu} x)^{-\frac{1}{\sigma}}\right)$$

für $x > 0$. Die resultierende Fréchet-Verteilung besitzt also den Skalenparameter $b = e^\mu$ und den Formparameter $\alpha = \frac{1}{\xi} = \frac{1}{\sigma}$. Zugleich ist $\xi = \sigma$ der zugehörige *extremale Index*.

Konkretes Beispiel: VGV-Sturmportfolio Deutschland (1975 - 2001, GDV)

Eine Anpassung der mit dem Bestand und dem Baukostenindex bereinigten und logarithmierten jährlichen Schadenaufwendungen (in Mio. €) an eine Gumbel-Verteilung ergibt folgenden Q-Q- Plot:



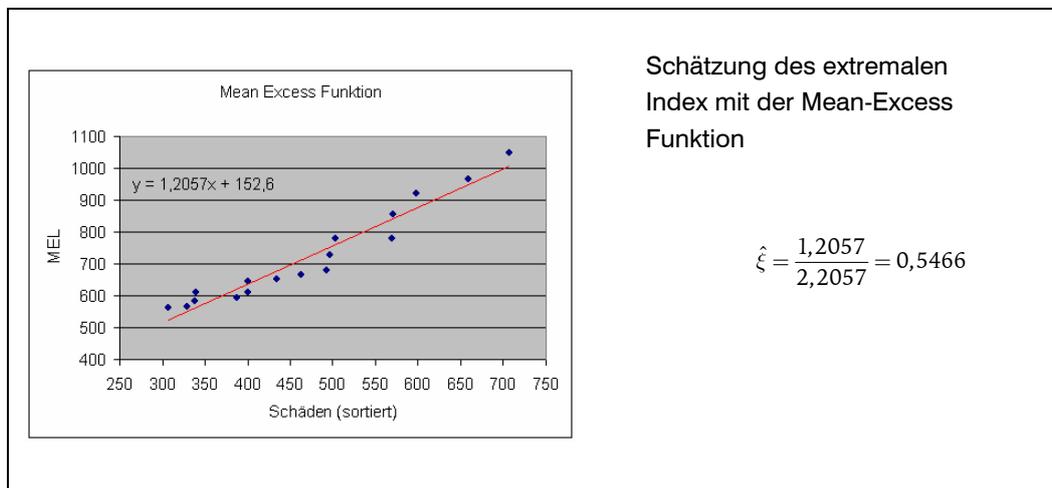
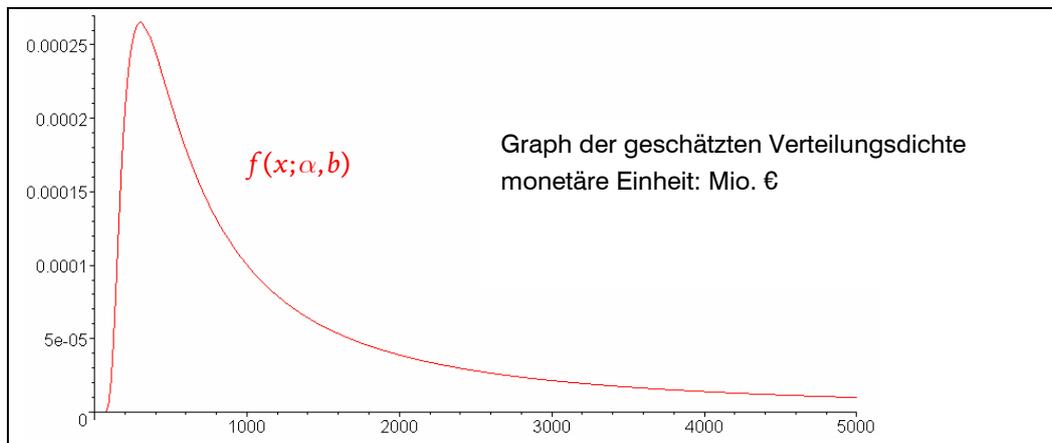
Als Parameterschätzer ergeben sich hieraus:

Extremaler Index: $\hat{\xi} = \hat{\sigma} = 0,5581$

Skalenparameter: $b = \exp(-\hat{\mu}) = 420,168$

Formparameter: $\hat{\alpha} = \frac{1}{\hat{\sigma}} = 1,7918$

Damit besitzt die Risikoverteilung einen endlichen Erwartungswert, aber keine endliche Varianz. Der geschätzte 200-Jahres-Schaden (Value at Risk zum Risikoniveau 0,5%, Solvency II-Standard) berechnet sich hieraus zu 8,057 Mrd. €.



Allgemeine Vorgehensweise:

- Sortieren der Daten → Ordnungsstatistiken $X_{1:n}, \dots, X_{n:n}$
- Mittelwertbildung $\hat{e}_k = \left(\frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^n X_{i:n} \right) - X_{k:n}$ für $k = 1, \dots, n-1$
- k so festlegen, dass die Paare $(X_{j:n}, \hat{e}_j)$ für $k \leq j \leq n$ näherungsweise einen linearen Zusammenhang ergeben
- Ausgleichsgerade mit Steigung a und Achsenabschnitt b ermitteln
- Schätzwerte $\hat{\xi} = \frac{a}{a+1}$ und $\hat{\beta} = b \cdot (1 - \hat{\xi})$ bestimmen.

Begründung:

Ist die Grenzverteilung des Exzesses eine verallgemeinerte Pareto-Verteilung mit $\xi < 1$, so gilt für genügend große k und n :

$$\hat{e}_k = \left(\frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^n X_{i:n} \right) - X_{k:n} \approx E(X - T | X > T) = e(T) = \frac{\beta + \xi T}{1 - \xi} \approx aT + b \text{ für}$$

$T \approx X_{j:n}$. Ein Koeffizientenvergleich führt zu $\frac{\xi}{1 - \xi} \approx a$, $\frac{\beta}{1 - \xi} \approx b$ und damit zu den angegebenen Schätzgleichungen.

Bemerkung:

Schätzung des Value at Risk mit der Mean Excess Funktion:

$$\widehat{\text{VaR}}_{\alpha}(X) = X_{n-k:n} + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} \cdot \left(\left(\frac{k}{n \cdot \alpha} \right)^{\hat{\xi}} - 1 \right)$$

Im GDV-Beispiel ergeben sich die (deutlich zu kleinen) Schätzwerte (in Mrd. €):

k	12	13	14	15	16	17	MW
$\widehat{\text{VaR}}_{0,005}(X)$	2,145	2,219	2,292	2,337	2,381	2,419	2,299

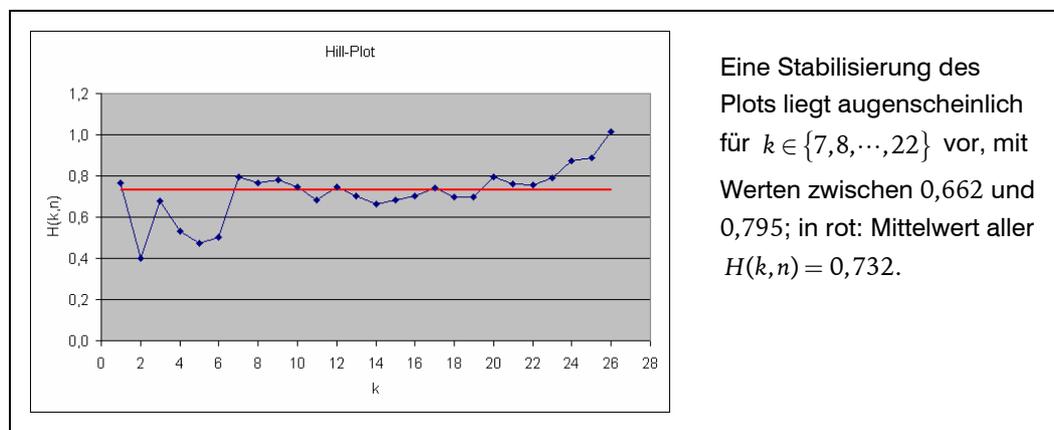
Schätzung des extremalen Index ξ mit dem Hill-Plot:

Ein sehr populärer Schätzer für ξ ist der *Hill-Schätzer* (genauer gesagt handelt es sich um eine Klasse von Schätzern), der nur von den k größten Beobachtungen (Ordnungsstatistiken) abhängt und folgendermaßen definiert ist:

$$\hat{\xi}_{k,n} = H_{k,n} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln \left(\frac{X_{n-i+1:n}}{X_{n-k:n}} \right) = \left\{ \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln(X_{n-i+1:n}) \right\} - \ln(X_{n-k:n}), \quad k \in \{1, \dots, n\}.$$

Leider schwankt auch der Hill-Schätzer mit variierendem k teilweise sehr beträchtlich; es gibt daher sowohl heuristische als auch theoretisch fundierte Empfehlungen, wie k sinnvollerweise zu wählen ist (vgl. Reiss und Thomas (2007), S. 137).

Schätzung des extremalen Index ξ mit dem Hill-Plot für die VGV-Daten:



Schätzung des Value at Risk mit dem Hill-Schätzer:

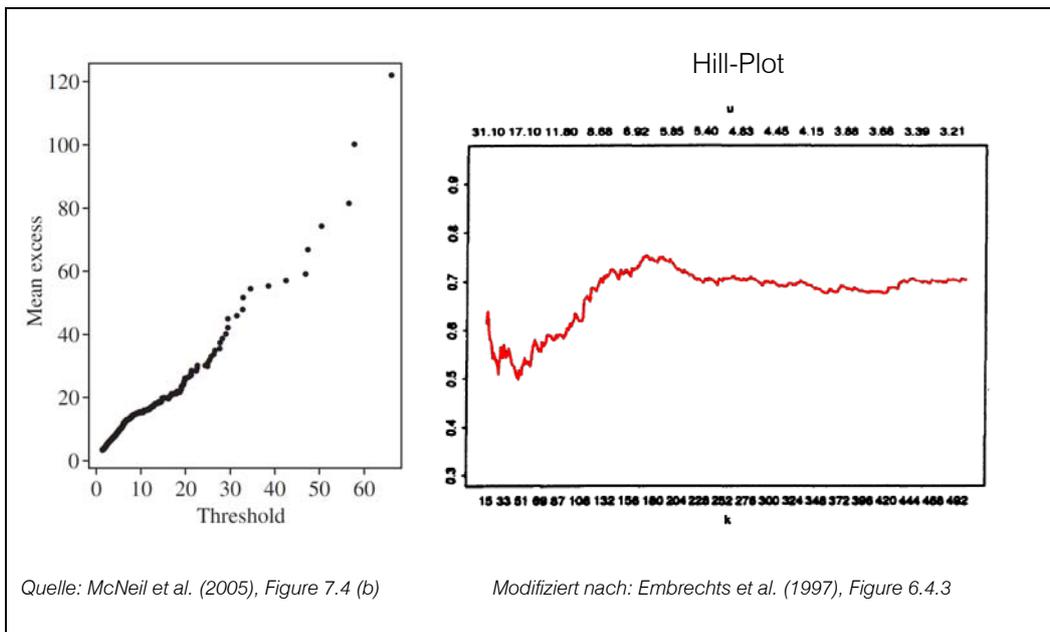
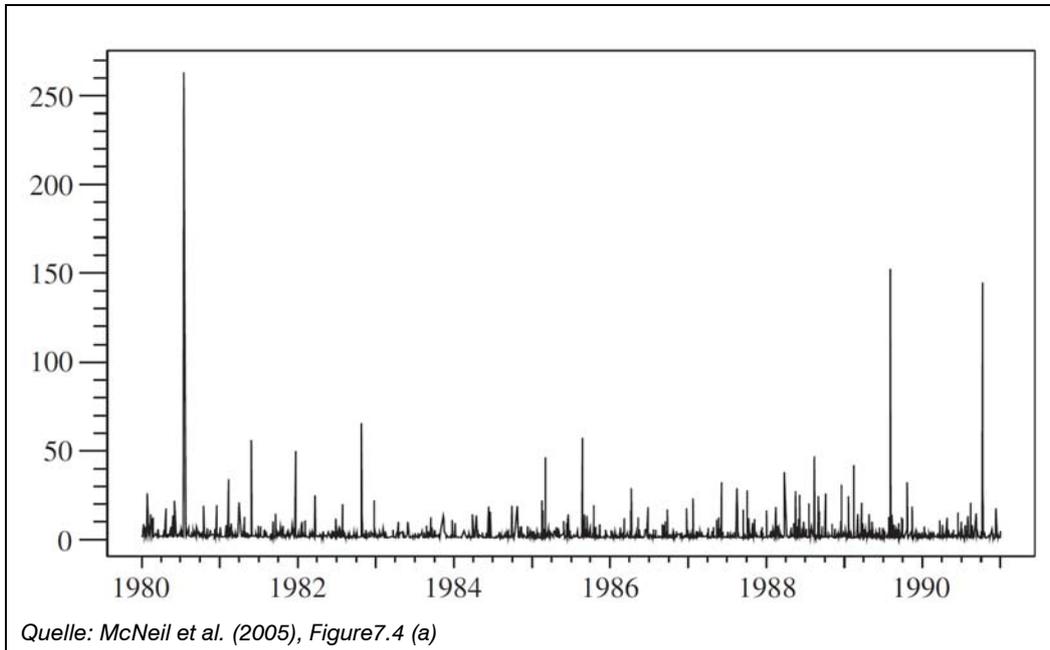
$$\widehat{\text{VaR}}_{\alpha}(X) = \left(\frac{k}{\alpha n} \right)^{\hat{\xi}_{k,n}} X_{n-k:n}$$

Für die VGV-Daten ergeben sich hier die (deutlich zu großen) Schätzer (in Mrd. €):

k	12	13	14	15	16	17	MW
$\widehat{\text{VaR}}_{0,005}(X)$	11,807	10,223	11,668	12,691	14,908	11,822	12,186

Zum Vergleich: aus dem Q-Q- Plot ergab sich $\widehat{\text{VaR}}_{0,005}(X) = 8,057$.

Beispiel: Dänische Feuerversicherung



Weitere Beispiele:

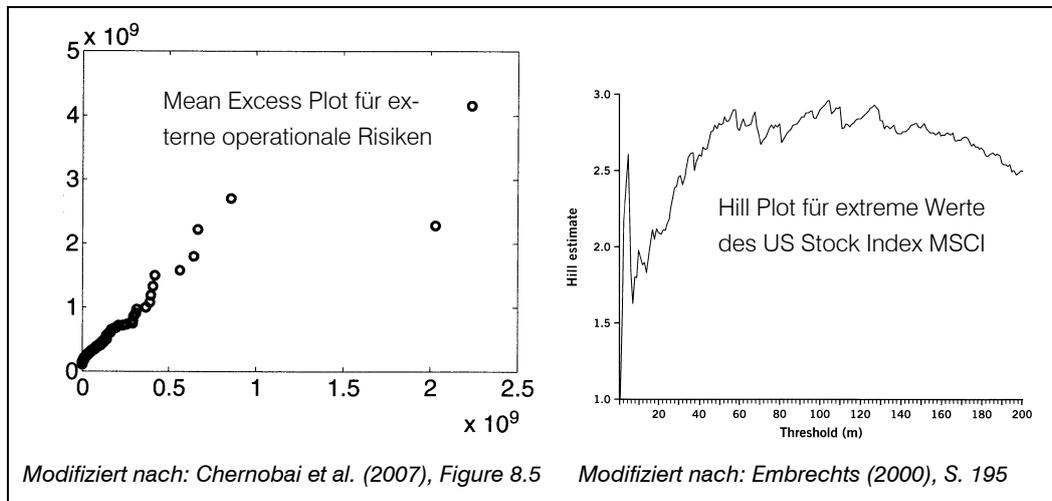


TABLE 8.1 Estimates of the parameters of the GEV distribution and corresponding goodness-of-fit statistic values in the Cruz study with fraud loss data

	1992	1993	1994	1995	1996
1. GEV Parameter Estimates					
ξ	0.9593	0.9941	1.5658	0.6795	1.0706
β	147,105.40	298,067.91	612,300.60	97,262.00	216,539.66
μ	410,279.77	432,211.40	1,101,869.17	215,551.84	445,660.38
2. Goodness-of-Fit Statistics					
KS test	0.110	0.090	0.287	0.105	0.156
V test	0.112	0.175	0.352	0.150	0.251

Cruz Studie aus Verlusten durch Betrug (2002)

Source: Cruz (2002, p. 82), with modifications.

TABLE 8.2 Sample descriptive statistics and GEV parameter estimates in the Cruz study with legal loss data

1. Sample Descriptive Statistics		2. GEV Parameter Estimates	
mean	439,725.99	ξ	0.60
st.deviation	538,403.93	β	305,088.17
skewness	4.42	μ	1,085,091.15
kurtosis	23.59		

Source: Cruz (2002, p. 84), with modifications.

Quelle: Chernobai et al. (2007), S. 173 (Basis: Hill plots).

Literatur zur Vertiefung:

- Chernobai, A., Rachev, S. T. und Fabozzi, F. J. (2007): Operational Risk. A Guide to Basel II Capital Requirements, Models, and Analysis. Wiley, N.Y. [Kapitel 8]
- Embrechts, P. (Ed.) (2000): Extremes and Integrated Risk Management. Risk Books, London.
- Embrechts, P., Klüppelberg, C. und Mikosch, T. (1997): Modelling Extremal Events for Insurance and Finance. Springer, Berlin. [Kapitel 6]
- Beirlant, J., Goegebeur, Y., and Teugels, J. (2004): Statistics of Extremes. Theory and Applications. Wiley, N.Y. [Kapitel 4, Unterabschnitt 4.2]
- McNeil, A., Frey, R. und Embrechts, P. (2015): Quantitative Risk Management. Concepts, Techniques, Tools. Revised Edition. Princeton University Press, Princeton.
- Reiss, R. D. und Thomas, M. (2007): Statistical Analysis of Extreme Values with Applications to Insurance, Finance, Hydrology and Other Fields. Birkhäuser, Basel (3. Aufl.). [Kapitel 5, Unterabschnitt 5.1]

**KAPITEL 5:
GRUNDZÜGE GEOPHYSIKALISCHER
NATURGEFAHRENMODELLE**

V. GRUNDZÜGE GEOPHYSIKALISCHER NATURGEFAHRENMODELLE

Anbieter geophysikalischer Modelle



EQECAT

EQECAT, Inc., ist ein Teil von EQE International, die wiederum zur ABS Consulting Gruppe gehört. Gegründet 1981.



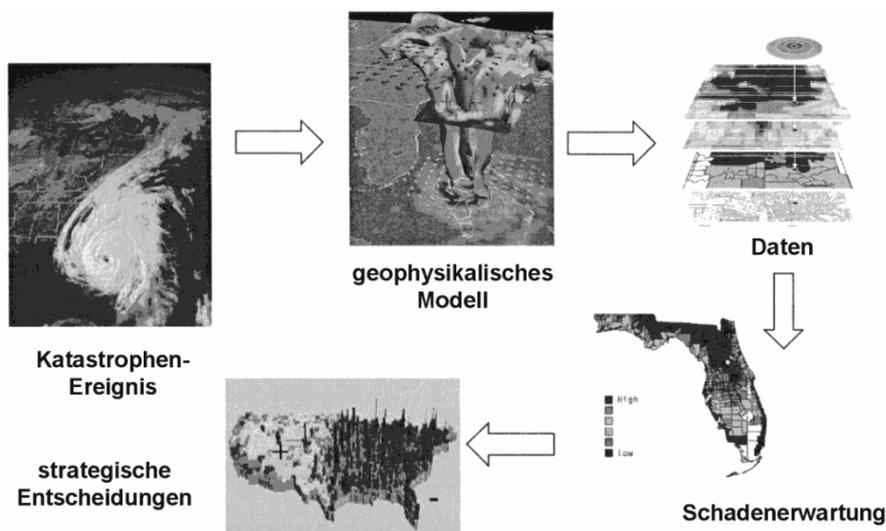
AIR (Applied Insurance Research)

AIR ist eine Tochter der Insurance Services Office, Inc. (ISO). Gegründet 1987.



RMS (Risk Management Solutions)

RMS ist eine Tochter der DMG Information, die wiederum Teil der britischen Daily Mail und General Trust, plc. Media Enterprise. Gegründet 1988 an der Universität Stanford.



Kreislaufprozess geophysikalischer Modelle

Mathematische Grundlagen: Das kollektive Modell der Risikotheorie

Im kollektiven Modell der Risikotheorie werden die folgenden zwei Aspekte betrachtet:

- die (zufällige) *Schadenfrequenz* N , das ist die Anzahl der Schäden, die sich für dasselbe versicherte Risiko in der Versicherungsperiode ereignen
- die positiven **Einzelschadenhöhen** Y_1, \dots, Y_N , die dabei eintreten.

Der Schaden pro Versicherungsperiode ist damit gegeben durch die zufällige

$$\text{Summe } X = \sum_{k=1}^N Y_k.$$

Auch hier wird zunächst wieder davon ausgegangen, dass die Einzelschadenhöhen identisch (wie Y) verteilt sind und sowohl untereinander als auch von der Schadenfrequenz stochastisch unabhängig sind.

Die Beschreibung von Risiken über Schadenfrequenz und Einzelschadenhöhe ist das charakteristische Merkmal des *kollektiven Modells der Risikotheorie*. Dieses wird auch beim *Loss Distribution Approach* zur Modellierung *Operationaler Risiken* verwendet.

Für die analytische Berechnung der Verteilung von X gibt es mehrere Möglichkeiten, von denen wir hier nur eine spezielle besprechen, nämlich die *Panjer-Rekursion* für eine *Poisson-verteilte* Schadenfrequenz (vgl. hierzu auch das Modul *Risikomodelle*).

Zur Verwendung des Panjer-Algorithmus muss die Einzelschadenhöhenverteilung geeignet *diskretisiert* werden, z. B. aufgerundet als Vielfache von 1.000 EUR oder anderen, geeigneten monetären Einheiten.

Das so diskretisierte (positive!) Risiko wird mit Y_Δ bezeichnet.

Abkürzend setzen wir noch:

$$f_k := P(Y_\Delta = k), \quad g_k := P(X_\Delta = k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Die f_k geben also die Wahrscheinlichkeiten der diskretisierten Einzelschadenhöhen wieder, die g_k die Wahrscheinlichkeiten des gesuchten (diskretisierten)

$$\text{Summenschadens } X_\Delta = \sum_{k=1}^N Y_{\Delta k}.$$

Diese Wahrscheinlichkeiten lassen sich sukzessive folgendermaßen berechnen (*Panjer-Rekursion*):

$$g_0 = e^{-\lambda}, \quad g_k = \frac{\lambda}{k} \sum_{j=1}^k j \cdot f_j \cdot g_{k-j}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Explizit:

$$\begin{aligned}
 g_0 &= e^{-\lambda} \\
 g_1 &= \lambda f_1 g_0 \\
 g_2 &= \frac{\lambda}{2}(f_1 g_1 + 2f_2 g_0) \\
 g_3 &= \frac{\lambda}{3}(f_1 g_2 + 2f_2 g_1 + 3f_3 g_0) \\
 g_4 &= \frac{\lambda}{4}(f_1 g_3 + 2f_2 g_2 + 3f_3 g_1 + 4f_4 g_0) \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Eine Besonderheit des Poisson-Frequenzmodells, das insbesondere für Naturgefahrenmodelle von Bedeutung ist, besteht in der Möglichkeit, auch Schäden aus gewissen *inhomogenen* (Teil-)Kollektiven zu aggregieren und ihre Summenverteilung explizit zu bestimmen.

Dazu nehmen wir an, dass das Gesamtkollektiv aus K in sich *homogenen* ist, aber aus unterschiedlichen *Teilkollektiven* besteht, wovon jedes für sich in folgender Art beschrieben werden kann:

- Jedes Teilkollektiv entspricht einem kollektiven Modell der Risikotheorie mit einer Poisson-verteilten Schadenfrequenz $\lambda_j > 0$ und einer Einzelschadenhöhenverteilung Q_j .
- Die Schadenfrequenzen und Einzelschadenhöhen aller Teilkollektive sind untereinander stochastisch unabhängig.

Dann lässt sich das Gesamtkollektiv beschreiben durch ein äquivalentes kollektives Modell der Risikotheorie mit der Poisson-verteilten Schadenfrequenz

$$\lambda = \sum_{j=1}^K \lambda_j$$

und der Einzelschadenhöhenverteilung

$$Q = \sum_{j=1}^K \frac{\lambda_j}{\lambda} Q_j$$

(Mischung der Einzelschadenhöhenverteilungen Q_1, \dots, Q_K mit den Gewichten $\frac{\lambda_1}{\lambda}, \dots, \frac{\lambda_K}{\lambda}$).

Beispiel:

Die Einzelschadenhöhenverteilung in einer Sturmversicherung sei gegeben durch die Dichte

$$f(x) = \frac{6x}{(1+x)^4} \text{ für } x > 0$$

mit der Verteilungsfunktion

$$F(x) = \int_0^x f(u) du = \frac{x^2(3+x)}{(1+x)^3} \text{ für } x > 0$$

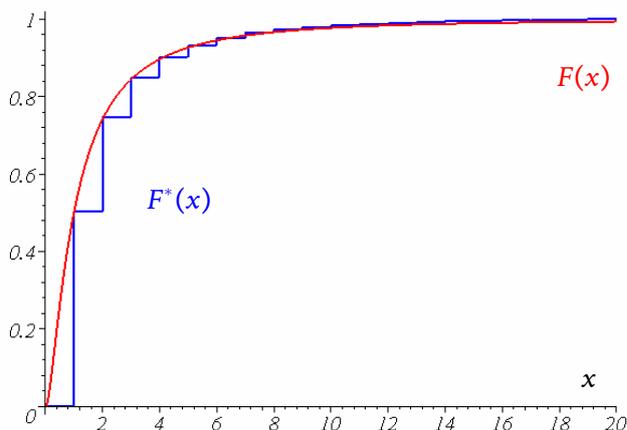
(monetäre Einheit: 1 Mio. EUR). Die Anzahl der Stürme im Jahr sei Poissonverteilt mit Erwartungswert $\lambda = 1,7$. Das Versicherungsunternehmen hat eine Reserve in Höhe von 8 Mio. EUR zur Begleichung der Sturmschäden gebildet. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der jährliche Gesamtschaden im Segment Sturm die Reserve übersteigt.

Für eine (approximative) Lösung mit der Panjer-Rekursion muss die Verteilung zunächst diskretisiert werden. Wir teilen dafür den Bereich $[0,20]$ auf der x -Achse in 20 gleich große Teilintervalle der Länge 1 ein und wählen:

$$f_k = \frac{F(k) - F(k-1)}{F(20)} \text{ für } k = 1, \dots, 20.$$

Faktisch wird die Einzelschadenhöhenverteilung damit bei 20 Mio. EUR nach oben abgeschnitten; die Division durch $F(20)$ ist dabei notwendig, damit sich alle f_k zu eins addieren.

Die folgende Grafik zeigt die Verteilungsfunktion F^* der Diskretisierung (als Treppenfunktion) zusammen mit der originären Verteilungsfunktion F :



Tabellarisch:

k	0	1	2	3	4	5	6
f_k	0	0,5033	0,2423	0,1037	0,0526	0,0301	0,0188

k	7	8	9	10	11	12	13
f_k	0,0125	0,0087	0,0063	0,0047	0,0036	0,0029	0,0023

k	14	15	16	17	18	19	20
f_k	0,0018	0,0015	0,0013	0,0011	0,0009	0,0008	0,0007

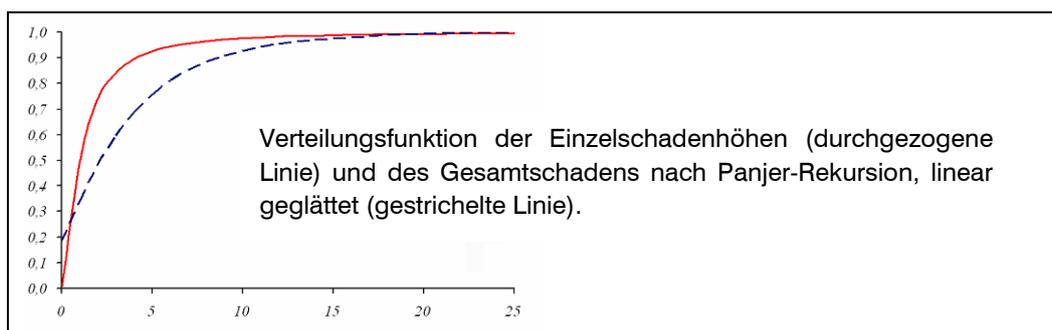
Numerisches Ergebnis der Panjer-Rekursion:

k	0	1	2	3	4	5	6
g_k	0,1827	0,1563	0,1421	0,1157	0,0910	0,0702	0,0537

k	7	8	9	10	11	12	13
g_k	0,0410	0,0314	0,0241	0,0187	0,0146	0,0115	0,0091

k	14	15	16	17	18	19	20
g_k	0,0073	0,0059	0,0048	0,0040	0,0033	0,0028	0,0023

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der jährliche Gesamtschaden im Segment Sturm die Reserve übersteigt, ist hier gegeben durch $1 - \sum_{k=0}^8 g_k = 0,11595$.



Das Poisson-Frequenzmodell spielt hier eine wesentliche Rolle, weil für die einzelnen Naturgefahren historische Szenarien (*Historic Event Sets*) vorliegen, die den homogenen Teilkollektiven des Poisson-Frequenzmodells entsprechen. Durch stochastische Perturbationen der zusammen mit den Szenarien hinterlegten geophysikalischen Parameter wie Windrichtung und Zugbahn, Windgeschwindigkeit,

Sturmdauer, Lage der Epizentren von Erdbeben, Art und Stärke der Schockwellenausbreitung usw. lassen sich hieraus leicht weitere repräsentative virtuelle Szenarien generieren (*Stochastic Event Sets*), die oft 50.000 und mehr Einträge umfassen können. Wählt man unter diesen Szenarien diejenigen aus, die ein bestimmtes Versicherungskollektiv tangieren (z. B. die gegen Sturmschäden oder Überschwemmung versicherten Gebäude einer Versicherungsgesellschaft in Norddeutschland), lassen sich auf diese Weise mit dem Computer alle wesentlichen Aspekte der Schadenverteilung für das Kollektiv berechnen oder simulieren.

Die Basisversion eines geophysikalischen Modells ist durch zwei wesentliche Eingabeparameter gekennzeichnet:

- den typischen oder durchschnittlichen Schaden L_j (*Loss*), der bei jeder Realisation des Szenarios j eintritt
- den Schadenfrequenz-Parameter λ_j (*Rate*), d. h. die erwartete Anzahl des wiederholten Eintretens des Szenarios j pro Jahr

Eine Auflistung dieser Parameter in tabellarischer Form wird üblicherweise als *Event Loss Table* (ELT) bezeichnet.

Da die Schadenfrequenzen λ_j in realen geophysikalischen Modellen relativ klein ausfallen (typischerweise deutlich unterhalb von 1), stimmen sie aufgrund der Formeln für die Poisson-Verteilung in sehr guter Näherung mit der Eintrittswahrscheinlichkeit des Szenarios j überein.

Analysis Name	Scenario	Modelled Loss	Standard Deviation	Exposed SI	Rate
Example Wind Analysis	3656	1,940,550,920	36,794,128	68,947,100,000	0.0000062953
Example Wind Analysis	3968	1,563,781,833	49,352,347	95,221,396,000	0.0000129744
Example Wind Analysis	7264	1,482,396,982	41,468,066	69,668,353,333	0.0000113048
Example Wind Analysis	7219	1,461,229,040	43,029,488	72,023,880,000	0.0000113048
Example Wind Analysis	3665	1,431,950,171	47,062,942	73,402,510,667	0.0000047371
Example Wind Analysis	7222	1,332,616,058	40,221,122	78,780,377,333	0.0000113048
Example Wind Analysis	6283	1,169,279,403	35,134,601	74,784,286,000	0.0000468744

Beispiel einer typischen *Event Loss Table*

In der Versicherungstechnik – insbesondere im Hinblick auf eine sinnvolle Rückversicherungsstruktur – sind die folgenden Schadentypen besonders interessant:

- der Jahresgesamtschaden S (*Aggregate Loss*) und
- der Jahresmaximalschaden M , der auch als Ereignisschaden (*Occurrence Loss*) bezeichnet wird.

Es hat sich eingebürgert, diese beiden Schadentypen durch die jeweilige komplementäre Verteilungsfunktion (Überschreitungswahrscheinlichkeiten) zu beschreiben, also:

$$AEP(x) = P(S > x) \text{ und } OEP(x) = P(M > x) \text{ für } x > 0.$$

Hierbei steht *AEP* für „*Aggregate Loss Exceeding Probability*“ und *OEP* für „*Occurrence Loss Exceeding Probability*“.

Das Poisson-Frequenzmodell erlaubt eine einfache Berechnung der *OEP*-Kurve, wenn die Szenarien nach Größe der Schäden L_j angeordnet sind, d. h., wenn gilt:

$$L_1 < L_2 < \dots < L_j < \dots$$

Die *OEP*-Kurve hat dann die Form:

$$P(M > L_j) = 1 - \exp\left\{-\sum_{i>j} \lambda_i\right\}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Die Verteilung des Jahresgesamtschadens S und damit die *AEP*-Kurve lässt sich bequem mit der Panjer-Rekursion berechnen, wenn die im Basismodell als deterministisch angenommenen Schäden L_j ganzzahlige Vielfache einer geeigneten monetären Einheit sind (z. B. 1.000 EUR). Die zur Rechnung benötigte Mischverteilung ist hier sehr einfach: Es ist die diskrete Verteilung mit den „Ergebnissen“ L_j

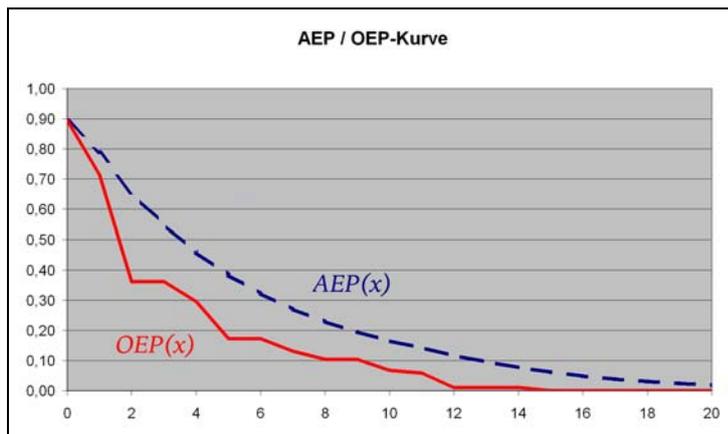
und den „Eintrittswahrscheinlichkeiten“ $\frac{\lambda_j}{\lambda}$ für $\lambda = \sum_j \lambda_j$.

Beispiel:

Für die Analyse des Sturmrisikos eines Kollektivs liegt folgende Basis-ELT vor (monetäre Einheit: 1 Mio. EUR):

Szenario j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	λ
Loss L_j	1	2	4	5	7	8	10	11	12	15	
Rate λ_j	1	0,8	0,1	0,16	0,05	0,03	0,04	0,01	0,05	0,01	2,25

Als Lösung erhält man mit dem EXCEL-Arbeitsblatt **ELT.XLS** folgende Grafik (linear geglättet):



Es ist anschaulich klar, dass die *AEP*-Kurve immer oberhalb der *OEP*-Kurve liegt, weil der Jahressummschaden S immer mindestens so groß wie der Jahresmaximalschaden M ist. Die *AEP*-Kurve ist typischerweise auch „glatter“ als die *OEP*-Kurve.

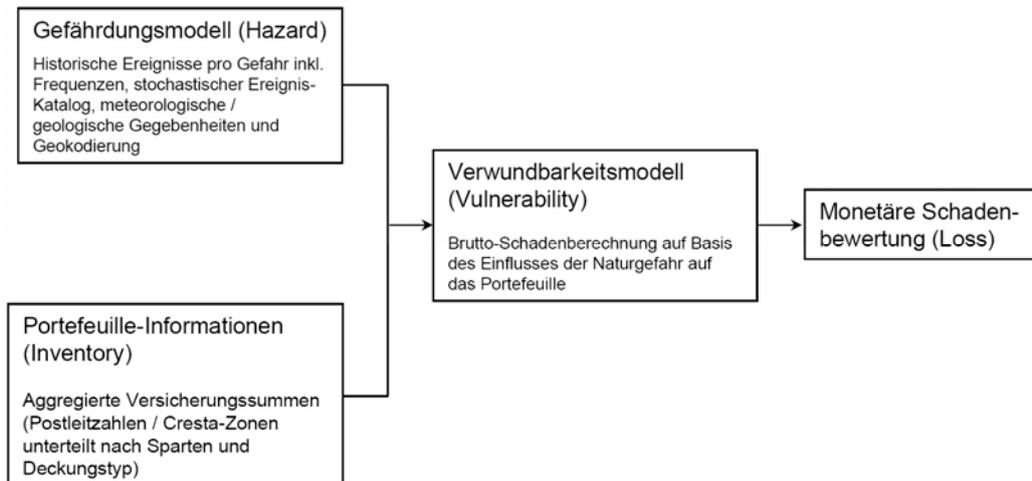
Fortgeschrittene geophysikalische Modelle enthalten neben den deterministischen Schäden L_j auch Angaben zu den Standardabweichungen oder sogar ganze Verteilungsmodelle (sogenannte *Secondary Uncertainties*).

Meist werden auch noch Varianten für die Frequenzverteilungen der Szenarien betrachtet.

Die *AEP*- und *OEP*-Kurven können dann im Allgemeinen nicht mehr explizit berechnet werden; sie werden in diesen Fällen alternativ mit Methoden der Monte-Carlo-Simulation generiert.

Formaler Aufbau geophysikalischer Modelle

Die einzelnen Komponenten eines geophysikalischen Modells folgen grundsätzlich folgendem Aufbau:



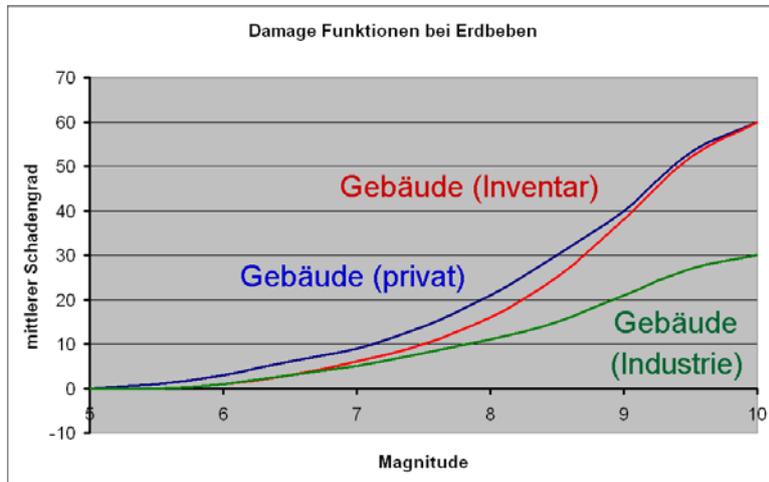
Quelle: modifiziert nach Grossi und Kunreuther (2005)

Das **Gefährdungsmodell** enthält neben den historischen und synthetischen Ereignissen (Szenarien) die Schadenfrequenz-Parameter (*Rates*) λ_j im Poisson-Frequenzmodell oder andere Angaben und Parameter für alternative Frequenzverteilungen.

Das **Inventarmodell** gibt u. a. Auskunft darüber, wo sich die versicherten Objekte befinden, welche Art von Versicherung vorliegt und wie groß die betroffenen Versicherungssummen sind.

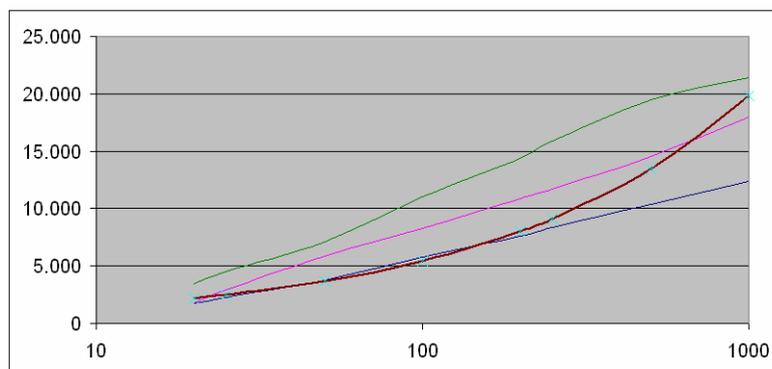
Das **Verwundbarkeitsmodell** beruht sehr wesentlich auf ingenieurwissenschaftlichen Erkenntnissen darüber, welche Schäden (Art und Höhe) je nach geophysikalischen Gegebenheiten an den versicherten Objekten entstehen können. Die dabei als Funktion von Winddruck, Windstärke, Magnitude (MMI) bei Erdbeben, Überschwemmungshöhe und -dauer usw. verwendeten Kurven zur Darstellung des Grades der Beschädigung heißen *Damage Functions* und bilden vor allem bei den kommerziellen Anbietern geophysikalischer Modelle ein Herzstück ihrer Produkte.

Das **Schadenbewertungsmodell** transferiert schließlich die Beschädigungsgrade in äquivalente Geldgrößen; hierdurch ergeben sich im Prinzip die monetären Schäden L_j (Losses).



Beispiel einer *Damage Function*

Vergleich kommerzieller Produkte mit der Analyse des GDV-Datensatzes



Value at Risk als Funktion der Wiederkehrperiode $W = \frac{1}{\alpha}$; Einheit: 1 Mio €

Quelle: AON Benfield. Hamburg

Literatur zur Vertiefung:

- Dong, W. (2001): Building a More Profitable Portfolio: Modern Portfolio Theory with Application to Catastrophe Insurance. Reactions Publishing Group, London.
- Gurenko, E.N. (Ed.) (2004): Catastrophe Risk and Reinsurance. A Country Risk Management Perspective. RISK Books, London.
- Grossi, P. und Kunreuther, H. (2005): Catastrophe Modeling: A new Approach to Managing Risk. Springer, N.Y.

KAPITEL 6: DERIVATE UND IHRE BEWERTUNG

VI. DERIVATE UND IHRE BEWERTUNG

Optionen und Arbitrage

Unter dem Sammelbegriff *Derivat* versteht man einen Finanzkontrakt zwischen einem oder mehreren Beteiligten, der vom *zukünftigen Wert* eines Wirtschaftsguts *abgeleitet* ist. Spezielle Derivate sind:

- *Forwards* und *Futures*,
- *Optionen*,
- *Swaps*.

Bei einem **Forward** verpflichtet sich der Verkäufer eines bestimmten Wirtschaftsguts gegenüber dem Käufer zur Lieferung einer festgelegten Menge zu einem festgelegten Zeitpunkt. Der Verkaufspreis kann dabei im Vorhinein oder erst zum Zeitpunkt der Lieferung festgelegt werden. Solche Verträge können unmittelbar zwischen juristischen Personen abgeschlossen werden, sind i.a. nicht standardisiert und müssen auch nicht notwendig an Börsen gehandelt werden.

Im Gegensatz dazu ist ein **Future** ein standardisierter, börsenmäßig gehandelter *Forward*, der durch ein sog. *Clearing House* als Vermittler zwischen Verkäufer und Käufer abgewickelt wird; Handelskonditionen (z.B. Preise) werden veröffentlicht.

Unter einer **Option** versteht man das Recht, eine bestimmte Menge eines bestimmten Wirtschaftsguts zu einem im Voraus festgesetzten Preis (engl. *Exercise Price*) zu kaufen (*Call-Option*) oder zu verkaufen (*Put-Option*). Darf das Recht *innerhalb einer bestimmten Frist* ausgeübt werden, spricht man von einer *Amerikanischen Option*; ist die Ausübung des Rechts auf einen *bestimmten Zeitpunkt* beschränkt, spricht man von einer *Europäischen Option*.

Die Ausübung der Option hängt i.a. davon ab, wie sich der Preis des Wirtschaftsguts z.B. an der Börse entwickelt; im Fall einer *Call-Option* wird man diese vernünftigerweise etwa nur dann ausüben, wenn der Börsenpreis des Wirtschaftsguts *über* dem vereinbarten Kaufpreis liegt, so dass sich durch die entstehende Preisdifferenz ein Vorteil für den Inhaber der Option ergibt.

Liegt der Börsenpreis dagegen *unter* dem vereinbarten Kaufpreis, wird man die Option sinnvollerweise nicht ausüben, da man das betreffende Wirtschaftsgut in diesem Fall billiger direkt an der Börse erwerben kann. Daneben gibt es eine Reihe weiterer Options-Typen, die als *Exotische Optionen* bezeichnet werden, bei denen die Ausübung des Rechts vom Verlauf der Handelspreise abhängt.

Unter einem **Swap** versteht man einen Vertrag, bei dem der simultane Kauf und Verkauf ähnlicher Wirtschaftsgüter oder Forderungen *von gleichem Finanzvolumen* zu einem festgelegten Zeitpunkt vereinbart wird. Gängige Swaps sind *Zins-Swaps*, die sich auf zukünftige Zahlungen (z.B. Kreditvergabe/Schuldenaufnahme) zwischen den Beteiligten – i.a. mit *unterschiedlichen Zinssätzen* – beziehen; *Währungs-Swaps* bezeichnen Swaps, bei denen unterschiedliche Währungen zu zukünftigen Zeitpunkten gewechselt werden.

Wir werden hier ausschließlich *Optionen* vom Europäischen Typ behandeln; in den Beispielen beziehen wir uns dabei meist auf *Aktienmärkte*. Gebühren oder andere Transaktionskosten werden hier aus Vereinfachungsgründen nicht betrachtet.

Die folgenden Bezeichnungen sind wesentlich:

T : Laufzeit; Verfalltag (engl. *Time*)

X : Ausübungspreis; Basispreis (engl. *eXercise Price*)

S_t : Preis des Wirtschaftsguts (Kurswert) zur Zeit $t \in [0, T]$ (engl. Stock Price)

i : (risikoloser) Zinssatz (engl. *Interest Rate*)

Wie schon oben erläutert, hängt die sinnvolle Ausübung des mit dem Erwerb der Option verbundenen Rechts zur Zeit T von dem Verhältnis des Kurswerts zur Zeit T zum Ausübungspreis X ab:

Call-Option:	$S_T > X$:	Option ausüben
	$S_T \leq X$:	Option nicht ausüben

Put-Option:	$S_T < X$:	Option ausüben
	$S_T \geq X$:	Option nicht ausüben

Das wesentliche Ziel besteht nun darin, den „richtigen“ Preis C_0 der Call-Option bzw. P_0 der Put-Option zurzeit 0, also zum Zeitpunkt des Erwerbs bzw. Verkaufs des entsprechenden Rechts, zu bestimmen. Dazu betrachten wir zunächst den Preis (Wert) der Option zum Verfalltag T . Da zu diesem Zeitpunkt der Kurswert des Wirtschaftsguts bekannt ist und aus dem Erwerb der Option keine Vorteile zur Zeit T abgeleitet werden sollen, ergibt sich für die entsprechenden Preise (Werte) C_T bzw. P_T :

$$C_T = \max\{S_T - X; 0\} = (S_T - X)^+ \quad (\text{Positivteil})$$

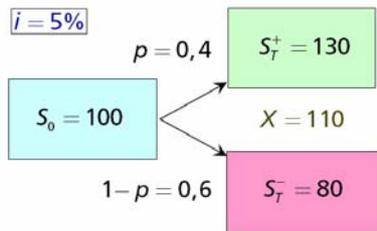
$$P_T = \max\{X - S_T; 0\} = (X - S_T)^+$$

Ist beispielsweise im Fall der Call-Option auf eine Aktie $S_T > X$, so kann der Inhaber der Option vom Stillhalter (d.h. dem Verkäufer der Option) die Lieferung einer Aktie zum Preis X verlangen und diese zeitgleich an der Börse zum höheren Preis $S_T > X$ verkaufen; sein Gewinn beträgt somit gerade $S_T - X = C_T$, **also** der Wert der Option zur Zeit T .

Aus obigem ergibt sich unmittelbar noch die folgende Beziehung zwischen Call- und Put-Preis:

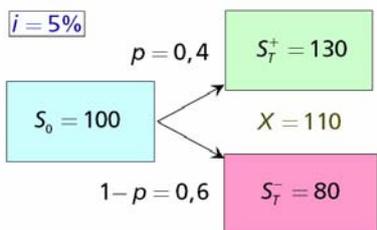
$$C_T - P_T = S_T - X \quad (\text{Put-Call-Parity-Relation})$$

Im Folgenden betrachten wir zunächst das sog. Zwei-Stufen-Ein-Perioden-Modell, d.h. wir gehen davon aus, dass der anfängliche Kurswert S_0 der Aktie bis zum Verfalltag T entweder auf den Wert $S_T^+ > S_0$ steigt oder auf den Wert $S_T^- < S_0$ fällt, wobei wir noch $S_T^- < X < S_T^+$ voraussetzen wollen. Die Wahrscheinlichkeit eines Kursanstiegs sei $p \in (0,1)$; entsprechend ist $1-p$ die Wahrscheinlichkeit für einen Kursverfall. Bei dem Beispiel links beträgt der Anfangskurs der



Aktie 100 €, mit Wahrscheinlichkeit 0,4 steigt er auf den Wert 130 € bzw. fällt mit Wahrscheinlichkeit 0,6 auf den Wert 80 €. Der Ausübungspreis betrage 110 €, der Zinssatz für die betrachtete Periode betrage 5%. Welchen Preis C_0 sollte der Käufer einer entsprechenden Call-Option bezahlen?

Betrachten wir zunächst die möglichen Werte C_T^+ und C_T^- der Call-Option zum Verfalltag. Diese können als Werte der Zufallsvariablen C_T aufgefasst werden. Im Beispiel gilt offenbar $C_T^+ = 130 - 110 = 20$ und $C_T^- = 0$. Wenn man diese Werte auf den Zeitpunkt 0 beziehen möchte, muss man sie allerdings noch diskontieren, d.h. mit dem sog. Diskontfaktor $v = \frac{1}{1+i}$ multiplizieren; man erhält

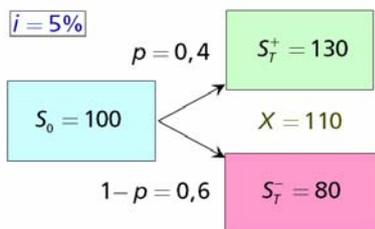


also $v \cdot C_T^+ = \frac{20}{1,05} = 19,05$ (€) und $v \cdot C_T^- = 0$

(€). Man kann nun die obige Situation als ein Spiel auffassen, in dem der Käufer der Option gegen den „Markt“ spielt. Der Optionspreis entspricht dann dem Einsatz für ein „fairen“ Spiel. Es gibt hier allerdings (mindestens) zwei Möglichkeiten, „Fairness“ zu definieren:

1. Variante eines fairen Spiels:

Der Käufer sollte im Durchschnitt weder Gewinn noch Verlust erzielen, wenn er ausschließlich mit **Optionen** handelt; demnach ist der Erwartungswert



$$C_0 = E(v \cdot C_T) = p \cdot v \cdot C_T^+ = \frac{0,4 \times 20}{1,05} = 7,62$$

der „richtige“ Optionspreis. Die Betonung bei dieser Betrachtungsweise liegt dabei auf dem Wort ausschließlich; tatsächlich lässt sich nämlich leicht zeigen, dass ein geschickter Käufer, der nicht nur mit Optionen, sondern auch mit Aktien (und Geld) handelt, mit dem obigen Options-Preis in jedem Fall einen Gewinn erzielen kann, unabhängig davon, in welche Richtung sich der Aktienkurs entwickelt! Die folgende Tabelle zeigt, wie dies hier zu bewerkstelligen ist:

$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- < X$
Leerverkauf 2 Aktien	+200,00	-260,00	-160,00
Kauf 5 Call-Optionen	-38,10	+100,00	0,00
Kredit vergeben	-161,90	+170,00	+170,00
Saldo	0,00	+10,00	+10,00

Erläuterung: Bei einem sog. **Leerverkauf** zum Zeitpunkt 0 leiht sich der Veräußerer z.B. von einer Bank Aktien gegen die Hinterlegung einer Sicherheit mit der Vereinbarung, entsprechend viele Aktien dieses Typs zu dem späteren Zeitpunkt T zurückzugeben; der Verkauf erfolgt also zum Zeitpunkt 0, zu dem dann gültigen Preis [hier: 100 €].

Ein hypothetischer Options-Käufer erzielt also zum Zeitpunkt 0 eine Einnahme von 200 € für zwei leerverkaufte Aktien, von denen er erst zum Zeitpunkt T selbst zwei auf dem Markt erwirbt, um sie dann vereinbarungsgemäß der Bank zurückzugeben. (In der Praxis fallen für solche Leerverkäufe Gebühren an, die wir in unserem Modell allerdings nicht berücksichtigen wollen.) Je nach Kursentwicklung wird sein Konto also zur Zeit T mit einem Betrag von 260 € [steigender Kurs] bzw. 160 € [fallender Kurs] belastet. Da die fünf im Gegenzug erworbenen Call-Optionen aber nur 38,10 € kosten, hat er zur Zeit 0 ein Guthaben von 161,90 €, welches er zu einem Zinssatz von 5% ausleiht und zum Zeitpunkt T einschließlich Zinsen im Gesamtwert von 170 € zurückerhält. Zum Zeitpunkt 0 ist sein Konto also mit Wert 0 ausgeglichen.

Die beiden rechten Spalten der Tabelle zeigen die Kontoentwicklung zum Zeitpunkt T . Im Fall einer Kurssteigerung wird unser Käufer sinngemäß das Kaufrecht aus den fünf erworbenen Call-Optionen ausüben; d.h. er erwirbt 5 Aktien zum vereinbarten Ausübungspreis von 110 € und verkauft sie sofort an der Börse zum aktuellen Kurs von 130 €, woraus ein Netto-Gewinn von $5 \times 20 = 100$ € resultiert. Im Fall eines sinkenden Kurses sind die Optionen natürlich wertlos.

Offensichtlich kann der Options-Käufer unabhängig von der tatsächlichen Kursentwicklung also in jedem Fall einen Netto-Gewinn von 10 € realisieren! Man spricht in einem solchen Fall auch von einer sog. **Arbitrage-Möglichkeit**, d.h. der Möglichkeit, ohne eigenen finanziellen Aufwand mit positiver Wahrscheinlichkeit ein positives Ergebnis zu erzielen.

2. Variante eines fairen Spiels:

Der Käufer sollte im Durchschnitt weder Gewinn noch Verlust erzielen, wenn er mit **Optionen, Aktien** und **Geld** handelt. Dazu betrachtet man zunächst eine Situation mit einem höheren Optionspreis als dem oben angegebenen, etwa $C_0 = 12$. Die folgende Tabelle zeigt, dass auch dann eine sichere Arbitragemöglichkeit existiert:

$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- < X$
Kauf 2 Aktien	-200,00	+260,00	+160,00
Verkauf 5 Call-Optionen	+60,00	-100,00	0,00
Kredit aufnehmen	+140,00	-147,00	-147,00
Saldo	0,00	+13,00	+13,00

Um solche **Arbitrage-Möglichkeiten** auszuschließen, wird nun ein allgemeinerer Ansatz betrachtet. Aus Gründen, die später deutlicher werden, setzt man voraus, dass $S_T^+ > r \cdot S_0$ gilt, d.h. es muss theoretisch möglich sein, am Aktienmarkt eine höhere Rendite als auf dem Geldmarkt – mit dem „risikolosen“ Zins i – zu erzielen.

$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- < X$
Leerverkauf n Aktien	$+n \cdot S_0$	$-n \cdot S_T^+$	$-n \cdot S_T^-$
Kauf m Call-Optionen	$-m \cdot C_0$	$+m \cdot (S_T^+ - X)$	0,00
Kredit vergeben	$-(n \cdot S_0 - m \cdot C_0)$	$+r \cdot (n \cdot S_0 - m \cdot C_0)$	$+r \cdot (n \cdot S_0 - m \cdot C_0)$
Saldo	0,00	0,00	0,00

Dabei ist $r = 1 + i$ der Zinsfaktor für die betrachtete Periode T . Aus den beiden rechten Spalten ergibt sich nun die Gleichung $-n \cdot S_T^+ + m \cdot (S_T^+ - X) = -n \cdot S_T^-$,

so dass das Verhältnis $h = n / m$ (sog. Hedge Ratio) eindeutig bestimmt ist zu

$$h = \frac{S_T^+ - X}{S_T^+ - S_T^-} \text{ und als Lösung für den Call-Preis zurzeit } 0 \text{ folgt } C_0 = h \cdot (S_0 - v \cdot S_T^-).$$

Dasselbe Resultat hätte man – aus Symmetriegründen – übrigens auch erhalten, wenn in der letzten Tabelle mit Aktienkauf/Optionsverkauf/Kreditaufnahme statt Aktien(leer)verkauf/Optionskauf/Kreditaufnahme gerechnet worden wäre. Im obigen Beispiel ergibt sich demnach

$$h = \frac{130 - 110}{130 - 80} = \frac{20}{50} = 0,4 \quad \text{und} \quad C_0 = 0,4 \times \left(100 - \frac{80}{1,05}\right) = 9,52.$$

Die *Hedge Ratio* gibt dabei gerade das „richtige“ Verhältnis von gehandelten Aktien zu Optionen an, hier also ein Verhältnis von $0,4 = 2:5$.

Man kann mit ähnlicher Rechnung zeigen, dass mit dem so ermittelten Call-Preis auch durch andere Aktien/Optionskombinationen keine Arbitrage erzielt werden kann.

Interessanterweise hängt der Call-Preis C_0 nach der letzten Formel gar nicht mehr von der Wahrscheinlichkeit p eines Kursanstiegs ab! Trotzdem kann man diesen Call-Preis immer noch als Erwartungswert interpretieren, wenn man die „richtige“ Wahrscheinlichkeit p^* für einen Kursanstieg entsprechend bestimmt, d.h. man betrachtet die Gleichung $C_0 = h \cdot (S_0 - v \cdot S_T^-) = p^* \cdot v \cdot C_T^+$ mit $p^* = h \frac{S_0 - v \cdot S_T^-}{v \cdot C_T^+} = \frac{r \cdot S_0 - S_T^-}{S_T^+ - S_T^-}$ als Lösung.

Nach der Voraussetzung $S_T^+ > r \cdot S_0$ ist dabei $p^* < 1$, nach der Voraussetzung $S_T^- < S_0$ ferner auch $p^* > 0$, d.h. p^* ist damit tatsächlich eine Wahrscheinlichkeit. Man beachte, dass für die letzte Ungleichung auch noch die schwächere Bedingung $S_T^- < r \cdot S_0$ ausgereicht hätte.

Im obigen Beispiel ergibt sich $p^* = \frac{105 - 80}{130 - 80} = \frac{25}{50} = 0,5$, d.h. würde die Wahrscheinlichkeit für einen Kursanstieg gerade 0,5 betragen, wäre C_0 nach der obigen allgemeinen Formel genau der Erwartungswert nach „Variante 1“.

Diese Betrachtungsweise ist charakteristisch für die gesamte Stochastische Finanzmathematik, d.h. es kommt bei der Bewertung von Derivativen (Optionen) nicht auf die tatsächlichen Wahrscheinlichkeiten p von Kursveränderungen, sondern allein auf die rechnerisch äquivalenten Wahrscheinlichkeiten p^ an, unter denen die Optionspreise nach dem Erwartungswert-Prinzip Arbitrage-Möglichkeiten ausschließen.*

Entsprechende Überlegungen lassen sich natürlich auch für Put-Optionen anstellen. Die folgende Tabelle zeigt die analoge Rechnung gleich im allgemeinen Rahmen (wieder unter der Voraussetzung $S_T^- < r \cdot S_0 < S_T^+$):

$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- < X$
Kauf n Aktien	$-n \cdot S_0$	$+n \cdot S_T^+$	$+n \cdot S_T^-$
Kauf m Put-Optionen	$-m \cdot P_0$	0,00	$+m \cdot (X - S_T^-)$
Kredit	$n \cdot S_0 + m \cdot P_0$	$-r \cdot (n \cdot S_0 + m \cdot P_0)$	$-r \cdot (n \cdot S_0 + m \cdot P_0)$
Saldo	0,00	0,00	0,00

mit der modifizierten **Hedge Ratio** $h^* = \frac{n}{m} = \frac{X - S_T^-}{S_T^+ - S_T^-} = 1 - h$ für **Put-Optionen**

und dem Put-Preis $P_0 = h^* \cdot (v \cdot S_T^+ - S_0)$.

Im obigen Beispiel erhält man also $h^* = 0,6$ und

$$P_0 = 0,6 \times \left(\frac{130}{1,05} - 100 \right) = 14,29.$$

Auch hier lässt sich mit einer analogen Rechnung wie oben zeigen, dass für den so ermittelten Put-Preis auch durch andere Kombinationen von Aktien und Optionen keine Arbitragemöglichkeit ergibt.

Für die **Put-Call-Parity-Relation** zurzeit 0 ergibt sich hieraus nebenbei noch die Beziehung $C_0 - P_0 = S_0 - v \cdot X$.

Leverage-Effekte

Jetzt wollen wir – bei gleichem Kapitaleinsatz – die Auswirkungen reiner Optionsgeschäfte gegenüber reinen Aktiengeschäften betrachten. Die Zahlen gehandelter Aktien n und gehandelter Optionen m seien also so gewählt, dass der Kapitalaufwand $K = nS_0 = mC_0$ stets gleich hoch ist. (Die Anzahlen n und m haben hier also eine andere Bedeutung als in den vorangegangenen Abschnitten.)

$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- \leq X$
Kauf n Aktien	$-nS_0$	$+nS_T^+$	$+nS_T^-$
Kredit aufnehmen	$+nS_0$	$-rnS_0$	$-rnS_0$
Saldo	0,00	$n(S_T^+ - rS_0)$	$-n(rS_0 - S_T^-)$

Reines Aktiengeschäft

$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- \leq X$
Kauf m Call-Optionen	$-mC_0$	$m(S_T^+ - X)$	0,00
Kredit aufnehmen	$+mC_0$	$-rmC_0$	$-rmC_0$
Saldo	0,00	$m(S_T^+ - X - rC_0)$	$-rmC_0$

Reines Optionsgeschäft

Setzt man die oben hergeleitete Optionspreis-Formel $C_0 = h(S_0 - vS_T^-)$ in die Ergebnisse der unteren Zeile der letzten Tabelle ein, so ergibt sich:

$$-rmC_0 = -rmh(S_0 - vS_T^-) = -mh(rS_0 - S_T^-) = -\frac{mh}{n} \times n(rS_0 - S_T^-)$$

$$m(S_T^+ - X - rC_0) = m(S_T^+ - X - h[rS_0 - S_T^-]) = \frac{mh}{n} \times n(S_T^+ - rS_0),$$

d.h. die Saldi aus reinem Aktiengeschäft und reinem Optionsgeschäft unterscheiden sich aufgrund der Beziehung $nS_0 = mC_0$, also $\frac{m}{n} = \frac{S_0}{C_0}$ genau um den Faktor

$$\tau = \frac{mh}{n} = 1 + \frac{S_T^-}{rS_0 - S_T^-} > 1.$$

Dies bedeutet:

- Bei gleichem Kapitaleinsatz sind Gewinne bzw. Verluste aus einem reinen Optionsgeschäft gegenüber einem reinen Aktiengeschäft um den Faktor $\tau > 1$ größer.
- Bei gleichem Kapitaleinsatz werden im Fall positiver Gewinne bei einem reinen Optionsgeschäft mehr Aktien bewegt als bei einem reinen Aktiengeschäft, und zwar genau $m/n = \tau/h$ mal so viele.
- Die Rendite R_O^+ aus einem Optionsgeschäft ist im Fall positiver Gewinne entsprechend größer als die Rendite R_A^+ bei einem reinen Aktiengeschäft (Hebelwirkung oder *Leverage-Effekt*). Die Renditen lassen sich dabei darstellen als:

$$R_O^+ := \frac{S_T^+ - X - C_0}{C_0} = \frac{S_T^+ - X}{C_0} - 1 = \frac{S_T^+ - S_T^-}{S_0 - vS_T^-} - 1 \quad (\text{Optionsgeschäft})$$

$$R_A^+ := \frac{S_T^+ - S_0}{S_0} = \frac{S_T^+}{S_0} - 1 < R_O^+ \quad (\text{Aktiengeschäft}).$$

Für die Negativ-Renditen im Fall von Verlusten folgt entsprechend:

$$R_O^- := \frac{0 - C_0}{C_0} = -1 \quad (\text{Optionsgeschäft; Totalverlust})$$

$$R_A^- := \frac{S_T^- - S_0}{S_0} = \frac{S_T^-}{S_0} - 1 > R_O^- \quad (\text{Aktiengeschäft}).$$

Im Anfangsbeispiel gilt etwa:

$$\begin{aligned} \tau &= 1 + \frac{80}{105 - 80} = 1 + \frac{80}{25} = 4.2 \\ \frac{\tau}{h} &= 4.2 \times \frac{130 - 80}{130 - 110} = \frac{210}{20} = 10.5 \\ R_O^+ &= \frac{130 - 110 - 10v}{10v} = \frac{20 - 10v}{10v} = \frac{20r - 10}{10} = \frac{11}{10} = 110\% \\ R_A^+ &= \frac{130 - 100}{100} = \frac{30}{100} = 30\% \\ R_O^- &= -1 = -100\% \\ R_A^- &= \frac{80 - 100}{100} = -\frac{20}{100} = -20\%. \end{aligned}$$

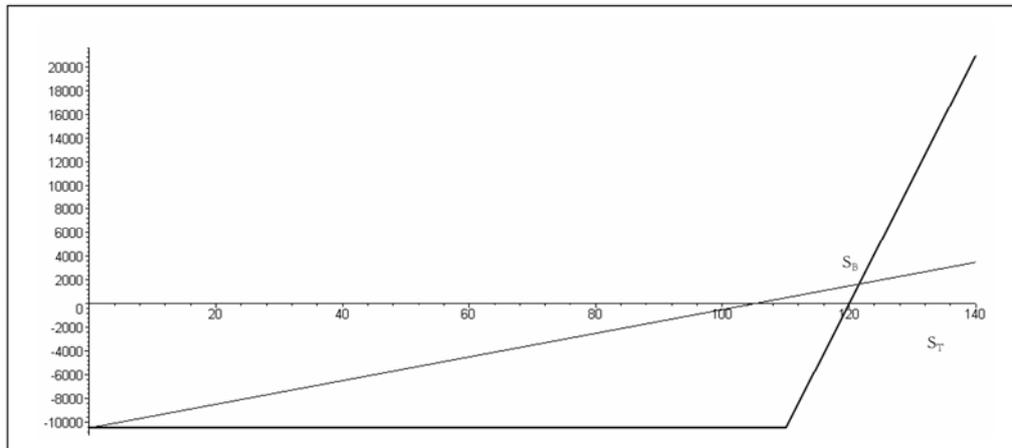
Legt man im Modell wieder die äquivalenten Wahrscheinlichkeiten p^* statt p zugrunde, so ergibt sich außerdem noch für den Gewinn bzw. Verlust G bei Handel mit n Aktien bzw. m Call-Optionen:

$$E^*(G) = n[p^*(S_T^+ - rS_0) - (1 - p^*)(rS_0 - S_T^-)] = n[p^*(S_T^+ - S_T^-) + S_T^+ - rS_0] = 0, \text{ d.h.}$$

unter p^* ist der Aktien- bzw. Optionshandel bezüglich des Gewinns im Mittel ausgeglichen, was noch einmal die Motivation für die Variante 2 des fairen Spiels aus einer anderen Sicht unterstreicht.

Die Hebelwirkung von Optionsgeschäften lässt sich besonders gut veranschaulichen, wenn man derivative Finanzinstrumente zu Spekulationszwecken einsetzt, d.h. wenn man davon ausgeht, dass der Aktienkurs zur Zeit T nicht nur den Endstand S_T^+ oder S_T^- annehmen, sondern einen beliebigen, nicht-negativen Wert erreichen kann.

Die folgende Graphik zeigt für diesen Fall die Hebelwirkung von Optionsgeschäften für die im obigen Beispiel genannten Konditionen.



Gewinn / Verlust aus Optionen (dicke Linie) und aus Aktien (dünne Linie) als Funktion des Kurswerts S_T ; $C_0 = 9,52$, $X = 110$, $K = 10000$, $i = 5\%$; $n = 100$, $m = 1050$

Die Gleichungen der beiden Geraden für die Gewinne G_A aus Aktien und G_O aus Optionen im Bereich $S_T \geq X = 110$ sind in diesem Modell gegeben durch

$$G_A = n(S_T - rS_0) = 100S_T - 10500$$

$$G_O = m[(S_T - X)^+ - rC_0] = 1050(S_T - 110) - 10500 = 1050S_T - 126000;$$

die zugehörigen Steigungen betragen also $n = 100$ [für das Aktiengeschäft] bzw. $m = n\tau / h = 1050$ [für das Optionsgeschäft]. Der Break-Even-Point S_B ergibt

sich in diesem Modell zu $S_B = \frac{mX}{m-n} = \frac{\tau X}{\tau-h} = 121,58$, d.h. das Optionsgeschäft

„lohnt“ sich erst dann, wenn der Aktienkurs zurzeit T über den Wert $S_B = 121,58$ steigt. Die Gewinnzone wird dabei beim Aktiengeschäft bereits beim Kurs von $S_T = rS_0 = 105$ erreicht, beim Optionsgeschäft dagegen erst beim Kurs von $S_T = X + rC_0 = 120$. Für Kurswerte unter dem Ausübungspreis spricht man auch davon, die Call-Option sei „aus dem Geld“ (engl.: out of the money), für Kurswerte über dem Ausübungspreis nennt man die Call-Option „im Geld“ (engl.: in the money); sind Kurswert und Ausübungspreis identisch, heißt die Call-Option „am Geld“ (engl.: at the money).

Ein Diagramm der obigen Art, in welchem Gewinne und Verluste eines Portfolios in Abhängigkeit vom aktuellen Kurs der Aktie dargestellt werden, heißt auch *Pay-off-Diagramm*.

Hedging

In der betriebswirtschaftlichen Praxis werden derivative Finanzinstrumente in der Regel weniger zu spekulativen, sondern häufiger zu werterhaltenden Zwecken eingesetzt. Man spricht dann auch von einem **Hedging** des zugrundeliegenden Portfolios (engl. *to hedge (against s.th.)*): (sich gegen etwas) absichern). Das folgende Bei-

spiel zeigt, wie man einen Bestand von Aktien mit Hilfe von Call-Optionen nicht nur gegen Kursschwankungen absichern, sondern zugleich auch den Wert wie bei Verzinsung mit dem risikolosen Zinssatz i steigern kann. Zugrunde liegt hierbei wieder die Ausgangssituation des vorigen Abschnitts, insbesondere mit dem arbitragefreien Call-Preis C_0 . Es wird dabei angenommen, dass man zur Zeit 0 im Besitz von 40 Aktien zum Kurswert 100 € je Aktie ist.

$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- < X$
Besitz 40 Aktien	+4.000,00	+5.200,00	+3.200,00
Verkauf 100 Call-Optionen	+952,38	-2.000,00	0,00
Kredit vergeben	-952,38	+1.000,00	+1.000,00
Saldo	+4.000,00	+4.200,00	+4.200,00

Die Anzahl der verkauften Call-Optionen richtet sich dabei wie zuvor nach der **Hedge Ratio**, hier also $0,4 = 40:100 = 2:5 = h$. Im Unterschied zu früher wird der Anfangssaldo dabei aber nicht zu Null gemacht, sondern entspricht dem anfänglichen Wert der gehaltenen Aktien.

Dies bedeutet, dass lediglich der durch den Verkauf der Call-Optionen erzielte Gewinn auf dem Kapitalmarkt zum risikolosen Zinssatz i angelegt wird.

Das obige Rechenbeispiel zeigt, dass sowohl im Fall des Kursanstiegs als auch in der Situation eines Kursverfalls der resultierende Saldo um 5% über dem Anfangssaldo liegt, der Portfoliowert also insgesamt entsprechend dem risikolosen Zins angestiegen ist. Die nachfolgende allgemeine Rechnung zeigt, dass dies grundsätzlich so ist, wenn das Verhältnis $n : m$ von gehaltenen Aktien zu verkauften Call-Optionen der Hedge Ratio h entspricht.

Ähnlich wie im vorigen Abschnitt lässt sich dabei zeigen, dass dies zugleich die optimale Mischung von Aktien zu Optionen ist, d.h. durch keine andere Stückzahl-Kombination lässt sich ein gleichmäßig besserer Saldo – unabhängig von der Kursentwicklung – erzielen.

$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- < X$
Besitz n Aktien	$+n \cdot S_0$	$+n \cdot S_T^+$	$+n \cdot S_T^-$
Verkauf m Call-Optionen	$+m \cdot C_0$	$-m \cdot (S_T^+ - X)$	0,00
Kredit vergeben	$-m \cdot C_0$	$+r \cdot m \cdot C_0$	$+r \cdot m \cdot C_0$
Saldo	$+n \cdot S_0$	$+r \cdot n \cdot S_0$	$+r \cdot n \cdot S_0$

Man muss die zum Zeitpunkt $t = T$ angegebenen resultierenden Saldi noch durch Rechnung nachprüfen. Dazu benutzt man die früher hergeleiteten Formeln

$$h = \frac{S_T^+ - X}{S_T^+ - S_T^-} \quad \text{und} \quad C_0 = h \cdot (S_0 - v \cdot S_T^-).$$

Damit erhält man im Falle eines Kursanstiegs

$$\begin{aligned} nS_T^+ - m \cdot (S_T^+ - X) + rmC_0 &= nS_T^+ - n \cdot (S_T^+ - S_T^-) + mh \cdot (rS_0 - S_T^-) \\ &= nS_T^+ - n \cdot (S_T^+ - S_T^-) + n \cdot (rS_0 - S_T^-) = \underline{\underline{rnS_0}} \end{aligned}$$

sowie

$$nS_T^- + rmC_0 = nS_T^- + mh \cdot (rS_0 - S_T^-) = nS_T^- + n \cdot (rS_0 - S_T^-) = \underline{\underline{rnS_0}}$$

in der Situation eines Kursverfalls, wie behauptet.

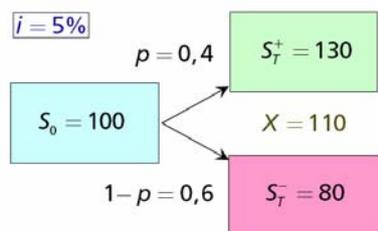
Natürlich ist ein Hedging analog auch mit Put-Optionen möglich. Die folgende Tabelle zeigt, wie in diesem Fall vorzugehen ist:

$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- < X$
Besitz n Aktien	$+n \cdot S_0$	$+n \cdot S_T^+$	$+n \cdot S_T^-$
Kauf m Put-Optionen	$-m \cdot P_0$	0,00	$+m \cdot (X - S_T^-)$
Kredit aufnehmen	$+m \cdot P_0$	$-r \cdot m \cdot P_0$	$-r \cdot m \cdot P_0$
Saldo	$+n \cdot S_0$	$+r \cdot n \cdot S_0$	$+r \cdot n \cdot S_0$

Hierbei ist für das Verhältnis $n : m$ natürlich entsprechend die **Hedge Ratio** $h^* = 1 - h$ für Put-Optionen anzuwenden.

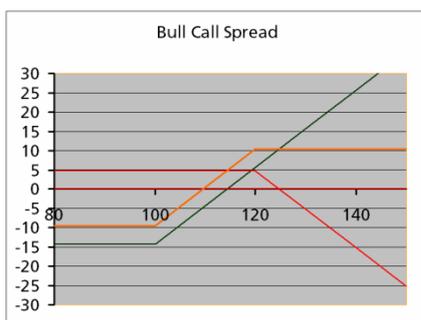
Kombinationen von Optionsgeschäften

In diesem Abschnitt werden die Auswirkungen bestimmter Kombinationen, die in der Praxis häufig anzutreffen sind, untersucht, wie z.B. gleichzeitiger Kauf und Verkauf gewisser Optionen. Ausgangspunkt der Rechnungen ist dabei wieder das

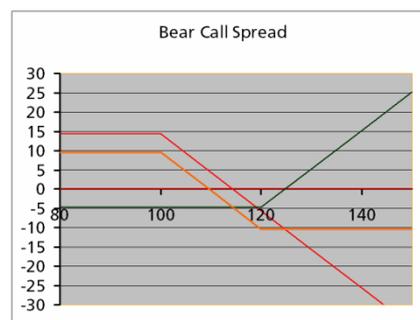


obige Eingangsbeispiel, d.h. bei der Berechnung der Optionspreise geht man von der Annahme aus, dass die zukünftigen Kurse nur zwei Werte annehmen können; man untersucht allerdings die Auswirkungen der getätigten Geschäfte für eine wesentlich größere Bandbreite möglicher zukünftiger Kurse.

Ein erster wichtiger Typ von Kombinationsgeschäften ist der sog. **Spread**; darunter versteht man den gleichzeitigen Kauf und Verkauf je einer Option desselben Typs zu unterschiedlichen Ausübungspreisen. Die Auswirkungen dieser Handelsstrategie bestehen im Wesentlichen in einer Reduzierung des Verlustrisikos bei gleichem Kapitaleinsatz, allerdings werden die Gewinn-Chancen damit ebenfalls geringer. Die folgenden beiden **Pay-off-Diagramme** zeigen die Gewinne bzw. Verluste aus einem sog. **Bull-Call-Spread** und einem sog. **Bear-Call-Spread** als Funktion des Kurswerts zur Zeit T ; im ersten Fall ist der Ausübungspreis X_1 der gekauften Option niedriger als der Ausübungspreis X_2 der verkauften Option, im zweiten Fall ist es gerade umgekehrt. Mit C_{01} und C_{02} seien dabei die zugehörigen Call-Preise bezeichnet, die sich aus dem oben hergeleiteten Ansatz [Arbitragefreiheit] ergeben.



$$\begin{aligned} X_1 &= 100 & X_2 &= 120 \\ C_{01} &= 14,28 & C_{02} &= 4,76 \end{aligned}$$

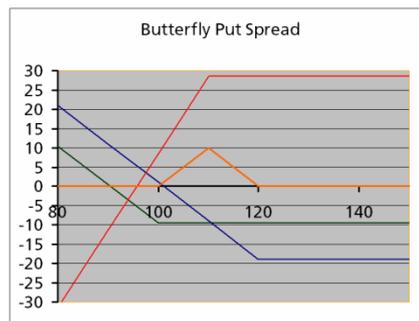
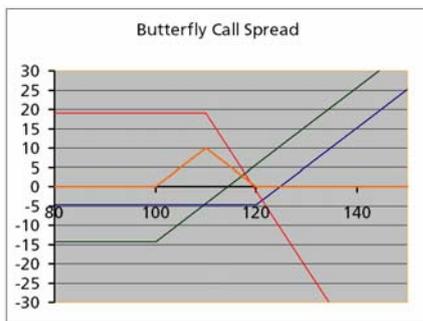


$$\begin{aligned} X_1 &= 120 & X_2 &= 100 \\ C_{01} &= 4,76 & C_{02} &= 14,28 \end{aligned}$$

In beiden Fällen betragen die absoluten Kosten $|C_{01} - C_{02}| = 9,52$, d.h. die hier betrachteten Kombinationsgeschäfte sind genau so teuer wie ein Optionsgeschäft mit nur einer gekauften Call-Option zum Ausübungspreis von $X = 110$, allerdings sind Verlust und Gewinn in beiden Fällen begrenzt durch den Wert 10. Das Risiko bei dieser Art von Optionsgeschäft ist also relativ gering, allerdings sind hier auch die Gewinnmöglichkeiten entsprechend niedrig.

Die Entscheidung für einen **Bull-** oder **Bear-Call-Spread** hängt dabei entscheidend von der Erwartung an die zukünftige Kursentwicklung ab: Geht man eher von steigenden Kursen aus, wird man sich sinnvollerweise für einen **Bull-Call-Spread** entscheiden, im umgekehrten Fall für einen **Bear-Call-Spread**. Ähnliche Darstellungen ergeben sich, wenn man mit Put-Optionen arbeitet.

Eine besonders geschickte Kombination von Optionsgeschäften besteht in dem **Butterfly-Call-Spread**, bei dem zwei Call-Optionen zu unterschiedlichen Ausübungspreisen $X_1 < X_2$ gekauft und zwei weitere Call-Optionen zu einem dazwischenliegenden Ausübungspreis X_3 mit $X_1 < X_3 < X_2$ verkauft werden. Theoretisch ist es damit möglich, einen sicheren [nicht-negativen] Gewinn zu erzielen! Das folgende **Pay-off-Diagramm** zeigt wieder den Verlauf des Gewinns in Abhängigkeit vom Kurswert.

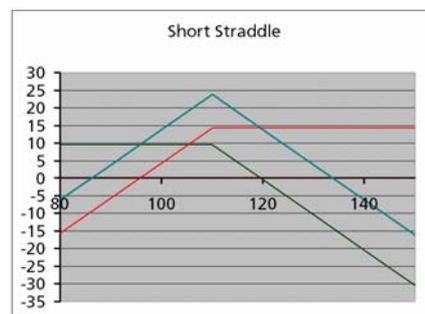
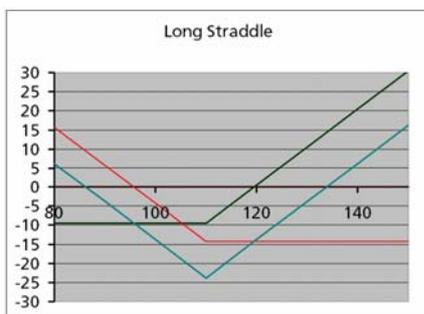


<i>gekauft</i>	<i>gekauft</i>	<i>verkauft</i>
$X_1 = 100$	$X_2 = 120$	$X_3 = 110$
$C_{01} = 14,28$	$C_{02} = 4,76$	$C_{03} = 9,52$
$P_{01} = 9,52$	$P_{02} = 19,05$	$P_{03} = 14,29$

Wie man sieht, erzielt der **Butterfly-Spread** einen sicheren positiven Gewinn für Kurse im Bereich von $X_1 = 100$ bis $X_2 = 120$, ohne einen Verlust für alle übrigen Kurswerte zu realisieren!

Die ist übrigens *kein* Widerspruch zur oben geforderten **Arbitragefreiheit**, weil sich diese nur auf die möglichen zukünftigen Kurse von 80 bzw. 130 bezieht, und man aus der Graphik bzw. der zugehörigen Rechnung deutlich erkennt, dass für diese Kurse tatsächlich auch kein Gewinn realisierbar ist. [In der „wirklichen“ Praxis scheitert dieses verlockende Geschäft allerdings an der Tatsache, dass erstens im Allgemeinen Optionspreise nicht exakt nach unserer Theorie berechnet werden, und zweitens für solche Geschäfte üblicherweise Transaktionskosten in Form von Gebühren oder Provisionen anfallen.]

Ein ähnlicher Effekt lässt sich durch den gleichzeitigen Kauf bzw. Verkauf einer Call- und einer Put-Option zum selben Ausübungspreis X erzielen (sog. **Straddle**). Im ersten Fall (**Long Straddle**) erzielt man einen positiven Gewinn, wenn der Kurswert zurzeit T stärker vom Ausübungspreis abweicht, im anderen Fall (**Short Straddle**), wenn der Kurswert nahe beim Ausübungspreis liegt. Auch hier bestimmt also die Erwartung an die zukünftigen Kursschwankungen das Anlegerverhalten.

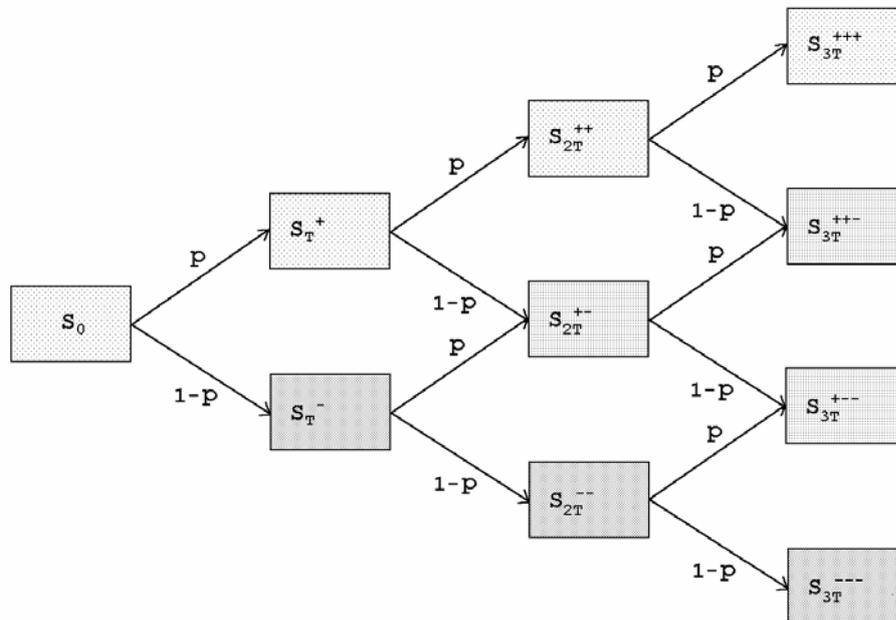


$$X = 110; C_0 = 9,52 \quad P_0 = 14,28$$

Im betrachteten Beispiel liegt die Verlust- bzw. Gewinnzone im Bereich [85,135], mit maximalem Verlust/Gewinn von $C_0 + P_0 = 23,80$ für einen Kurs von $S_T = X = 110$.

Das Mehrperiodenmodell

Das bisher betrachtete Ein-Perioden-Modell mit zwei Verzweigungszuständen ist natürlich zu einfach für eine realistische Beschreibung von (Aktien-)Kursen. Man erweitert das Modell daher zu einem Baum, bei dem Auf- und Abwärtsbewegungen der Kurse verkettet werden (sog. **Cox-Ross-Rubinstein-Modell**).



Dazu nehmen wir an, dass sich die Kurse $S_0, S_T, S_{2T}, \dots, S_{nT}$ über n Perioden stets nur prozentual verändern, d.h. man betrachtet konstante Kursänderungsraten (**Volatilitäten**)

$$k^+ = \frac{S_T^+ - S_0}{S_0} > 0, \quad k^- = \frac{S_T^- - S_0}{S_0} < 0,$$

wobei wieder Aufwärtsbewegungen des Kurses durch "+" (mit Wahrscheinlichkeit p) und Abwärtsbewegungen durch "-" (mit Wahrscheinlichkeit $1-p$) gekennzeichnet seien. Beispielsweise entsteht der Kurswert $S_{2T}^{+-} = S_{2T}^{-+}$ durch eine Aufwärts- und eine Abwärtsbewegung des Kurses, der Kurswert $S_{3T}^{++-} = S_{3T}^{+-+} = S_{3T}^{+--}$ durch zwei Aufwärts- und eine Abwärtsbewegung usw.

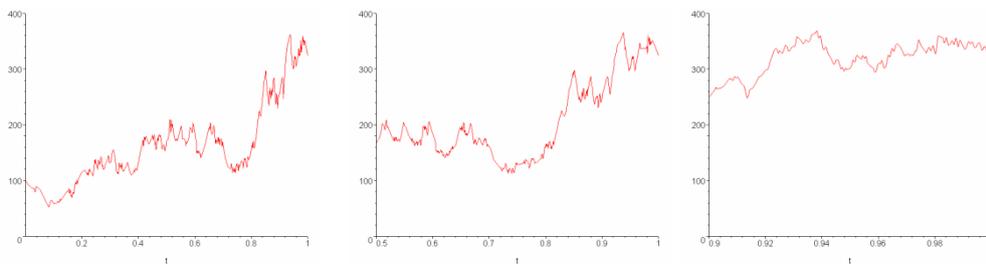
Eine Aufwärtsbewegung entspricht dabei der Multiplikation des aktuellen Kurswertes mit dem Faktor $1+k^+ > 1$, eine Abwärtsbewegung einer Multiplikation mit dem Faktor $1+k^- < 1$. Man erhält dann ein Modell mit n Perioden und $n-1$

„Endzuständen“ als potenzielle Realisation der Zufallsgröße „Kurs S_{nT} zum Ausübungszeitpunkt nT “. Wie im Fall des Ein-Perioden-Modells sind hier die möglichen Werte einer Call-Option C_{nT} zurzeit nT bekannt; es gilt analog $C_{nT} = (S_{nT} - X)^+$.

Es liegt nahe (und das kann auch theoretisch bewiesen werden), dass der „richtige“ – d.h. Arbitragemöglichkeiten ausschließende – Optionspreis zurzeit 0 wieder nach Diskontierung durch das **Erwartungswertprinzip** mit der **äquivalenten Wahrscheinlichkeit** p^* gegeben ist:

$$C_0 = E^*(v^{nT} C_{nT}) = v^{nT} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} p^{*j} (1-p^*)^{n-j} [S_0 (1+k^+)^j (1+k^-)^{n-j} - X]^+.$$

Das **Cox-Ross-Rubinstein-Modell** kann durch Vergrößerung der Periodenzahl n und Verkürzung der Zeitspannen T unter gleichzeitiger Verringerung der Volatilitäten in ein zeitstetiges Kursmodell überführt werden, das so genannte **Black-Scholes-Modell**. Dieses Modell ist das in der Finanzwelt am häufigsten verwendete Modell zur Berechnung von Optionspreisen und Preisen anderer Derivative sowie Ausgangspunkt für Zinsstrukturmodelle und wird inzwischen in abgewandelter Form auch in der Lebensversicherungsmathematik zur Bewertung von Garantien und Optionen eingesetzt. Die potenziellen Kursbewegungen sind in diesem Modell sehr erratisch; sie bestehen praktisch nur aus aneinandergefügt „Zacken“, wodurch eine – auch kurzfristige – Vorhersagbarkeit der Kursentwicklung praktisch unmöglich ist, im Einklang mit der geforderten **No-Arbitrage-Bedingung**.



Ausschnitte aus einer Simulation des Black-Scholes-Modells mit Zeitintervallen

[0 - 1]

[0,5 - 1]

[0,9 - 1]

Literatur zur Vertiefung:

- Albrecher, H., Binder, A. und Meyer, P. (2009): Einführung in die Finanzmathematik. Birkhäuser, Basel.
- Kremer, J. (2006): Einführung in die Diskrete Finanzmathematik. Springer, Berlin.
- Pfeifer, D. (2009): Diskrete Stochastische Finanzmathematik. Vorlesungsskript, Universität Oldenburg.
- Sandmann, K. (2001): Einführung in die Stochastik der Finanzmärkte. 2. Aufl., Springer, Berlin.

LITERATURVERZEICHNIS

- M. Adelmeyer (2000): Call & Put. Einführung in Optionen aus wirtschaftlicher und mathematischer Sicht. Orell Füssli, Zürich.
- H. Albrecher, A. Binder und P. Meyer (2009): Einführung in die Finanzmathematik. Birkhäuser, Basel.
- M. Auer (2008): Operationelles Risikomanagement bei Finanzinstituten. Risiken identifizieren, analysieren und steuern. Wiley VCH, Weinheim.
- Beirlant, J., Goegebeur, Y., and Teugels, J. (2004): Statistics of Extremes. Theory and Applications. Wiley, N.Y.
- A.S. Chernobai, S.T. Rachev und F.J. Fabozzi (2007): Operational Risk. A Guide to Basel II Capital Requirements, Models, and Analysis. Wiley, N.Y.
- H.A. David und H.M. Nagaraja (2003): Order Statistics. Wiley, N.Y. (3. Aufl.).
- R. Doff (Ed.) (2014): The Solvency II Handbook. Practical Approaches to Implementation. RISK Books, London.
- W. Dong (2001): Building a More Profitable Portfolio: Modern Portfolio Theory with Application to Catastrophe Insurance. Reactions Publishing Group, London.
- P. Embrechts (Ed.) (2000): Extremes and Integrated Risk Management. Risk Books, London.
- P. Embrechts, C. Klüppelberg und T. Mikosch (1997): Modelling Extremal Events for Insurance and Finance. Springer, Berlin.
- P. Grossi und H. Kunreuther (2005): Catastrophe Modeling: A New Approach to Managing Risk. Springer, Boston.
- Gurenko, E.N. (Ed.) (2004): Catastrophe Risk and Reinsurance. A Country Risk Management Perspective. RISK Books, London.
- S.A. Klugman, H.H. Panjer und G.E. Willmot (2012): Loss Models. From Data to Decisions. Wiley, N.Y. (4. Aufl.)
- J. Kremer (2006): Einführung in die Diskrete Finanzmathematik. Springer, Berlin.
- A. McNeil, R. Frey und P. Embrechts (2015): Quantitative Risk Management. Concepts, Techniques, Tools. Revised Edition. Princeton University Press, Princeton.
- D. Pfeifer (2009): Diskrete Stochastische Finanzmathematik. Vorlesungsskript, Universität Oldenburg.

- R.D. Reiss und M. Thomas (2007): *Statistical Analysis of Extreme Values with Applications to Insurance, Finance, Hydrology and Other Fields*. Birkhäuser, Basel (3. Aufl.).
- K. Sandmann (2001): *Einführung in die Stochastik der Finanzmärkte*. 2. Aufl., Springer, Berlin.