

Differentialgeometrie

Daniel Grieser

Skript zur Vorlesung im Wintersemester 2008/2009

Überarbeitet 2013 und 2016

Einleitung

Dies ist das Skript zur Vorlesung ‚Differentialgeometrie‘, die ich erstmalig im Wintersemester 2008/2009 und dann wieder 2012/2013 und 2015/2016 an der Universität Oldenburg gehalten habe. Dies ist eine erste Einführung in die Differentialgeometrie. Sie richtet sich an Hörerinnen und Hörer etwa ab dem fünften Studiensemester.

Worum geht es in der Differentialgeometrie? Geometrie ist das Studium von ‚Figuren‘. Z.B. kennt man aus der Schule die Geometrie der Dreiecke, Vierecke oder Kreise, aus der linearen Algebra die Geometrie der Geraden, Ebenen, allgemeiner der linearen oder affinen Unterräume eines Vektorraums. Die in der Differentialgeometrie untersuchten Figuren sind, allgemein gesprochen, Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Die wichtigsten Exemplare hiervon sind zunächst die Kurven in der Ebene oder im Raum, dann die (möglicherweise gekrümmten) Flächen im Raum, dann deren höherdimensionale Verallgemeinerungen, d.h. die Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n . Der Begriff ‚Riemannsche Mannigfaltigkeit‘ ist dann eine Abstraktion, welche die für die Geometrie (genauer die innere Geometrie, siehe unten) wesentlichen Eigenschaften dieser Untermannigfaltigkeiten erfasst und die unwesentlichen weglässt.

Hier sind einige Fragen, auf die wir in der Vorlesung Antworten finden werden.

- (1) Was bedeutet Krümmung? Zumindest für Kurven hat man eine anschaulichen Vorstellung davon, was stark oder weniger stark gekrümmt bedeutet. Für Flächen wird es komplizierter, da sie in verschiedenen ‚Richtungen‘ verschieden stark gekrümmt sein können, z.B. ist der Zylinder (womit die Zylinderoberfläche ohne oberen und unteren Deckel gemeint sei) entlang einem Querschnittskreis gekrümmt, nicht aber entlang einer Mantellinie.

Wie fasst man das mathematisch? Das heißt, wie kann man Krümmung quantifizieren? Wie berechnet man die Krümmung für die verschiedenen Arten, auf die eine Kurve oder Fläche gegeben sein kann (als Graph oder mittels einer Parametrisierung oder als Niveaumenge)?

- (2) Kartographen wissen seit Jahrhunderten, dass es unmöglich ist, verzerrungsfreie Landkarten von der Erde (oder auch nur von beliebigen Teilgebieten der Erde) zu zeichnen. Verzerrungsfrei heißt hierbei, dass alle Längen in derselben Proportion korrekt wiedergegeben werden, und eine Landkarte soll natürlich auf einem Blatt Papier, also einem Gebiet in der Ebene, gezeichnet sein.

Für Gebiete auf einem Zylinder gibt es dagegen verzerrungsfreie Landkarten (zumindest für solche Gebiete, die genügend klein sind, z.B. eine feste Mantellinie nicht treffen).

Was macht den Unterschied zwischen Sphäre (= Erdoberfläche) und Zylinder? Wie sieht man einer beliebigen Fläche an, ob sie verzerrungsfreie Landkarten zulässt?

- (3) Wie bestimmt man die kürzeste Verbindungslinie zweier Punkte auf einer gegebenen Fläche, die ganz innerhalb der Fläche verläuft?
- (4) Was ist der gekrümmte Raum, der zentrale Begriff der allgemeinen Relativitätstheorie, den wohl jeder schon einmal gehört hat?

Die Krümmung ist der zentrale Begriff der Differentialgeometrie. Wie wir sehen werden, bildet die Krümmung auch den Schlüssel zu Frage 2) – jedoch nicht die volle Krümmungsinformation der Fläche, sondern nur ein Teil davon, die sogenannte Gauß-Krümmung.

Das vorliegende Skript gliedert sich in drei Teile: Kurven (Kapitel 1), Flächen (Kapitel 2 und 3) und Riemannsche Mannigfaltigkeiten (Kapitel 4). Bei den Kurven und Flächen nehmen wir meist an, dass sie in der Ebene (Kurven) oder im dreidimensionalen Raum (Kurven oder Flächen) liegen, daher ist dieser Teil sehr anschaulich. Diese Theorie wird oft als ‚Elementare Differentialgeometrie‘ bezeichnet. Vieles hiervon lässt sich leicht auf Kurven im \mathbb{R}^n und auf allgemeine Hyperflächen (also $(n - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n) verallgemeinern. Die Theorie der Riemannschen Mannigfaltigkeiten, oft ‚Höhere Differentialgeometrie‘ genannt, braucht man z.B. zur Beantwortung der Frage 4), und sie stellt auch die Basis für die Verbindung zu anderen Teilen der Mathematik, z.B. der Theorie der Lie-Gruppen (eine spannende Verbindung zur Algebra) her. Im Prinzip ist es möglich, direkt mit der höheren Differentialgeometrie anzufangen. Ich halte das jedoch für wenig sinnvoll, da viele dort eingeführte Begriffe durch die Überlegungen für Kurven und Flächen erst motiviert sind.

Die Theorie der Flächen gliedert sich in zwei Teile. Im ersten Teil überlegen wir uns, wie wir sinnvoll einen Krümmungsbegriff definieren können. Hier gibt es mehrere äquivalente Antworten, die sich aus verschiedenen anschaulichen Überlegungen ergeben. Notwendigerweise beziehen sich diese Begriffe auf die Lage der Fläche im Raum, z.B. darauf, wie sich der Normalenvektor von Punkt zu Punkt ändert. Im zweiten Teil fragen wir uns, welche Eigenschaften einer Fläche ein ‚Flachländer‘ bestimmen kann, also ein Wesen, das ganz in der Fläche lebt und nicht aus ihr heraussehen kann. Zum Beispiel kann ein Flachländer nicht unterscheiden, ob er in einem ebenen Blatt Papier oder in einem zu einem Halbzylinder gekrümmten Blatt Papier lebt. Überraschenderweise kann er aber unterscheiden, ob er auf einem Stück einer Sphäre oder einem Stück der Ebene lebt! Diese Überlegungen führen zu einem der zentralen Sätze der elementaren Differentialgeometrie, dem Theorema Egregium (‘Herausragendes Theorem’) von Gauß, das unter anderem eine vollständige Beantwortung der Frage 2) erlaubt.

Der zweite Teil der Flächentheorie, die ‚innere‘ Geometrie der Flächen, bildet die Brücke zur höheren Differentialgeometrie. Dort geht es im Wesentlichen darum, die Erkenntnisse der inneren Flächentheorie auf beliebige Dimensionen zu verallgemeinern.

Zusammenfassungen der Inhalte der einzelnen Kapitel finden sich in deren Einleitungen.

Es ist ein fundamentaler Zug der Differentialgeometrie, dass sie eine geometrische und eine rechnerische Seite hat. Die Formeln werden teils recht kompliziert, und man braucht etwas Übung, um mit ihnen umzugehen. Gleichzeitig sollte man sich immer daran erinnern, dass sie geometrische Bedeutung haben, und diese Übersetzung Formel – Geometrie klar herauszustellen ist ein zentrales Ziel dieser Vorlesung.

Die Figuren der Differentialgeometrie, also die Mannigfaltigkeiten, sind glatt, dürfen also keine Ecken, Kanten oder sonstige ‚Singularitäten‘ haben. Dies mag zunächst als bedauerliche Einschränkung erscheinen. Jedoch sei erwähnt, dass das Studium von allgemeineren Figuren, die solche Singularitäten haben dürfen (manchmal ‚singuläre Räume‘ genannt), auch seinen Platz in der Mathematik hat und ein aktuelles Forschungsgebiet ist. Eine spezielle Klasse solcher singulärer Räume sind die algebraischen Varietäten, die in der algebraischen Geometrie untersucht werden (das sind im Wesentlichen die Nullstellenmengen mehrerer Polynome im \mathbb{R}^n oder \mathbb{C}^n).

Vorausgesetzte Kenntnisse: Vorausgesetzt werden gute Kenntnisse in Analysis I-III sowie in Linearer Algebra. Vielerorts, so auch in Oldenburg, wird der Begriff der Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n in Analysis II oder III eingeführt. Daher werden hier zwar die benötigten grundlegenden Definitionen und Sätze über diese formuliert und einige Beispiele gegeben, aber nicht alles im Detail bewiesen (z.B. wie der Satz über implizite Funktionen verwendet wird, um nachzuweisen, dass eine Niveaumenge eine Untermannigfaltigkeit ist).

Dieses Skript entstand mit der Mithilfe von Christina Delfs und Stefan Grahl. Vielen Dank!

Oldenburg, den 1. Oktober 2009

Daniel Grieser

Inhaltsverzeichnis

I. Kurven im \mathbb{R}^n	1
I.1. Grundbegriffe	1
I.2. Ebene Kurven	5
I.3. Kurven im Raum	8
I.4. Kurven global: Der Hopfsche Umlaufsatz	14
II. Flächen im Raum	19
II.1. Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^N	19
II.2. Grundbegriffe der Analysis auf (Unter)-Mannigfaltigkeiten	24
II.3. Erste Fundamentalform und Flächeninhalt	29
II.4. Die Krümmung von Flächen	31
Normalenvektor und Orientierbarkeit	31
Die Weingartenabbildung	32
Die zweite Fundamentalform	34
Hauptkrümmungen, Gaußkrümmung und mittlere Krümmung	37
Die Bedeutung von K und H :	39
Berechnung von g, W, II, K und H in lokalen Koordinaten: Die Indexschlacht	40
III. Die innere Geometrie von Flächen	43
III.1. Isometrien	43
III.2. Vektorfelder und kovariante Ableitung	47
III.3. Riemannscher Krümmungstensor und Theorema Egregium	53
III.4. Parallelverschiebung und Geodätische	57
III.5. Der Satz von Gauß-Bonnet	69
IV. Riemannsche Mannigfaltigkeiten	79
IV.1. Abstrakte Mannigfaltigkeiten	80
Topologie auf M	80
Funktionen und Abbildungen	83
IV.2. Der Tangentialraum	84
Lineare Struktur	86
Koordinatenwechsel für Tangentialvektoren	89
Funktionen	89
Kurven	90
IV.3. Vektorfelder	90
Integalkurven und Fluss eines Vektorfeldes	92
Der Raum der Vektorfelder	97
Ableiten einer Funktion in Richtung eines Vektorfeldes	97
Die Lie-Klammer (Kommutator von Vektorfeldern)	98
Transformation geometrischer Objekte unter Abbildungen: Push-forward und Pull-back	101
Die Lie-Ableitung und die geometrische Bedeutung der Lie-Klammer	103

IV.4. 1-Formen und Tensoren	109
IV.5. Riemannsche Mannigfaltigkeiten	118
IV.6. Kovariante Ableitungen	120
IV.7. Der Riemannsche Krümmungstensor	124

I. Kurven im \mathbb{R}^n

Die Kurven bilden die Basis für alles Folgende. Nach einführenden Überlegungen zu **Bogenlänge** und **Parametrisierungen** einer Kurve lernen wir den Begriff **Krümmung** kennen. Hierbei gibt es einen Unterschied zwischen Kurven in der Ebene und Kurven im Raum: Bei Kurven in der Ebene kann die Krümmung positiv oder negativ sein, während die Krümmung einer Kurve im Raum immer als ≥ 0 definiert ist. Dies liegt daran, dass man in der Ebene einen Begriff von ‚nach links gekrümmt‘ oder ‚nach rechts gekrümmt‘ hat, während es im Raum keinen sinnvollen analogen Begriff gibt. Für Kurven im dreidimensionalen Raum führen wir dann die **Torsion** ein, die zusätzliche Information über den Kurvenverlauf gibt. Krümmung und Torsion können entlang der Kurve variieren, sind also Funktionen auf dem Parameterintervall. Die fundamentale Bedeutung dieser Funktionen zeigt der **Hauptsatz der Kurventheorie**, der besagt, dass diese Funktionen die vollständige Information über die Kurve enthalten (bis auf starre Bewegungen der ganzen Kurve). Für ebene Kurven gibt es keine Torsion, da reicht die Krümmungsfunktion. Für den vollständigen Beweis dieses Satzes ist es sinnvoll, zunächst einige Grundbegriffe über höherdimensionale Mannigfaltigkeiten kennenzulernen, daher wird er erst im zweiten Kapitel beendet.

I.1. Grundbegriffe

Die Mathematische Beschreibung von Kurven ist auf unterschiedliche Weise möglich:

- ▷ als Funktionsgraphen - das ist zu eingeschränkt, nur lokal möglich.
- ▷ mittels einer Parametrisierung - das hat den Schönheitsfehler, dass es viele Parametrisierungen gibt.

Es wird „ausgezeichnete“ Parametrisierungen geben, die nach Bogenlänge. Zunächst wollen wir aber ein paar Grundbegriffe einführen.

I.1.1 Definition

- a) Eine **parametrisierte Kurve** ist eine glatte Abbildung $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist. **Glatt** heißt dabei unendlich oft differenzierbar (C^∞).
- b) c heißt **regulär**, wenn für alle $t \in I$ gilt $\dot{c}(t) := \frac{dc(t)}{dt} \neq 0$. $\dot{c}(t)$ ist der **Tangentialvektor** an die Kurve c im Punkt $c(t)$.

Wir nehmen C^∞ deshalb an, damit wir uns um Differenzierbarkeit keine Gedanken machen müssen und uns auf Wichtigeres konzentrieren können. Man kann aber auch von C^k -Kurven für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ sprechen. Regularität und Tangentialvektor sind aber nur für $k \geq 1$ definiert.

Bei dieser Definition können wir uns oft $t = \text{Zeit}$ vorstellen. c beschreibt die Bewegung eines Teilchens. Der Tangentialvektor $\dot{c}(t)$ ist dann der momentane Geschwindigkeitsvektor zum Zeitpunkt t .

Beispiele:

- a) $c(t) = (t, 2t) = (x(t), y(t))$ ist eine Gerade durch den Ursprung mit Steigung 2, da gilt $y(t) = 2x(t)$. Eine allgemeine Gerade durch den Punkt c_0 mit Richtungsvektor v hat die Form $c(t) = c_0 + v \cdot t$. Es gilt $\dot{c}(t) = v$ für alle t , also ist c regulär genau dann, wenn $v \neq 0$ ist.

b) $c(t) = (\cos t, \sin t)$ beschreibt einen Kreis mit Radius 1. Sie ist regulär, da $\dot{c}(t) = (-\sin t, \cos t)$ für kein t in beiden Koordinaten gleichzeitig null werden kann. Für $I = [0, 2\pi]$ wird der Kreis einmal durchlaufen, für $I = \mathbb{R}$ unendlich oft. Daher werden die Kurven mit $I = \mathbb{R}$ oder mit $I = [0, 2\pi]$ als unterschiedliche Kurven betrachtet, obwohl sie dasselbe Bild haben.

c) $c(t) = (t^2, t^3)$ beschreibt die sogenannte Neilsche Parabel. Es gilt

$$y(t) = \begin{cases} x(t)^{3/2} & \text{falls } t \geq 0 \\ -x(t)^{3/2} & \text{falls } t \leq 0. \end{cases}$$

Beachte: Das Bild von c hat eine Spitze bei $t = 0$. Es gilt $\dot{c} = (2t, 3t^2) = 0$ für $t = 0$, also ist c in diesem Punkt nicht regulär.

d) Eine parametrisierte Kurve kann sich selber schneiden, so dass $c(t_0) = c(t_1)$ gilt. Dabei ist aber im Allgemeinen nicht $\dot{c}(t_0) = \dot{c}(t_1)$, die Tangentialvektoren können in verschiedene Richtungen zeigen.

Wir interessieren uns oft nur für das Bild einer parametrisierten Kurve, aber wie am Beispiel des Kreises gesehen können viele parametrisierte Kurven das gleiche Bild haben. Allerdings können sie oft ineinander überführt werden.

I.1.2 Definition

Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve. Eine **Umparametrisierung** von c ist dann eine Kurve $\tilde{c} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Form $\tilde{c} = c \circ \varphi$, wobei $\varphi : J \rightarrow I$ eine bijektive Abbildung ist und φ, φ^{-1} glatt sind. Ein solches φ heißt **Parametertransformation**.

Beispiel: Sei $\varphi(t) = 2t$. Dann ist für eine Kurve c die Umparametrisierung \tilde{c} mit $\tilde{c}(t') = c(2t')$ dieselbe Kurve, aber mit doppelter Geschwindigkeit durchlaufen.

Bemerkung:

- ▷ Wenn \tilde{c} eine Umparametrisierung von c ist, dann ist $\text{Bild } \tilde{c} = \text{Bild } c$. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.
- ▷ Wenn φ glatt und bijektiv ist, dann sind äquivalent
 - a) φ^{-1} glatt
 - b) $\varphi'(t) \neq 0 \forall t$
 (a) \Rightarrow b) folgt aus der Kettenregel, b) \Rightarrow a) aus dem Satz über die Umkehrabbildung.)
- ▷ Wenn J das Definitionsintervall von φ ist und $\varphi'(t) \neq 0 \forall t \in J$, dann gilt aufgrund des Zwischenwertsatzes für φ' bereits $\varphi'(t) > 0 \forall t \in J$ oder $\varphi'(t) < 0 \forall t \in J$. Im ersten Fall heißt φ **orientierungserhaltend**, andernfalls **orientierungsumkehrend**. Beispielsweise ist $\varphi(t) = -t$ eine orientierungsumkehrende Parametertransformation.

I.1.3 Definition

- ▷ Eine **Kurve** ist eine Äquivalenzklasse von parametrisierten Kurven, wobei c und \tilde{c} äquivalent heißen, wenn \tilde{c} eine Umparametrisierung von c ist.
- ▷ Eine **orientierte Kurve** ist ebenfalls eine Äquivalenzklasse von parametrisierten Kurven, wobei hier c und \tilde{c} äquivalent heißen, wenn \tilde{c} eine Umparametrisierung von c mittels einer orientierungserhaltenden Parametertransformation ist.

Anschaulich kann man sich eine parametrisierte Kurve als die Route eines Teilchens (z.B. eines Busses), zusammen mit einem ‚Fahrplan‘, der angibt, wann sich das Teilchen wo befindet, vorstellen. Bei einer Kurve vergisst man den Fahrplan und auch die Fahrtrichtung. Bei einer orientierten Kurve vergisst man den Fahrplan, aber nicht die Fahrtrichtung. Diese markiert man mit einem Pfeil an der Kurve.

Wir wollen nun den Begriff der Bogenlänge einführen.

I.1.4 Definition

Sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve. Die **Länge von c** ist definiert als $L[c] := \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt$.

Motivation für diese Definition:

Zu einer Partition $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ betrachte den Polygonzug $P = P(t_0, \dots, t_k) =$ Vereinigung der Strecken $\overline{c(t_{i-1})c(t_i)}$ für $i = 1 \dots k$. Als dessen Länge ist sinnvollerweise $L[P] := \sum_{i=1}^k \|c(t_i) - c(t_{i-1})\|$ zu setzen. Wir messen, wie gut P die Kurve approximiert, mittels der **Feinheit** von P , definiert durch

$$\Delta(P) := \max_{i \in \{1, \dots, k\}} (t_i - t_{i-1})$$

Dann gilt:

I.1.5 Lemma

Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle Polygonzüge mit

$$\Delta(P) < \delta$$

gilt $|L[P] - L[c]| < \epsilon$.

Informell gesprochen: Für $\Delta(P) \rightarrow 0$ ist $L[P] \rightarrow L[c]$. Das rechtfertigt die Definition von $L[c]$.

Beweis: Nach Taylor gilt

$$c(t_i) = c(t_{i-1}) + \dot{c}(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) + R_i$$

mit

$$\|R_i\| < M \cdot (t_i - t_{i-1})^2, M = \max_{t \in [a, b]} \|\ddot{c}(t)\|.$$

Daraus folgt

$$c(t_i) - c(t_{i-1}) = \dot{c}(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) + R_i,$$

also

$$\|c(t_i) - c(t_{i-1})\| = \|\dot{c}(t_{i-1})(t_i - t_{i-1})\| + r_i$$

mit $r_i \leq \|R_i\|$. Es ergibt sich

$$L[P] = \sum_{i=1}^k \|c(t_i) - c(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^k \|\dot{c}(t_{i-1})(t_i - t_{i-1})\| + \sum_{i=1}^k r_i.$$

Für $\Delta(P) = \max(t_i - t_{i-1}) < \delta$ und $\delta \rightarrow 0$ gilt dann

$$\sum_{i=1}^k \|\dot{c}(t_{i-1})(t_i - t_{i-1})\| \rightarrow \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt = L[c]$$

(Definition des Riemann-Integrals) und

$$\left| \sum_{i=1}^k r_i \right| \leq M \cdot \sum_{i=1}^k (t_i - t_{i-1})^2 \leq M \cdot \sum_{i=1}^k \delta(t_i - t_{i-1}) = M \cdot \delta(b - a) \rightarrow 0,$$

also insgesamt $L[P] \rightarrow L[c]$. □

Wichtig im Beweis war, dass für $\delta \rightarrow 0$ automatisch die Anzahl der Teilpunkte $k \rightarrow \infty$ geht. Daher wird die Anzahl der Summanden im Restterm $\sum_{i=1}^k r_i$ für $\delta \rightarrow 0$ immer größer. Dass die Summe trotzdem gegen Null geht, liegt daran, dass k von der Ordnung δ^{-1} ist und jedes r_i von der Ordnung δ^2 , damit ist die Summe von der Ordnung δ .

I.1.6 Lemma

$L[c]$ ist unabhängig von der Parametrisierung.

Das bedeutet, dass "Länge" eine Eigenschaft von Kurven ist, nicht bloß von parametrisierten Kurven.

Beweis: Die Behauptung ist unmittelbar klar wegen der Darstellung über Polygonzüge, die unabhängig von einer Parametrisierung ist. \square

Bemerkung: Genau genommen ist die Darstellung nicht ganz unabhängig von der Parametrisierung, da sie Bezug nimmt auf die Feinheit der Unterteilung des Zeitintervalls. Man muss also zeigen: Ist $\varphi : [a', b'] \rightarrow [a, b]$ ein Parameterwechsel, so entsprechen feine Unterteilungen von $[a', b']$ feine Unterteilungen von $[a, b]$, genauer: Zu jedem $\delta > 0$ existiert ein $\delta' > 0$, so dass für alle Unterteilungen $a' = t'_0 < \dots < t'_k = b'$ mit $\max_i (t'_i - t'_{i-1}) < \delta'$ gilt, dass die Bildunterteilung $t_i = \varphi(t'_i)$ die Ungleichung $\max_i (t_i - t_{i-1}) < \delta$ erfüllt. Dies folgt unmittelbar daraus, dass φ gleichmäßig stetig ist (Übung). Da auch die Umkehrung φ^{-1} gleichmäßig stetig ist, stimmt die Aussage auch andersherum.

I.1.7 Definition

$c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **nach Bogenlänge parametrisiert**, falls $\|\dot{c}(t)\| = 1$ für alle $t \in I$ gilt.

Bemerkung: Das ist äquivalent dazu, dass für alle $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 < t_2$ gilt

$$L[c|_{[t_1, t_2]}] = t_2 - t_1.$$

Denn einerseits gilt $L[c|_{[t_1, t_2]}] = \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{c}(t)\| dt = \int_{t_1}^{t_2} 1 dt = t_2 - t_1$.

Umgekehrt sei $t = t_2$, dann ist $t - t_1 = L[c|_{[t_1, t]}] = \int_{t_1}^t \|\dot{c}(t')\| dt'$. Leite nach t ab, dann folgt $1 = \|\dot{c}(t)\|$.

I.1.8 Lemma

Jede reguläre Kurve kann nach Bogenlänge parametrisiert werden.

Beweis: Sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben. Für $t \in [a, b]$ sei $\psi(t) = L[c|_{[a, t]}] = \int_a^t \|\dot{c}(r)\| dr$. Da $\dot{\psi}(t) = \|\dot{c}(t)\| \neq 0$ gilt, ist ψ invertierbar. Setze $\tilde{c}(s) = c(\psi^{-1}(s))$. Sei $s_1 < s_2$, $t_1 = \psi^{-1}(s_1)$ und $t_2 = \psi^{-1}(s_2)$.

Dann ist $s_2 - s_1 = \psi(t_2) - \psi(t_1) = L[c|_{[a, t_2]}] - L[c|_{[a, t_1]}] = L[c|_{[t_1, t_2]}] = L[\tilde{c}|_{[s_1, s_2]}]$, also ist \tilde{c} eine Parametrisierung nach Bogenlänge. \square

In Kurzschreibweise setzen wir $s = s(t) = \int_a^t \|\dot{c}(t')\| dt'$ und ermitteln die Umkehrfunktion $t(s)$. Dann ist $\tilde{c}(s) = c(t(s))$ nach Bogenlänge parametrisiert.

Beispiel: Der Kreis mit Radius R hat auf $I = [0, 2\pi]$ die Parametrisierung $c(t) = (R \cos t, R \sin t)$ und es gilt $\|\dot{c}(t)\| = R$. Setze $s = \int_0^t R dt' = tR$. Dann ist $t(s) = \frac{s}{R}$ und somit $\tilde{c}(s) = (R \cos \frac{s}{R}, R \sin \frac{s}{R})$ eine Parametrisierung nach Bogenlänge.

Im Folgenden werden wir bei einer allgemeinen Parametrisierung immer die Variable t und bei einer Parametrisierung nach Bogenlänge die Variable s verwenden. $\dot{c} = \frac{dc}{dt}$ ist der Tangentenvektor. Den Einheitstangentenvektor $\frac{d\tilde{c}}{ds}$ bezeichnen wir oft mit T .

Bemerkung: Man sieht leicht, dass die Parametrisierung nach Bogenlänge *eindeutig ist bis auf Zeitverschiebung und Zeitumkehr*; genauer: ist c nach Bogenlänge parametrisiert, so sind auch

▷ Zeitverschiebung: $\tilde{c}(s) = c(s + s_0)$ mit $s_0 \in \mathbb{R}$ beliebig

▷ Zeitumkehr: $\tilde{c}(s) = c(-s)$

▷ Zeitverschiebung und -umkehr: $\tilde{c}(s) = c(-s + s_0)$

nach Bogenlänge parametrisiert, und jede Bogenlängeparametrisierung ist von einer dieser Formen.

I.2. Ebene Kurven

Wir betrachten in diesem Kapitel den Fall $n = 2$.

Kurven der Form $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ heißen ebene Kurven. Sie haben den Vorteil, dass es bei ihnen genau eine Normalenrichtung gibt. Im \mathbb{R}^3 gibt es bereits eine ganze Normalenebene.

I.2.1 Definition

- Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ nach Bogenlänge parametrisiert. Dann ist $T(s) := \dot{c}(s)$ der **Einheitstangentenvektor** an c in s .
- Bei $n = 2$ sei $N(s) := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} T(s)$ der um 90° positiv gedrehte Tangentialvektor, der sogenannte **Einheitsnormalenvektor** an c in s .

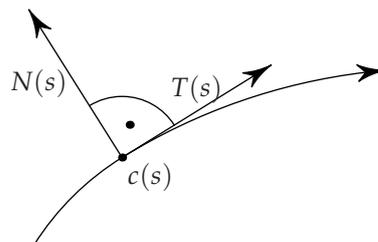


Abbildung I.1.: Tangentialvektor und Normalenvektor an eine Kurve

Offenbar ist $\|T(s)\| = \|N(s)\| = 1$ für alle $s \in I$. Wir wollen nun die Krümmung einer Kurve definieren. Anschaulich ist uns klar, was es in der Ebene bedeutet, dass eine Kurve stark oder weniger stark gekrümmt ist.

Man könnte es als schnelle bzw. langsame Richtungsänderung auf gleicher Strecke bezeichnen. Das würde auch dazu passen, dass eine Gerade die Krümmung null haben sollte.

Die Krümmung in einem Punkt der Kurve setzen wir also als Änderungsgeschwindigkeit des Tangentenvektors an. Dafür betrachten wir bei einer nach Bogenlänge parametrisierten Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ den Vektor $\dot{T}(s) = \frac{dT(s)}{ds}$. Die Krümmung soll allerdings kein Vektor, sondern eine Zahl sein.

Eine solche erhalten wir mit Hilfe der folgenden zentralen (im \mathbb{R}^n gültigen!) Rechnung. Wir nennen

dies die **Standardrechnung**.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds} 1 = \frac{d}{ds} \|T(s)\|^2 \\ &= \frac{d}{ds} \langle T(s), T(s) \rangle \\ &= \left\langle \frac{d}{ds} T(s), T(s) \right\rangle + \left\langle T(s), \frac{d}{ds} T(s) \right\rangle \\ &= 2 \cdot \langle \dot{T}(s), T(s) \rangle \end{aligned}$$

Also gilt $\dot{T}(s) \perp T(s)$. Für $n = 2$ ist außerdem auch $N(s) \perp T(s)$, also gibt es genau eine Zahl $\kappa(s)$ mit $\dot{T}(s) = \kappa(s) \cdot N(s)$.

I.2.2 Definition

Die Kurve c sei nach Bogenlänge parametrisiert. Die **Krümmung** von c in s ist die Zahl $\kappa(s)$ mit $\dot{T}(s) = \kappa(s) \cdot N(s)$. κ ist also eine Abbildung $I \rightarrow \mathbb{R}$.

Man kann $\kappa(s)$ auch mittels $\kappa(s) = \langle \dot{T}(s), N(s) \rangle$ bestimmen, da aus $\dot{T}(s) = \kappa(s)N(s)$

$$\langle \dot{T}(s), N(s) \rangle = \langle \kappa(s)N(s), N(s) \rangle = \kappa(s) \|N(s)\|^2 = \kappa(s)$$

folgt.

Beispiele:

- ▷ Sei $c(s) = c_0 + s \cdot v$ mit $\|v\| = 1$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Gerade. Es ist $T(s) = \dot{c}(s) = v$ und somit $\dot{T}(s) = 0$. Also gilt $\kappa(s) = 0$ für alle s .
- ▷ Sei $c(s) = (R \cos \frac{s}{R}, R \sin \frac{s}{R})$ die Bogenlängenparametrisierung des Kreises mit Radius R . Dann ist $T(s) = (-\sin \frac{s}{R}, \cos \frac{s}{R})$ und $\dot{T}(s) = (-\frac{1}{R} \cos \frac{s}{R}, -\frac{1}{R} \sin \frac{s}{R})$. Da außerdem nach obiger Definition $N(s) = (-\cos \frac{s}{R}, -\sin \frac{s}{R})$ gilt, folgt daraus $\dot{T}(s) = \frac{1}{R} N(s)$. Also ist $\kappa(s) = \frac{1}{R}$ die Krümmung für den in positiver Richtung durchlaufenen Kreis. Sie ist konstant.

Bemerkung: ▷ Ändert man den Durchlaufsin von c , so kehrt sich das Vorzeichen von κ um.

Denn sei c gegeben und \tilde{c} eine Umparametrisierung von c mit $\tilde{c}(s) = c(-s)$. Dann ist offensichtlich $\tilde{T}(s) = \dot{\tilde{c}}(s) = -\dot{c}(-s) = -T(-s)$ und damit auch $\tilde{N}(s) = -N(-s)$.

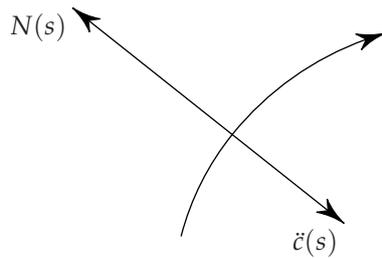
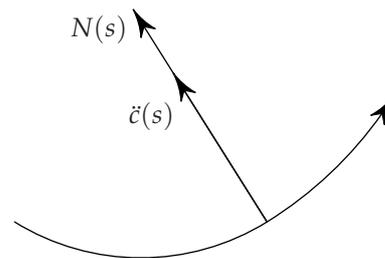
Nach der Kettenregel folgt jetzt $\dot{\tilde{T}}(s) = -(-\dot{T}(-s)) = \dot{T}(-s)$ und somit aus $\dot{T}(s) = \kappa(s) \cdot N(s)$ sofort $\dot{\tilde{T}}(s) = \kappa(-s) \cdot N(-s) = -\kappa(-s) \cdot \tilde{N}(s)$.

- ▷ Interpretation mittels des Winkels:

Sei $c : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben. Sei $\alpha : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ glatt mit $T(s) = (\cos \alpha(s), \sin \alpha(s))$. Das bedeutet, dass α der Winkel zwischen $T(s)$ und einer horizontalen Geraden durch $c(s)$ ist. Dann folgt für alle $s \in [0, b]$ $\dot{T}(s) = (-\dot{\alpha}(s) \sin \alpha(s), \dot{\alpha}(s) \cos \alpha(s))$ und $N(s) = (-\sin \alpha(s), \cos \alpha(s))$, also $\kappa(s) = \dot{\alpha}(s)$.

Beachte, dass der Winkel nur bis auf $2\pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ definiert ist. Ist aber $\alpha(0)$ gewählt, so sind für eine gegebene Kurve c auch $\alpha(s)$ für alle s durch die Forderung, dass α stetig sein soll, eindeutig bestimmt.

- ▷ Es gilt $|\kappa| = \|\dot{T}\| = \|\dot{c}'\|$. Denn $|\kappa| = \|\kappa N\| = \|\dot{T}\|$.
- ▷ Wenn $\kappa > 0$ ist, dann ist die Kurve nach links gekrümmt, bei $\kappa < 0$ nach rechts. Bei einem Kreis entspricht positive Krümmung also dem positiven Durchlaufsin (entgegen dem Uhrzeigersinn).
- ▷ $\ddot{c} = \dot{T}$ zeigt immer nach "innen".
- ▷ Übung: Bei einer beliebig parametrisierten Kurve c gilt $\kappa(t) = \frac{\det(\dot{c}(t), \ddot{c}(t))}{\|\dot{c}(t)\|^3}$. Insbesondere erhält man $\kappa(t) = \frac{f''(t)}{(1+(f'(t))^2)^{3/2}}$, wenn c der Graph einer Funktion f ist.

Abbildung I.2.: $\kappa < 0$ Abbildung I.3.: $\kappa > 0$ **I.2.3 Satz**

Sei $\kappa : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ glatt und $c_0, v \in \mathbb{R}^2$, $\|v\| = 1$. Dann gibt es genau eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $c : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $c(0) = c_0$, $\dot{c}(0) = v$ und $\kappa = \text{Krümmung von } c$.

Der Satz zeigt, dass die Krümmung die Kurve eindeutig festlegt (bis auf Anfangspunkt und -richtung).

Beweis: Bestimme zunächst α wie in der Bemerkung vor dem Satz.

Es gilt $\kappa(s) = \dot{\alpha}(s)$ genau dann wenn $\alpha(s) = \alpha(0) + \int_0^s \kappa(s') ds'$. Wir wählen $\alpha(0)$ als den Winkel, den v mit der x -Achse bildet. Danach finde $c(s) = (x(s), y(s))$ mittels $\dot{c}(s) = (\dot{x}(s), \dot{y}(s)) = (\cos \alpha(s), \sin \alpha(s))$. Dies ist äquivalent zu $x(s) = x(0) + \int_0^s \cos \alpha(s') ds'$ und $y(s) = y(0) + \int_0^s \sin \alpha(s') ds'$. Hier wählen wir $(x(0), y(0)) = c_0$. \square

Beispiel: Aus dem Satz folgt, dass Geraden und Kreise oder Teile davon die einzigen Kurven konstanter Krümmung sind.

Der Krümmungskreis

Der Krümmungskreis an eine Kurve in einem Punkt ist der Kreis, der die Kurve dort am besten approximiert, sich am besten an sie anschmiegt. Um dies zu präzisieren, brauchen wir folgenden Begriff.

I.2.4 Definition

Seien $c, \tilde{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei parametrisierte Kurven und $t_0 \in I$, $k \in \mathbb{N}_0$. c und \tilde{c} **berühren einander in t_0 zu k -ter Ordnung**, wenn gilt: $c^{(i)}(t_0) = \tilde{c}^{(i)}(t_0)$ für $i = 0, \dots, k$.

Für $k = 0$ bedeutet dies, dass die beiden Kurven bei t_0 einen Schnittpunkt haben, bei $k = 1$ zusätzlich die gleiche Tangente in t_0 .

Bemerkung: Seien c und \tilde{c} zwei parametrisierte Kurven. Dann sind äquivalent:

- c und \tilde{c} sind in t_0 tangential zur Ordnung k
- $\|c(t) - \tilde{c}(t)\| = O(|t - t_0|^{k+1})$

Dies folgt aus dem Satz von Taylor (Übung). Aussage b) kann man so formulieren, dass c, \tilde{c} zur Ordnung $k + 1$ übereinstimmen. (Also eins mehr als die Ordnung der Tangentialität. Das Wort 'tangential' trägt gewissermaßen eine weitere Ordnung zum übereinstimmen bei.)

I.2.5 Lemma

Seien c und \tilde{c} nach Bogenlänge parametrisierte Kurven. Dann gilt:

c, \tilde{c} sind in s_0 tangential zur Ordnung		
0	\iff	c, \tilde{c} schneiden sich zum Zeitpunkt s_0
1	\iff	zusätzlich haben c, \tilde{c} in s_0 dieselbe Tangente
2	\iff	zusätzlich haben c, \tilde{c} in s_0 dieselbe Krümmung

Dies folgt direkt aus den Definitionen.

Als Beispiel betrachte eine Kurve c und ihre Tangente im Punkt s_0 . Diese kann man als $\tilde{c}(s) = c(s_0) + (s - s_0) \cdot c'(s_0)$ nach Bogenlänge parametrisieren. Da eine Gerade ihre eigene Tangente ist, sind c, \tilde{c} in s_0 tangential zu erster Ordnung. Dies kann man auch an Taylors Formel ablesen:

$$c(s) = c(s_0) + (s - s_0) \cdot c'(s_0) + O(|s - s_0|^2)$$

Also $c(s) - \tilde{c}(s) = O(|s - s_0|^2)$. Aus dem Lemma folgt auch, dass die Tangente die einzige Gerade mit dieser Eigenschaft ist.

Mit einem Kreis kann man c noch besser approximieren:

I.2.6 Definition

Sei c eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Der **Krümmungskreis** an c in s_0 ist der eindeutige Kreis, der c in s_0 zur zweiten Ordnung berührt. Er ist dann definiert, wenn $\kappa(s_0) \neq 0$.

Damit die Definition Sinn macht, müssen wir prüfen, dass es so einen Kreis gibt und dass er eindeutig ist. Nach dem Lemma muss der Kreis dieselbe Krümmung haben wie c bei s_0 , also $\kappa(s_0)$. Sein Radius muss also $\frac{1}{|\kappa(s_0)|}$ sein. Da er weiterhin durch p laufen muss und dort die Tangente $\dot{c}(s_0)$ haben soll, gibt es nur zwei Möglichkeiten für diesen Kreis. Man überzeugt sich leicht, dass er auf der ‚Innenseite‘ von c liegen muss.

Man kann den Krümmungskreis konkret angeben: Es ist der Kreis mit Radius $\frac{1}{|\kappa(s_0)|}$ um den Punkt $\gamma(s_0) = c(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)} \cdot N(s_0)$.

Beachte: Wegen der Bemerkung oben stimmt der Krümmungskreis mit c bei s_0 zu dritter Ordnung überein. Das heißt, man kann ihn so als $\tilde{c}(s)$ parametrisieren, dass $\|c(s) - \tilde{c}(s)\| = O(|s - s_0|^3)$ gilt. Zum Vergleich: Die Tangente an c in s_0 stimmt mit c nur zu zweiter Ordnung überein.

Wir erhalten also eine weitere Interpretation der Krümmung: $|\kappa(s)| = \frac{1}{R}$, wobei R der Radius des eindeutigen Kreises ist, der c in s zu zweiter Ordnung berührt. Falls es keinen solchen Kreis gibt, ist $\kappa(s) = 0$.

Bemerkung: Sind c, \tilde{c} zwei reguläre (unparametrisierte) Kurven, die durch einen Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ laufen, so sagen wir, dass c, \tilde{c} im Punkt p tangential zur Ordnung k sind, falls man sie so nach Bogenlänge parametrisieren kann, dass die resultierenden parametrisierten Kurven tangential zur Ordnung k sind.

Ordnung von Tangentialität ist damit eine *geometrische Eigenschaft*, unabhängig von Parametrisierungen.

In der Diskussion des Krümmungskreises fixieren wir trotzdem eine Parametrisierung, um Probleme mit Selbstschnittpunkten der Kurve zu vermeiden. (Dort könnte es mehrere Krümmungskreise geben, einen für jeden ‚Zweig‘ der Kurve.)

I.3. Kurven im Raum

Frage: Welche Formen haben Schwerter, damit man sie in eine Scheide stecken kann?

Sie müssen konstante Krümmung haben! (Die genaue Begründung hierfür folgt später.) Also in 2D Geraden und Kreisbögen. In 3D erfüllt auch die Schraubenlinie oder Helix, die über $c(t) = (\cos t, \sin t, a \cdot t)$ parametrisiert ist, diese Bedingung. (Natürlich haben wir hier Schwert und Scheide als Kurve idealisiert.)

Im Raum macht die alte Definition von Krümmung keinen Sinn mehr, da es in jedem Punkt der Kurve viele Normalenvektoren gibt; diese bilden die Normalebene. Die Idee der Krümmung als Änderungsgeschwindigkeit der Tangentialrichtung kann aber beibehalten werden.

I.3.1 Definition

Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve, $s \in I$.

a) Die **Krümmung** von c in s ist definiert als $\kappa(s) := \|\dot{T}(s)\| = \|\ddot{c}(s)\|$.

b) Falls $\kappa(s) \neq 0$, so ist der **Hauptnormalenvektor** in s definiert als

$$N(s) = \frac{\dot{T}(s)}{\|\dot{T}(s)\|} = \frac{1}{\kappa(s)} \cdot \dot{T}(s)$$

und der **Binormalenvektor** als $B(s) = T(s) \times N(s)$.

c) (T, N, B) wird als **begleitendes Dreibein** von c bezeichnet. Es ist nur in Punkten mit $\kappa(s) \neq 0$ definiert.

Wir schreiben oft T, N, B statt $T(s), N(s), B(s)$. Wir sollten aber immer daran denken, dass diese Vektoren von s abhängen.

Wiederholung zum Kreuzprodukt:

Seien $v, w \in \mathbb{R}^3$, dann ist auch $v \times w \in \mathbb{R}^3$ und es gilt

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}.$$

Eine charakterisierende Eigenschaft des Kreuzprodukts ist

$$\langle v \times w, u \rangle = \det(v, w, u)$$

für alle $u \in \mathbb{R}^3$. Daraus folgt leicht:

- ▷ es ist $v \times w \perp v$ und $v \times w \perp w$
- ▷ sind v, w linear unabhängig, dann ist $v \times w \neq 0$ und $(v, w, v \times w)$ ist positiv orientiert, d.h. es gilt $\det(v, w, v \times w) > 0$.
- ▷ sind v, w linear abhängig, dann ist $v \times w = 0$
- ▷ es gilt $\|v \times w\| = \|v\| \cdot \|w\| \sin \angle v, w =$ Fläche des von v und w aufgespannten Parallelogramms

Bemerkung: ▷ $N \perp T$, denn nach der Standardrechnung ist $\dot{T} \perp T$

- ▷ Es gilt $B \perp N, B \perp T$ und wegen $\|T\| = \|N\| = 1$ auch $\|B\| = \|T\| \cdot \|N\| \cdot \sin 90^\circ = 1$
- ▷ $(T(s), N(s), B(s))$ ist für jedes s mit $\kappa(s) \neq 0$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von \mathbb{R}^3 . Bei $\kappa(s) = 0$ sind $N(s)$ und $B(s)$ undefiniert.
- ▷ Vorsicht: κ ist hier immer ≥ 0 ! Falls c in der $x-y$ -Ebene liegt, ist das "neue" κ der Betrag des "ebenen" κ . Entsprechend ist N gleich dem negativen des "ebenen" N , falls dort $\kappa < 0$. Dies liegt daran, dass in 3D "+90°" keinen Sinn macht. In 2D erhalten wir so etwas mehr Information.

Krümmung misst, wie stark eine Kurve davon abweicht, gerade zu sein. **Wie kann man messen, wie stark eine Kurve davon abweicht, eben zu sein?**

Die Idee ist, die Änderung von N zu betrachten:

- ▷ \dot{N} steht immer senkrecht auf N , nach der Standardrechnung, die wegen $\|N(s)\| = 1$ für alle s auch für N funktioniert. Daher ist \dot{N} eine Linearkombination aus T und B .
- ▷ Liegt die Kurve in der x, y -Ebene, so liegt \dot{N} ebenfalls in dieser Ebene, muss also ein Vielfaches von T sein. Ist also die B -Komponente von \dot{N} ungleich Null, so kann die Kurve nicht eben sein.

Daher betrachten wir die Größe der B -Komponente von \dot{N} . Genauer: Einen beliebigen Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ können wir als $v = aT + bN + cB$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ schreiben. Wie bestimmt man die Koeffizienten (Komponenten) a, b, c ?

Da (T, N, B) eine Orthonormalbasis ist, gilt $a = \langle v, T \rangle$, $b = \langle v, N \rangle$ und $c = \langle v, B \rangle$.

I.3.2 Definition

Die **Torsion** oder **Windung** von c in s ist $\tau(s) = \langle \dot{N}(s), B(s) \rangle$. Sie ist nur definiert, wenn $\kappa(s) \neq 0$.

Damit ist $\tau(s)$ die Größe des Anteils von $\dot{N}(s)$, der aus der $T - N$ -Ebene herausragt.

Beispiel (Schraubenlinie): Die Schraubenlinie oder Helix ist gegeben durch

$$c(s) = (a \cos \alpha s, a \sin \alpha s, b \cdot s)$$

mit $a, \alpha > 0$, $b \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\dot{c}(s) = (-a\alpha \sin \alpha s, a\alpha \cos \alpha s, b)$$

und

$$\ddot{c}(s) = (-a\alpha^2 \cos \alpha s, -a\alpha^2 \sin \alpha s, 0).$$

Somit folgt $\|\dot{c}\|^2 = a^2\alpha^2 + b^2$. Damit die Helix nach Bogenlänge parametrisiert ist, muss also $a^2\alpha^2 + b^2 = 1$ gelten. Weiter ist $\kappa = \|\ddot{c}\| = a\alpha^2$, und aus

$$N = \frac{\dot{T}}{\|\dot{T}\|} = \frac{\ddot{c}}{\kappa} = (-\cos \alpha s, -\sin \alpha s, 0)$$

und

$$B = T \times N = (b \sin \alpha s, -b \cos \alpha s, a\alpha)$$

folgt

$$\tau = \langle \dot{N}, B \rangle = b\alpha$$

Also sind $\kappa = a\alpha^2$ und $\tau = b\alpha$ konstant.

Übung: Zeige, dass es zu gegebenem $\kappa > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$ genau eine Schraubenlinie mit dieser Krümmung und Torsion gibt.

Für ebene Kurven bestimmt κ die Änderung (Ableitung) von T und von N . Für Raumkurven bestimmen κ und τ die Ableitung von T , N und B wie folgt.

I.3.3 Satz (Frenet-Gleichungen)

Es gilt

$$\begin{pmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix},$$

wobei T, N, B als Zeilen geschrieben werden.

Beweis: Es sind drei Gleichungen zu zeigen. $\dot{T} = \kappa N$ gilt nach Definition von N .

Weiter ist nach der vorigen Bemerkung $\dot{N} = aT + bN + cB$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ wie oben beschrieben. Es gilt $\frac{d}{ds} \langle N, T \rangle = \langle \dot{N}, T \rangle + \langle N, \dot{T} \rangle = 0$, also $a = \langle \dot{N}, T \rangle = -\langle N, \dot{T} \rangle = -\langle N, \kappa N \rangle = -\kappa$. Außerdem ist $b = \langle \dot{N}, N \rangle = 0$ wegen $\frac{d}{ds} \langle N, N \rangle = 0$ und $c = \langle \dot{N}, B \rangle = \tau$ per Definition.

Auf die gleiche Weise erhält man die Koeffizienten für die dritte Gleichung, denn es gilt analog $\langle \dot{B}, T \rangle = -\langle B, \dot{T} \rangle = -\langle B, \kappa N \rangle = 0$, $\langle \dot{B}, N \rangle = -\langle B, \dot{N} \rangle = -\langle B, \tau B \rangle = -\tau$ und $\langle \dot{B}, B \rangle = 0$. \square

Die Schmiegebene

Erinnerung: Die Tangente an c in s_0 ist die Gerade, die c nahe s_0 am besten approximiert. Dies sieht man an der Taylor-Formel:

$$c(s) = c(s_0) + (s - s_0) \cdot \dot{c}(s_0) + O(|s - s_0|^2)$$

Dabei ist $\tilde{c}(s) = c(s_0) + (s - s_0) \cdot \dot{c}(s_0)$ ein Punkt auf der Tangente, und die Formel sagt, dass $c(s) - \tilde{c}(s) = O(|s - s_0|^2)$; d.h. dass die Tangente tangential an c zu erster Ordnung ist. Sie ist die einzige Gerade mit dieser Eigenschaft.

Wie kann man eine Ebene bestimmen, zu der c nahe s_0 möglichst kleinen Abstand hat (im Sinne von Ordnung)? Schreiben wir einen weiteren Term in der Taylor-Formel:

$$\begin{aligned} c(s) &= c(s_0) + (s - s_0) \cdot \dot{c}(s_0) + \frac{(s - s_0)^2}{2} \cdot \ddot{c}(s_0) + O(|s - s_0|^3) \\ &= c(s_0) + (s - s_0) \cdot T(s_0) + \frac{(s - s_0)^2}{2} \kappa(s_0) \cdot N(s_0) + O(|s - s_0|^3), \end{aligned}$$

so sehen wir, dass $c(s)$ von der durch $T(s_0)$ und $N(s_0)$ aufgespannten Ebene durch $c(s_0)$ den Abstand $O(|s - s_0|^3)$ hat. Die Kurve berührt also diese Ebene zu zweiter Ordnung.

Man kann sich überlegen, dass dies die einzige Ebene mit dieser Eigenschaft ist (Übung).

I.3.4 Definition

Die **Schmiegebene** an c in s_0 ist die von $T(s_0)$ und $N(s_0)$ aufgespannte Ebene durch den Punkt $c(s_0)$. Sie ist definiert, falls $\kappa(s_0) \neq 0$.

Damit können wir die Torsion noch besser verstehen: Eine Ebene durch $c(s_0)$ kann man eindeutig durch ihren Normalenvektor festlegen. Die Schmiegebene $\text{span}\{T, N\}$ in s_0 hat die Normale B .

Die Gleichung $\dot{B} = -\tau N$ bedeutet, dass der Vektor B , also die Schmiegebene, sich mit Geschwindigkeit τ in Richtung N dreht, wenn man entlang der Kurve geht. Also ist

$$|\tau| = \text{Änderungsgeschwindigkeit der Schmiegebene.}$$

Vergleiche: c berührt die Tangente in s_0 zu erster Ordnung und

$$|\kappa| = \text{Änderungsgeschwindigkeit des Tangentenvektors.}$$

Euklidische Bewegungen

Wie verhalten sich Krümmung und Torsion, wenn man die Kurve bewegt?

I.3.5 Definition

Eine euklidische Bewegung des \mathbb{R}^n ist eine Abbildung der Form $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $F(x) = Rx + b$, wobei R eine orthogonale $n \times n$ -Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$ ist.

F heißt orientierungserhaltend, falls $\det R = 1$ ist.

Zur Erinnerung einige Fakten der linearen Algebra:

R orthogonal heißt $\|Rx\| = \|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Äquivalent dazu sind

$$\triangleright \langle Rx, Ry \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

(daraus folgt: R ist winkelerhaltend, also $\angle(Rx, Ry) = \angle(x, y)$)

$$\triangleright R \cdot R^T = I$$

$$\triangleright R^T \cdot R = I$$

\triangleright Falls v_1, \dots, v_n eine Orthonormalbasis ist, so ist auch Rv_1, \dots, Rv_n eine Orthonormalbasis

▷ Die Zeilen von R bilden eine Orthonormalbasis.

Falls R orthogonal ist, gilt $\det R = 1$ oder $\det R = -1$. Dabei gilt $\det R = 1$ genau dann, wenn R orientierungserhaltend ist, d.h. wenn für jede positive orientierte Basis v_1, \dots, v_n auch die Basis Rv_1, \dots, Rv_n positiv orientiert ist. Eine Basis v_1, \dots, v_n von \mathbb{R}^n heißt **positiv orientiert**, wenn $\det(v_1, \dots, v_n) > 0$ ist.

Im 3D bedeutet R orthogonal und $\det R = 1$, dass R eine Rotation ist. Eine Rotation ist durch ihre Drehachse und den Drehwinkel eindeutig festgelegt.

Eine orientierungserhaltende euklidische Bewegung in \mathbb{R}^3 ist also eine Rotation ($x \mapsto Rx$) gefolgt von einer Translation ($Rx \mapsto Rx + b$).

Bemerkung: Ein höchst nicht-trivialer Satz der klassischen Geometrie sagt: Ist $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine beliebige abstandserhaltende Abbildung, also $\|F(x) - F(y)\| = \|x - y\|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$, dann ist F eine euklidische Bewegung.

Bemerkenswert daran ist, dass F automatisch durch eine *lineare* Abbildung, gefolgt von einer Translation, gegeben sein muss.

I.3.6 Proposition

Sei F eine orientierungserhaltende euklidische Bewegung des \mathbb{R}^3 und $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$. Dann haben c und $F \circ c$ dieselbe Krümmung und Torsion.

Beweis: Sei $F(x) = Rx + b$. Die Ableitung von F ist $DF|_x = R$ für alle x . Sei $\tilde{c} = F \circ c$. Dann ist mit der Kettenregel $\tilde{c}' = DF|_c(c') = Rc'$, also $\tilde{T} = RT$. Da R konstant ist, folgt durch Ableiten nach s , dass $\tilde{\kappa} = R\kappa$, also $\tilde{\kappa} = \|\tilde{T}'\| = \|RT'\| = \|T'\| = \kappa$, weil R orthogonal ist. Der Beweis für τ verläuft ähnlich. \square

Zurück zur Schwertfrage: Das Hineinstecken des Schwertes ist eine Abfolge euklidischer Bewegungen. Daher muss die Scheide konstantes κ und τ haben. Die einzige Möglichkeit hierfür sind Schraubenlinien (oder Geraden)! Das folgt aus folgendem Satz.

Der Hauptsatz der Kurventheorie

I.3.7 Satz (Hauptsatz der Kurventheorie)

Seien glatte Funktionen $\kappa : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\tau : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\kappa(s) > 0 \forall s$ gegeben.

- Es gibt eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $c : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit Krümmung κ und Torsion τ , und diese ist bis auf orientierungserhaltende euklidische Bewegungen eindeutig.
- Zu gegebenen $c_0, T_0, N_0 \in \mathbb{R}^3$ mit $\|T_0\| = \|N_0\| = 1$ und $T_0 \perp N_0$ gibt es genau eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $c : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit Krümmung κ und Torsion τ , die die Anfangsbedingungen $c(0) = c_0$, $\dot{c}(0) = T_0$ und $N(0) = \frac{\dot{c}(0) \times c''(0)}{\|\dot{c}(0) \times c''(0)\|} = N_0$ erfüllt.

Für den Beweis verwenden wir die Frenet-Gleichungen:

$$\begin{pmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

Wir schreiben dies als

$$\dot{U} = A \cdot U$$

mit $U := \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}$. Sowohl U als auch A hängen von s ab.

Beachte: Für jedes s ist A eine schiefsymmetrische Matrix, d.h. $A^T = -A$, und U eine orthogonale Matrix. A und U sind also Kurven in $\mathcal{M}(n) \cong \mathbb{R}^{n^2}$, dem Raum der $n \times n$ -Matrizen.

Der Zusammenhang von schiefsymmetrischen mit orthogonalen Matrizen über die Gleichung $\dot{U} = AU$ ist eine allgemeine fundamentale Tatsache. Die beiden folgenden Lemmata drücken diesen Zusammenhang aus. Hierbei sind U und A Kurven in $\mathcal{M}(n)$.

I.3.8 Lemma

Wenn $U(s)$ orthogonal für jedes s ist, dann ist $\dot{U}(s) \cdot U^{-1}(s) = A(s)$ schiefsymmetrisch.

Beweis: Da U orthogonale Matrix ist, gilt $U(s) \cdot U^T(s) = I$ für alle s . Ableiten dieser Gleichung nach s ergibt $0 = \frac{d}{ds}(U \cdot U^T) = \dot{U} \cdot U^T + U \cdot \dot{U}^T = \dot{U} \cdot U^T + (\dot{U} \cdot U^T)^T = A + A^T$.

Also ist $A^T = -A$ und somit A schiefsymmetrisch. \square

Es gilt auch folgende Umkehrung. Wir verwenden t als Buchstabe, da es nicht auf Bogenlängeparametrisierung (von A oder U) ankommt. Die Einheitsmatrix bezeichnen wir mit I .

I.3.9 Lemma

Sei $U : [0, b] \rightarrow \mathcal{M}(n)$ eine Kurve mit

$$(1) \quad U(0) = I$$

$$(2) \quad \dot{U}(t) = A(t)U(t) \text{ für eine schiefsymmetrische Matrix } A(t), \text{ für jedes } t.$$

Dann ist $U(t)$ orthogonal und orientierungserhaltend für jedes t .

Dies kann man etwas trickreich direkt beweisen, wir werden aber einen sehr natürlichen Beweis nach Einführung einiger Mannigfaltigkeitskonzepte im folgenden Abschnitt geben.

Beweis (des Hauptsatzes): Zunächst zeigen wir, dass es genau eine Kurve mit Krümmung κ und Torsion τ gibt, die im Punkt $c_0 = 0$ startet mit $T(0) = e_1$ und $N(0) = e_2$.

Dafür bestimmen wir zunächst $B(0) = e_1 \times e_2 = e_3$. Wir haben dann

$$A(s) = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \text{ und } U_0 = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = I$$

vorgegeben und suchen zunächst $U(s)$ derart, dass $\dot{U}(s) = A(s) \cdot U(s) \forall s$ und die Anfangsbedingung $U(0) = U_0$ gilt. Dies ist eine lineare Differentialgleichung im \mathbb{R}^9 (d.h. ein System aus 9 Gleichungen mit 9 unbekannt Funktionen; dies sind die Einträge der 3×3 -Matrix U).

Nach dem Existenz- und Eindeigkeitssatz für Differentialgleichungen gibt es genau eine Lösung U .

Eindeutigkeit: Nach dem gerade Gesagten bestimmen die gegebenen Daten $U = (T, N, B)^T$ eindeutig, also insbesondere T , und damit ist c wegen der eindeutigen Lösbarkeit der Gleichung

$$\dot{c}(s) = T(s) \forall s, \quad c(0) = 0$$

eindeutig bestimmt.

Existenz: Wir bestimmen zunächst U als Lösung von $\dot{U} = AU$, $U(0) = I$ mit A wie oben und dann c als Lösung der obigen Differentialgleichung. Wir müssen nachprüfen, dass c Krümmung κ und Torsion τ hat. Nach Lemma I.3.9 ist $U(s)$ orthogonal für alle s . Für alle s gilt $\dot{c} = T$, $\ddot{c} = \dot{T} = \kappa N$ (aus der ersten Zeile von $\dot{U} = AU$), $B = T \times N$ (da U orthogonal und orientierungserhaltend ist). Also ist κ die Krümmung und T, N, B das begleitende Dreibein von c . Schließlich ist noch $\dot{N} = -\kappa T + \tau B$ (aus der zweiten Zeile von $\dot{U} = AU$), also $\tau = \langle \dot{N}, B \rangle$ die Torsion von c . Also ist c die gesuchte Kurve.

Damit haben wir die Existenz in a) bewiesen. Für die Eindeutigkeit brauchen wir:

Hilfsbehauptung: Seien $c_0, T_0, N_0 \in \mathbb{R}^3$ mit $\|T_0\| = \|N_0\| = 1$ und $T_0 \perp N_0$. Dann gibt es genau eine orientierungserhaltende Bewegung $F(x) = Rx + b$, die $0, e_1, e_2$ auf diese Daten abbildet, im Sinne von $F(0) = c_0, Re_1 = T_0, Re_2 = N_0$.

(Beweis als Übung; die Transformation von T_0 und N_0 entspricht hierbei der Rechnung im Beweis von Proposition I.3.6.) Ist nun \tilde{c} eine beliebige Kurve mit Krümmung κ und Torsion τ , so seien c_0, T_0, N_0 die Anfangsbedingungen von \tilde{c} . Wähle F wie in der Hilfsbehauptung. Die Kurve $F^{-1} \circ \tilde{c}$ hat dann die Anfangsdaten $0, e_1, e_2$ und nach Proposition I.3.6 Krümmung κ und Torsion τ . Wegen der schon gezeigten Eindeutigkeit für diese Anfangsdaten muss $F^{-1} \circ \tilde{c} = c$ sein. Damit ist a) bewiesen. b) folgt analog. \square

I.4. Kurven global: Der Hopfsche Umlaufsatz

Unsere bisherigen Untersuchungen zu Kurven waren **lokaler** Natur: Um z.B. die Krümmung an einem Kurvenpunkt zu definieren, braucht man die Kurve nur in einer beliebig kleinen Umgebung dieses Punktes zu kennen.

Wir werden nun einen **globalen** Satz kennenlernen. Er macht eine Aussage über eine Kurve als Ganzes.

I.4.1 Definition

Sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve.

- a) c heißt **geschlossen**, wenn $c^{(k)}(a) = c^{(k)}(b)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt.
- b) c heißt **einfach**, wenn c auf $[a, b]$ injektiv ist.

Eine einfache Kurve schneidet sich also nicht selbst. Ihre Endpunkte dürfen aber gleich sein. Eine einfache und geschlossene Kurve nennt man **einfach geschlossen**.

Für eine geschlossene Kurve sind die Endpunkte gleich, $c(a) = c(b)$. Sämtliche Ableitungen an den Endpunkten sollen auch übereinstimmen, damit „die Kurve nach einem Durchlauf glatt weiterläuft“. Anders gesagt (am einfachsten für $a = 0$), ist c genau dann im Sinne der Definition geschlossen, wenn ihre periodische Fortsetzung

$$\tilde{c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \tilde{c}(t) = c(t \bmod b)$$

glatt ist, wobei $t \bmod b$ die eindeutige Zahl in $[0, b)$ ist, die von t um ein ganzzahliges Vielfaches von b abweicht.

Wir betrachten nun ebene Kurven.

I.4.2 Definition

Sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine ebene reguläre geschlossene Kurve, nach Bogenlänge parametrisiert. Die **Umlaufzahl** von c ist definiert als

$$n_c := \frac{1}{2\pi} \int_a^b \kappa(s) ds$$

Hierbei wird der Krümmungsbegriff für ebene Kurven verwendet, bei dem κ auch negativ sein kann.

Der Sinn dieser Definition liegt in Teil b) des folgenden Lemmas:

I.4.3 Lemma

Sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine ebene reguläre geschlossene Kurve.

- a) Die Umlaufzahl ändert bei Umkehrung der Orientierung ihr Vorzeichen.
- b) Sei $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion derart, dass $\dot{c}(t) = r(t)(\cos \alpha(t), \sin \alpha(t))$, $r(t) > 0$ für alle t gilt. Dann ist

$$n_c = \frac{1}{2\pi} (\alpha(b) - \alpha(a))$$

Eine Funktion α wie in Teil b) des Lemmas nennt man auch Winkelfunktion für \dot{c} , da $\alpha(t)$ der Winkel von $\dot{c}(t)$ mit der positiven x -Achse ist. Wir haben Winkelfunktionen bereits nach Definition I.2.2 kennengelernt. Falls c nach Bogenlänge parametrisiert ist, so ist $r(t) = 1$.

Beweis: a) Übung

b) Nach Definition I.2.2 haben wir bereits nachgerechnet, dass $\dot{\alpha} = \kappa$. Die Behauptung folgt also direkt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. \square

Beispiel: Für den Kreis $c(s) = (\cos s, \sin s)$ ist $\dot{c}(s) = (-\sin s, \cos s) = (\cos(s + \frac{\pi}{2}), \sin(s + \frac{\pi}{2}))$ nach bekannten Identitäten für \sin und \cos , also ist $\alpha(s) = s + \frac{\pi}{2}$ eine Winkelfunktion. Das sollten Sie sich auch geometrisch klar machen. Für $s \in [0, 2\pi]$ wird der Kreis einmal gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen, und die Umlaufzahl ist $\frac{1}{2\pi} (\alpha(2\pi) - \alpha(0)) = 1$. Wegen $\kappa(s) = 1 \forall s$ folgt das auch direkt aus der Definition der Umlaufzahl.

Bemerkung: Ist die Kurve $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ regulär geschlossen, aber nicht notwendig nach Bogenlänge parametrisiert, so kann man ihre Umlaufzahl durch

$$n_c = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \kappa(t) |\dot{c}(t)| dt$$

berechnen. Dies folgt direkt durch Variablensubstitution.

Existenz einer Winkelfunktion

Um Lemma I.4.3 anwenden zu können, sollten wir wissen, dass eine Winkelfunktion immer existiert. Dies erfordert ein wenig Überlegung. Denn der Winkel ist nur bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π definiert. Z.B. kann für den Vektor $(0, 1)$ der Winkel $\frac{\pi}{2}$ oder ein beliebiges $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ verwendet werden.

Würde man $\alpha(t)$ so definieren, dass man für jedes t einen der möglichen Winkel nimmt, wäre die resultierende Funktion evtl. nicht stetig.

Wir müssen also zeigen, dass man den Winkel für jedes t so bestimmen kann, dass die resultierende Funktion stetig ist (sie ist dann automatisch glatt, s. unten).

Im Beispiel des Kreises sind die Punkte $c(0)$ und $c(2\pi)$ gleich, ebenso die Tangenten $\dot{c}(0) = \dot{c}(2\pi)$. Und doch ist $\alpha(0) \neq \alpha(2\pi)$, und offenbar muss dies für stetiges α auch so sein, da „ α beim Umlaufen des Kreises zunimmt“.

I.4.4 Lemma

Sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine ebene reguläre parametrisierte Kurve. Dann existiert eine Winkelfunktion für \dot{c} . Diese ist bis auf eine additive Konstante in $2\pi\mathbb{Z}$ eindeutig.

Beweis: (Ein einfacherer Beweis mit etwas Funktionentheorie ist unten gegeben.) Wir können o.B.d.A. annehmen, dass c nach Bogenlänge parametrisiert ist. Die Idee ist, die Kurve in viele kleine Stücke aufzuteilen, auf denen sich die Tangente jeweils nur wenig ändert. Auf jedem dieser Stücke kann man dann eine Winkelfunktion definieren und diese Teile zusammensetzen.

Wir betrachten zunächst eine Kurve, deren Tangente wenig variiert.

Behauptung: Sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ wie im Lemma. Angenommen, die Menge der Tangentialvektoren $\mathcal{T} = \{\dot{c}(s) : s \in [a, b]\}$ ist in einer der Halbebenen $x > 0$, $x < 0$, $y > 0$, $y < 0$ enthalten. Sei ein Winkel α_0 für $\dot{c}(a)$ gegeben. Dann existiert genau eine Winkelfunktion α für \dot{c} mit $\alpha(a) = \alpha_0$.

Beweis der Behauptung: Der Hauptpunkt ist, dass die Tangens-Funktion auf dem Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ injektiv ist, mit Bild \mathbb{R} . Angenommen, \mathcal{T} ist in der Halbebene $x > 0$ enthalten. Mit $c(s) = (x(s), y(s))$ bedeutet das $\dot{x}(s) > 0$ für alle s . Wir wollen α finden mit $\dot{x}(s) = \cos \alpha(s)$, $\dot{y}(s) = \sin \alpha(s)$ für alle s . Dies ist äquivalent zu $\tan \alpha(s) = \frac{\dot{y}(s)}{\dot{x}(s)}$ (prüfen Sie dies nach!) und damit zu $\alpha(s) = \arctan \frac{\dot{y}(s)}{\dot{x}(s)} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Dieses α ist stetig genau dann, wenn k konstant ist. Die Vorgabe von $\alpha(a) = \alpha_0$ legt also α eindeutig fest, und das so gegebene α erfüllt die Behauptung.

Die Fälle der anderen Halbebenen kann man ähnlich behandeln, oder mittels Drehung in den Fall $x > 0$ überführen.

Wir beweisen nun das Lemma. Da $[a, b]$ kompakt und \dot{c} stetig ist, ist \dot{c} gleichmäßig stetig. Also existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle s, s' mit $|s - s'| < \delta$ gilt, dass $\|\dot{c}(s) - \dot{c}(s')\| < \sqrt{2}$. Wähle eine Unterteilung $a = s_0 < s_1 < \dots < s_N = b$ mit Feinheit $\max_{i=1, \dots, N} (s_i - s_{i-1}) < \delta$. Sei $I_i = [s_{i-1}, s_i]$.

Dann ist für jeden Abschnitt $c_i := c|_{I_i}$ die Menge der Tangenten $T_i = \{\dot{c}_i(s) : s \in I_i\}$ in einem offenen Viertelkreis enthalten (ein Viertelkreis ist ein Teilbogen des Einheitskreises mit Gesamtwinkel $\frac{\pi}{2}$; der maximale Abstand zweier Punkte auf einem Viertelkreis ist $\sqrt{2}$). Jeder Viertelkreis, also auch T_i , ist in einer der Halbebenen $x > 0$, $x < 0$, $y > 0$, $y < 0$ enthalten.

Um die Existenz von α zu zeigen, wähle einen Winkel α_0 für $\dot{c}(a)$. Mittels der Behauptung oben konstruiere nun eine Winkelfunktion α auf $[a, s_1]$ mit $\alpha(a) = \alpha_0$. Setze $\alpha_1 = \alpha(s_1)$. Wiederum mittels der Behauptung konstruiere eine Winkelfunktion α auf $[s_1, s_2]$ mit $\alpha(s_1) = \alpha_1$. Fahre so fort, bis α auf ganz $[a, b]$ definiert ist. Per Konstruktion ist diese Funktion α stetig. Sie ist sogar glatt. Dies stimmt per Konstruktion außerhalb der Menge $\{s_1, \dots, s_{N-1}\}$, und die Glattheit in einer Umgebung von s_i folgt, indem wir die Behauptung auf die Einschränkung von c auf ein kleines Intervall um s_i anwenden.

Eindeutigkeit bis auf $2\pi\mathbb{Z}$: Sei $\tilde{\alpha}$ eine weitere Winkelfunktion für \dot{c} . Dann ist $\tilde{\alpha} - \alpha$ konstant auf jedem Teilintervall I_i nach der Behauptung oben, und wegen der Stetigkeit ist es konstant auf $[a, b]$. Die Konstante muss in $2\pi\mathbb{Z}$ liegen, da der Winkel von $\dot{c}(a)$ bis auf $2\pi\mathbb{Z}$ bestimmt ist. \square

Bemerkung (Beziehung zur Funktionentheorie): Mit Mitteln der Funktionentheorie ist es einfach, eine Winkelfunktion für die Kurve $\gamma = \dot{c}$ hinzuschreiben: Man setzt

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \operatorname{Im} \int_{\gamma|_{[a,t]}} \frac{dz}{z}$$

wobei α_0 ein Winkel für $\gamma(a)$ ist. Denn dies ist offenbar eine glatte Funktion von t mit $\alpha(0) = \alpha_0$, und da die Funktion $\frac{1}{z}$ die Stammfunktion $\log z$ hat und $\operatorname{Im} \log z = \arg z$ gilt, ist $\alpha(t) \in \arg \gamma(t)$, d.h. ein Winkel für $\gamma(t)$. Hierbei sind $\log z$ und $\arg z$ mehrwertige Funktionen, aber weil $\frac{1}{z}$ einwertig ist, ist $\alpha(t)$ wohldefiniert.

Da der Realteil von $\log z$ einwertig ist, ist das Integral über eine geschlossene Kurve $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$ rein imaginär, und aus Lemma I.4.3b) folgt

$$(I.1) \quad n_c = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z}, \quad \gamma = \dot{c}$$

Die rechte Seite nennt man auch die **Windungszahl von γ bzgl. 0**. Sie ist für geschlossene Kurven γ definiert, die nicht durch den Nullpunkt laufen (dies ist hier der Fall, da c regulär ist). Anschaulich gibt sie an, wie oft die Kurve γ sich um den Nullpunkt „herumwindet“.

Kurz: Die Umlaufzahl von c ist die Windungszahl von \dot{c} bzgl. 0.

Hopfscher Umlaufsatz**I.4.5 Satz**

Sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine ebene reguläre geschlossene Kurve.

a) Es gilt $n_c \in \mathbb{Z}$.

b) (**Hopfscher Umlaufsatz**) Ist c einfach, so ist $n_c = 1$ oder $n_c = -1$.

Dies ist ein globaler Satz, da er eine Aussage über das Integral der Krümmung über die ganze Kurve macht. Dies ist wesentlich, dieser Satz hat kein lokales Analogon.

Beweis: a): Wähle eine Winkelfunktion α für c . Da c geschlossen ist, gilt $\dot{c}(a) = \dot{c}(b)$, also ist $\alpha(b) - \alpha(a) \in 2\pi\mathbb{Z}$. Nach Lemma I.4.3b) ist also $n_c = \frac{1}{2\pi} (\alpha(b) - \alpha(a)) \in \mathbb{Z}$.

b): Siehe z.B. Thm. 2.28 im Buch von Kühnel: Differentialgeometrie.

Problem: Wie verwendet man die Voraussetzung, dass die Kurve einfach ist?

Idee (mit Hilfe des Begriffs der Windungszahl in der Bemerkung oben):

1. Deformationsinvarianz der Windungszahl: Zunächst überlegt man sich, dass die Windungszahl konstant bleibt, wenn man eine geschlossene Kurve stetig ändert, sie dabei aber niemals durch den Nullpunkt läuft.

Genauer: Für jedes $r \in [0, 1]$ sei $\gamma_r : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine geschlossene Kurve. Weiterhin seien die Abbildungen $(t, r) \mapsto \gamma_r(t)$ und $(t, r) \mapsto \dot{\gamma}_r(t)$ stetig. Für jedes γ_r ist dann die Windungszahl $w(\gamma_r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z}$ definiert. Das Integral hängt stetig von r ab (nach einem Satz der Analysis über parameterabhängige Integrale – hierzu schreibe das Integral aus als $\int_{\gamma_r} \frac{dz}{z} = \int_a^b \frac{\dot{\gamma}_r(t)}{\gamma_r(t)} dt$), daher ist die Abbildung $r \mapsto w(\gamma_r)$ stetig, und da sie Werte in \mathbb{Z} hat, muss sie konstant sein, was zu zeigen war.

2. Man konstruiert nun eine Deformation der Kurve $\gamma_0 := \dot{c}$, d.h. eine Familie geschlossener Kurven γ_r wie oben, derart, dass man der Kurve γ_1 direkt „ansehen“ kann, dass ihre Windungszahl gleich ± 1 ist. Daraus folgt dann die Behauptung. Die Schwierigkeit liegt in der Konstruktion der Deformation. Sehr grob gesprochen erhält man sie, indem man statt der Tangenten $\dot{c}(t)$ von c die normalisierten Sekanten $\frac{c(t) - c(t')}{\|c(t) - c(t')\|}$ verwendet. Für $t' \nearrow t$ konvergiert dies gegen $\dot{c}(t)$. Man kann z.B. $t' = (1 - r)t$ setzen, dies definiert dann γ_r . Die Einfachheit der Kurve c wird dabei dadurch verwendet, dass nur für einfache Kurven diese Sekanten für alle $t \neq t'$ definiert sind.

Hier fehlen noch viele Einzelheiten (z.B. ist das angegebene γ_r nicht geschlossen und für $t = b$, $r = 1$ nicht definiert), und wenn Sie sich den in Kühnel (oder anderen Quellen) gegebenen Beweis ansehen, erkennen Sie vielleicht diese Beweisidee so nicht wieder – meistens sind die Beweise recht formal gehalten. Dies einmal gut auszuarbeiten kann Ausgangspunkt für eine Bachelorarbeit sein! \square

Bemerkung: Verwandt mit dem Hopfschen Umlaufsatz ist:

I.4.6 Satz (Jordanscher Kurvensatz)

Sei c eine einfach geschlossene Kurve. Sei C das Bild von c . Dann hat $\mathbb{R}^2 \setminus C$ zwei Zusammenhangskomponenten, von denen eine beschränkt und eine unbeschränkt ist.

Dies erscheint zwar recht offensichtlich, aber wenn man eine sehr komplizierte Kurve zeichnet, ist es gar nicht mehr so klar. Man kann den Satz z.B. recht einfach mit Mitteln der Funktionentheorie zeigen (mit Hilfe der Windungszahl).

Die beschränkte Komponente nennt man auch das Innere der Kurve.

Der Hopfsche Umlaufsatz kann dann so präzisiert werden, dass die Umlaufzahl ± 1 ist, wenn die Kurve positiv durchlaufen wird in dem Sinn, dass der um plus 90 Grad gedrehte Tangentialvektor ins Innere der Kurve zeigt.

II. Flächen im Raum

Wir führen zunächst Grundlagen über Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^N ein: **Lokale Karten, Kartenwechsel, Darstellung als Niveaumengen, Tangentialräume, glatte Abbildungen** und deren **Differential, Vektorfelder** sowie deren **Integralkurven** und **Fluss**. Metrische Begriffe (wie Abstand, Winkel, Volumen) basieren auf dem Skalarprodukt zwischen Tangentialvektoren, das auch als **erste Fundamentalform** bezeichnet wird.

Dann wenden wir uns der Krümmung von Flächen im dreidimensionalen Raum zu. Diese kann auf verschiedene, äquivalente Weisen mathematisch beschrieben werden, denen jeweils eine andere Grundvorstellung zugrunde liegt: Die **Weingartenabbildung** drückt aus, wie sich der Normalenvektor ändert, wenn man sich entlang einer in der Fläche verlaufenden Kurve bewegt. Die **zweite Fundamentalform** gibt die Krümmung von Kurven an, die man erhält, wenn man die Fläche mit verschiedenen Ebenen schneidet. Weingartenabbildung und zweite Fundamentalform enthalten die volle Krümmungsinformation über die Fläche. Sie sind aber etwas unhandlich, da sie durch Matrizen dargestellt werden. Handlicher sind skalare Größen (Zahlen): Die **Hauptkrümmungen**, die **Gaußkrümmung** und die **mittlere Krümmung**. Diese enthalten zwar jeweils nur Teilinformation über die Krümmung der Fläche, für viele Zwecke reicht das jedoch aus. Alle diese Größen sind für jeden Punkt der Fläche definiert und können von Punkt zu Punkt variieren.

Dieser etwas unübersichtliche Zoo von Krümmungsbegriffen für Flächen lässt sich für den Anfänger vielleicht am besten so sortieren: Am einfachsten zu veranschaulichen sind die Hauptkrümmungen; um diese zu definieren braucht man die zweite Fundamentalform (oder die äquivalente Weingartenabbildung); mit ihrer Hilfe erhält man Gauß- und die mittlere Krümmung.

Zum Abschluss des Kapitels geben wir eine kleine Formelsammlung: Wie kann man die genannten Begriffe in lokalen Koordinaten berechnen?

Überblick: Begriffe im bereits behandelten Fall der Kurven und ihre Entsprechungen für Flächen:

Kurven	Flächen
Parametrisierung	Parametrisierung
Umparametrisierung	Umparametrisierung (Kartenwechsel)
Bogenlänge	Flächeninhalt
Bogenlängeparametrisierung	(kein Analogon)
Tangente	Tangentialebene
Ableitung der Tangente (Krümmung)	Richtungsableitung der Normalen (statt des Tangentialraums) auch: Kovariante Ableitung (Ableitung eines tangentialen Vektorfeldes)

II.1. Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^N

Dieser Abschnitt ist zum großen Teil Wiederholung aus Analysis II / III. Man kann sich immer den Fall $N = 3, n = 2$ vorstellen.

II.1.1 Definition

Seien $n \leq N \in \mathbb{N}$. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^N$ heißt **n -dimensionale Untermannigfaltigkeit**, falls gilt:

Für alle $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung $U \subset M$, eine offene Teilmenge $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ und einen Homöomorphismus $\varphi : \tilde{U} \rightarrow U$, so dass φ als Abbildung $\tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^N$ glatt und $D\varphi|_u$ für alle $u \in \tilde{U}$ injektiv ist.

φ heißt **lokale Karte**, U **Kartenumgebung** oder **Kartengebiet**.

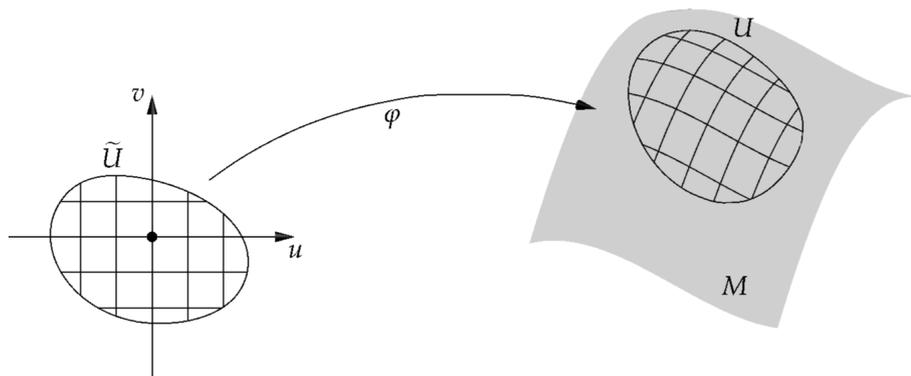


Abbildung II.1.: Lokale Karte einer 2-dimensionalen Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3

Bemerkung: \triangleright φ Homöomorphismus heißt, dass φ stetig und bijektiv und auch φ^{-1} stetig ist.

\triangleright U offene Teilmenge von M bedeutet: Es gibt eine offene Teilmenge $W \subset \mathbb{R}^N$, so dass $U = W \cap M$ ist. Damit ist z.B. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{Q}\}$ ausgeschlossen.

\triangleright $D\varphi|_u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ ist eine lineare Abbildung (oder $n \times N$ -Matrix). Es sind äquivalent:

- $D\varphi|_u$ ist injektiv
- $\text{Bild}(D\varphi|_u)$ ein n -dimensionaler Unterraum
- die Jacobi-Matrix $\left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial u^j}(u)\right)_{\substack{i=1, \dots, N \\ j=1, \dots, n}}$ hat den Rang n
- die Vektoren $\frac{\partial \varphi}{\partial u^1}(u), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial u^n}(u) \in \mathbb{R}^N$ sind linear unabhängig

Da diese Vektoren $\text{Bild}(D\varphi|_u)$ aufspannen, sind sie dann eine Basis dieses Raums.

Falls diese Bedingungen für alle $u \in \tilde{U}$ erfüllt sind, dann heißt φ **Immersion**.

$\frac{\partial \varphi}{\partial u^j}(u)$ ist ein Tangentialvektor an M im Punkt $\varphi(u)$, siehe unten.

\triangleright Kurz: M ist Untermannigfaltigkeit, wenn es durch Kartengebiete überdeckt werden kann. Eine Menge $\{(\varphi_i, U_i) : i \in I\}$ von lokalen Karten und Kartenumgebungen heißt **Atlas** von M , wenn M von den U_i überdeckt wird, d.h. wenn $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ gilt.

\triangleright Im Unterschied zur Kurventheorie liegt unsere Aufmerksamkeit nun auf der Menge M . Die lokalen Karten (Parametrisierungen) sind zur Beschreibung von M weiterhin notwendig, werden aber mehr als Mittel zum Zweck betrachtet.

Beispiele: \triangleright $M = \{(x, 0) : x \in (0, 1)\}$ ist 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^2 mit einer lokalen Karte $\tilde{U} = (0, 1)$, $U = M$ und $\varphi(u) = (u, 0)$.

- ▷ $n = 1$: Sei M das Bild einer einfach geschlossenen regulären Kurve. Dann ist M eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit. Ist $\tilde{c} : \mathbb{R} \rightarrow M$ eine periodische Parametrisierung (siehe die Erklärung nach Definition I.4.1), so ist $\tilde{c}|_J$ eine lokale Karte für jedes offene Intervall J , auf dem \tilde{c} injektiv ist. Injektivität von $D\tilde{c}|_u$ bedeutet $\tilde{c}'(u) \neq 0$ für alle $u \in \tilde{\mathbb{R}}$, also dass \tilde{c} regulär ist.

Eine Kurve, die sich selbst schneidet, ist keine Untermannigfaltigkeit: Der Schnittpunkt hat keine Kartenumgebung.

Wann ist das Bild einer einfachen regulären Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit? Die Antwort ist überraschend kompliziert. Sie ist z.B. dann *nein*, wenn I einen Endpunkt enthält, oder wenn $I = (a, b)$ offen ist und der Grenzwert $\lim_{u \rightarrow a} c(u)$ ein Kurvenpunkt ist. Eine hinreichende Bedingung für die Antwort *ja* ist: $I = (a, b)$ und c lässt sich zu einer einfachen regulären Kurve auf $[a, b]$ fortsetzen.

Die kompakten eindimensionalen Untermannigfaltigkeiten von \mathbb{R}^N lassen sich charakterisieren: es sind die Vereinigungen endlich vieler disjunkter Bilder einfach geschlossener regulärer Kurven. (Übung)

- ▷ $n = N$: Die N -dimensionalen Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^N sind genau die offene Teilmengen $M \subset \mathbb{R}^N$. Eine Karte ist dann beispielsweise $U = \tilde{U} = M$ und $\varphi = \text{id}$.

Bemerkung: ▷ **Bezeichnungen:** Punkte im \mathbb{R}^n werden als $u = (u^1, \dots, u^n) \in \tilde{U}$ benannt, bei $n = 2$ oft mit (u, v) . In \mathbb{R}^N schreiben wir meist $\varphi(u, v) = p \in M$ oder $\varphi(u, v) = x = (x^1, \dots, x^N) \in M$, bei $N = 3$ auch $\varphi(u, v) = (x, y, z)$. Statt $\varphi(u)$ schreiben wir gelegentlich $x(u)$.

- ▷ φ^{-1} ordnet jedem $x \in U$ ein n -Tupel $\varphi^{-1}(x) = (u^1, \dots, u^n) \in \mathbb{R}^n$ zu. φ^{-1} heißt daher auch **lokales Koordinatensystem** auf M . Statt u^i schreiben wir auch $u^i(x)$. Also sind $u^1(x), \dots, u^n(x)$ **die lokalen Koordinaten von x bezüglich der Karte φ** . Wir schreiben auch manchmal $\varphi^{-1}(x) = u(x)$.

Bevor wir weitere Beispiele angeben, erinnern wir an zwei Sätze, die aus der Analysis III als bekannt vorausgesetzt werden:

II.1.2 Satz (Graphen sind Untermannigfaltigkeiten)

Sei $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen, $h : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^{N-n}$ glatt. Dann ist $\text{Graph}(h) = \{(u, h(u)) : u \in \tilde{U}\} \subset \mathbb{R}^N$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit

Denn wir können $\varphi : \tilde{U} \rightarrow U = \text{Graph}(h); u \mapsto (u, h(u))$ als (globale) Karte nehmen.

II.1.3 Satz (Niveaumengen sind Untermannigfaltigkeiten)

Sei $W \subset \mathbb{R}^N$ offen, $F : W \rightarrow \mathbb{R}^{N-n}$ glatt. Sei $r \in \mathbb{R}^{N-n}$ und $M = F^{-1}(r) = \{x \in W : F(x) = r\}$. Falls $DF|_x$ surjektiv ist für alle $x \in F^{-1}(r)$, also den Rang $N - n$ hat, dann ist M eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^N .

Wichtiger Spezialfall: Im Fall von Hyperflächen ($N - n = 1$) ist Surjektivität äquivalent zu $\nabla F(x) \neq 0$.

Beide Sätze haben Umkehrungen, aber nur lokal: Jede Mannigfaltigkeit kann lokal als Graph und als Niveaumenge geschrieben werden. (Das heißt: Jeder Punkt von M hat eine Umgebung U , so dass U ein Graph bzw. eine Niveaumenge ist.) Für die Darstellung als Graph müssen ggf. erst die Koordinaten permutiert werden.

Die Surjektivität von $DF|_x$ muss nur für Punkte $x \in M$ gelten. Falls Sie für alle $x \in W$ gilt, so heißt F eine **Submersion**.

Beispiel: Die Einheitskugel $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ ist eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 . Denn für die Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ und $r = 1$ ist $S^2 = F^{-1}(r)$ und es gilt $\nabla F(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) \neq (0, 0, 0)$ für alle $(x, y, z) \in S^2$.

Ein Atlas für S^2 ist gegeben durch folgende 6 Karten:

$$\triangleright U_1 = S^2 \cap \{z > 0\}, \widetilde{U}_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\} \text{ und } \varphi_1(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}).$$

$$\triangleright U_2 = S^2 \cap \{z < 0\}, \widetilde{U}_2 = \widetilde{U}_1 \text{ und } \varphi_2(x, y) = (x, y, -\sqrt{1 - x^2 - y^2}).$$

Es fehlt noch der Äquator $C = S^2 \setminus \{U_1 \cup U_2\}$. Um diesen zu überdecken, nehmen wir z.B.

$$\triangleright U_3 = S^2 \cap \{y > 0\}, \widetilde{U}_3 = \{(x, z) : x^2 + z^2 < 1\} \text{ und } \varphi_3(x, z) = (x, \sqrt{1 - x^2 - z^2}, z).$$

$$\triangleright U_4 = S^2 \cap \{y < 0\}, \widetilde{U}_4 = \widetilde{U}_3 \text{ und } \varphi_4(x, z) = (x, -\sqrt{1 - x^2 - z^2}, z).$$

$$\triangleright U_5 = S^2 \cap \{x > 0\}, \widetilde{U}_5 = \{(y, z) : y^2 + z^2 < 1\} \text{ und } \varphi_5(y, z) = (\sqrt{1 - y^2 - z^2}, y, z).$$

$$\triangleright U_6 = S^2 \cap \{x < 0\}, \widetilde{U}_6 = \widetilde{U}_5 \text{ und } \varphi_6(y, z) = (-\sqrt{1 - y^2 - z^2}, y, z).$$

Dieser Atlas benötigt 6 Karten. Es gibt aber einen anderen Atlas, der mit zwei Karten auskommt:

Setze $\widetilde{U}_N = \mathbb{R}^2$ und $\varphi_N(u, v) = \left(\frac{2u}{u^2+v^2+1}, \frac{2v}{u^2+v^2+1}, \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\right)$ = Schnittpunkt der Strecke von $(u, v, 0)$ zum "Nordpol" $N = (0, 0, 1)$ mit S^2 . Dann ist $U_N = S^2 \setminus \{N\}$. Konstruiere analog φ_S auf $\widetilde{U}_S = \mathbb{R}^2$ mit dem "Südpol" $S = (0, 0, -1)$. Dann ist $U_S = S^2 \setminus \{S\}$ und somit die ganze Kugel von den beiden Kartengebieten überdeckt.

Beachte:

- \triangleright In höheren Dimensionen gibt es im Allgemeinen keinen Ersatz für "Bogenlängeparametrisierung". Ein Kandidat wären flächenerhaltende Karten. Die gibt es zwar (das ist aber nicht leicht zu zeigen), aber es ist meist zu umständlich, damit zu rechnen.
- \triangleright Eventuell braucht man viele Koordinatensysteme, um (selbst zusammenhängende) Untermannigfaltigkeiten zu überdecken, z.B. einen Torus mit mehreren "Löchern".

Beispiel: Sei $\mathcal{M}(n) = \{n \times n \text{-Matrizen}\} \cong \mathbb{R}^{n^2}$ und $\mathcal{O}(n) = \{\text{orthogonale } n \times n \text{-Matrizen}\}$. Dann ist $\mathcal{O}(n)$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.

Denn: Sei $\text{Symm}(n) \subset \mathcal{M}(n)$ der Unterraum der symmetrischen Matrizen. Betrachte die Abbildung $F : \mathcal{M}(n) \rightarrow \text{Symm}(n)$ mit $U \mapsto UU^T - I$. Es gilt $U \in \mathcal{O}(n)$ genau dann, wenn $F(U) = 0$, also ist $\mathcal{O}(n) = F^{-1}(0)$.

Es gilt per Definition $DF|_U(B) = \frac{d}{dt}|_{t=0} F(U + t \cdot B) = BU^T + UB^T = BU^T + (BU^T)^T$. Die Abbildung $DF|_U$ ist surjektiv für jedes $U \in \mathcal{O}(n)$, denn zu $C \in \text{Symm}(n)$ können wir $B \in \mathcal{M}(n)$ so wählen, dass $BU^T = (BU^T)^T = \frac{C}{2}$ gilt, also $B = \frac{C}{2}U$.

Nach Satz II.1.3 ist also $\mathcal{O}(n)$ eine Untermannigfaltigkeit. Wegen $\dim \mathcal{M}(n) = n^2$ und $\dim \text{Symm}(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ folgt $\dim \mathcal{O}(n) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Die Untermannigfaltigkeit $\mathcal{O}(n)$ ist kompakt. Denn eine orthogonale Matrix $U = (U_{ij})$ hat normierte Zeilen, also ist $\sum_{i,j=1}^n (U_{ij})^2 = n$ für alle $U \in \mathcal{O}(n)$, d.h. $\mathcal{O}(n)$ ist beschränkt. Es ist auch abgeschlossen, da F stetig ist.

Bemerkung: Oft ist eine Untermannigfaltigkeit als $F^{-1}(r)$ gegeben. Um darauf rechnen zu können (z.B. die Krümmung zu bestimmen), muss man meist zu lokalen Karten übergehen (z.B. ist die Krümmung mittels Parametrisierung definiert!).

Erinnerung an das Differential einer Abbildung:

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $p \in U$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Per Definition ist $Df|_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ die eindeutige lineare Abbildung, für die gilt

$$\lim_{\mathbb{R}^n \ni h \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p) - Df|_p(h)}{\|h\|} = 0.$$

Als Richtungsableitung interpretiert ist $Df|_p(X) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(p + tX) = \sum X^i \frac{\partial f}{\partial u^i}$.

Allgemeiner gilt: Ist γ eine beliebige Kurve mit $\gamma(0) = p$ und $\dot{\gamma}(0) = X$, so ist $Df|_p(X) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(\gamma(t))$, denn nach der Kettenregel gilt $\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = Df|_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))$. Für $t = 0$ ergibt sich dann das gewünschte Ergebnis. Dies wird gleich nützlich sein.

Die wichtigste Eigenschaft von Untermannigfaltigkeiten ist, dass sie einen Tangentialraum haben, d.h. es gibt eine lokale lineare Approximation.

II.1.4 Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit, $p \in M$. Der **Tangentialraum** an M in p ist definiert durch

$$T_p M := \{X \in \mathbb{R}^N : \exists \text{ Kurve } \gamma : I \rightarrow M \text{ mit } I \text{ offenes Intervall, } 0 \in I, \gamma(0) = p, \dot{\gamma}(0) = X\}$$

Solche X heißen **Tangentialvektoren** an M in p .

II.1.5 Satz

- a) $T_p M$ ist ein n -dimensionaler Untervektorraum von \mathbb{R}^N .
- b) Sei $\varphi : \tilde{U} \rightarrow U$ lokale Karte und $u \in \tilde{U}$ das Urbild von p unter φ , also $\varphi(u) = p$. Dann gilt $T_p M = \text{Bild } D\varphi|_u$, und

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u^1}(u), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial u^n}(u) \text{ ist eine Basis von } T_p M.$$

- c) Falls $M = F^{-1}(r)$ wie im vorherigen Satz ist, dann ist $T_p M = \text{Kern } DF|_p$.

Beachte: $X \in T_p M$ sind als Richtungen aufzufassen. $T_p M$ ist ein linearer Unterraum (enthält also den Nullpunkt), kein affiner Unterraum durch p . Es gilt immer $0 \in T_p M$ (mit der Kurve $\gamma(t) = p$ für alle t).

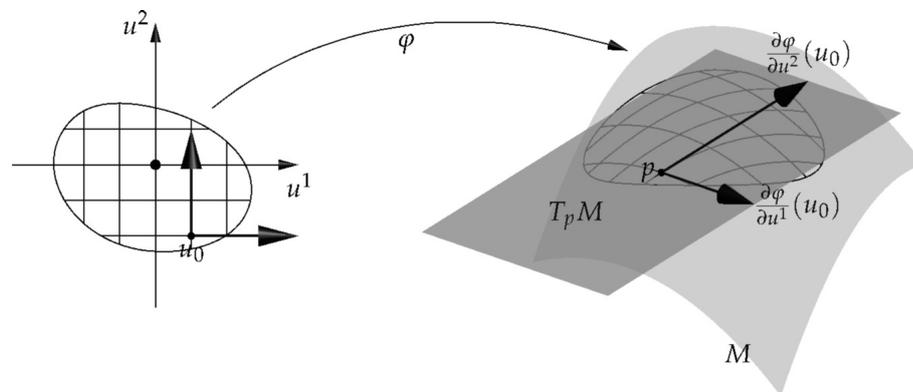


Abbildung II.2.: Tangentialraum im Punkt p einer 2-dimensionalen Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 : $\frac{\partial \varphi}{\partial u^1}(u_0)$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial u^2}(u_0)$ bilden eine Basis des Tangentialraumes

Beweis: b) Kurven $\gamma : I \rightarrow U$ entsprechen genau Kurven $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \tilde{U}$ mittels $\varphi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$. Nach der Kettenregel ist $\dot{\gamma}(0) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \varphi(\tilde{\gamma}(t)) = D\varphi|_u(\dot{\tilde{\gamma}}(0))$. Nun gibt es für jedes $\tilde{X} \in \mathbb{R}^n$ ein $\tilde{\gamma}$ mit $\tilde{\gamma}(0) = u$ und $\dot{\tilde{\gamma}}(0) = \tilde{X}$. Damit folgt $T_p M = D\varphi|_u(\mathbb{R}^n) = \text{Bild } D\varphi|_u$.

Es gilt $\frac{\partial \varphi}{\partial u^i}(u) = D\varphi|_p(e_i)$, wobei $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ der i -te Standard-Einheitsvektor des \mathbb{R}^n ist. Da e_1, \dots, e_n eine Basis des \mathbb{R}^n bilden, ist $\frac{\partial \varphi}{\partial u^1}(u), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial u^n}(u)$ eine Basis von $T_p M$.

a) folgt aus b)

c) Falls $X \in T_p M$, $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = X$, $\gamma(t) \in M$ für alle t und $M = F^{-1}(r)$, dann ist $F(\gamma(t)) = r$ für alle t . Ableiten nach t an der Stelle 0 liefert $DF|_p(X) = 0$, also $X \in \text{Kern } DF|_p$ und damit $T_p M \subset \text{Kern } DF|_p$. Da die beiden Vektorräume die gleiche Dimension haben, folgt die Gleichheit. \square

Bemerkung: \triangleright b) erklärt, warum φ eine Immersion sein soll: Dies stellt sicher, dass M in jedem Punkt einen n -dimensionalen Tangentialraum hat.

\triangleright Eine Karte gibt ein "Koordinatennetz" auf $U \subset M$ an: Dies besteht aus den u^i -Linien ($i = 1, \dots, n$), also den Bildern unter φ der zur u^i -Achse parallelen Geraden. $\frac{\partial \varphi}{\partial u^i}(u_0)$ ist tangential an die u^i -Linie durch $p = \varphi(u_0)$.

\triangleright Falls $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, also M eine Hyperfläche ist, dann ist $\text{Kern } DF|_p = (\nabla F(p))^\perp$.

Beispiele: a) Sei $n = N$, $M \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Dann ist $T_p M = \mathbb{R}^n$ für alle $p \in M$.

b) Sei $n = 1$ und M das Bild einer regulären Kurve c . Dann ist $T_p M = \text{span } \dot{c}(t)$ für $p = c(t)$.

c) Sei $n = 2$ und S^2 die Einheitssphäre, $\varphi(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$. Dann ist $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = (1, 0, -\frac{x}{z})$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = (0, 1, -\frac{y}{z})$ eine Basis von $T_p M$. Hierbei ist $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ gesetzt.

Oder: sei $p = (x, y, z) \in S^2$, dann ist $T_p M = \text{Kern } DF$ mit $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, also $T_{(x,y,z)} M = (x, y, z)^\perp$.

d) Sei $\mathcal{O}(n) = F^{-1}(0)$ mit $F(U) = UU^T - I$ die Untermannigfaltigkeit aus dem letzten Beispiel. Dann ist $DF|_U(B) = BU^T + (BU^T)^T$ genau dann gleich Null, wenn BU^T antisymmetrisch ist, also $B = AU$ mit einer antisymmetrischen Matrix A . Demnach ist $T_U \mathcal{O}(n) = \{AU : A \text{ antisymmetrisch}\}$. Insbesondere ist

$$T_U \mathcal{O}(n) = \{A \in \mathcal{M}(n) : A \text{ antisymmetrisch}\}$$

Dies ist die geometrische Art, die Beziehung zwischen orthogonalen und antisymmetrischen Matrizen auszudrücken.

II.2. Grundbegriffe der Analysis auf (Unter)-Mannigfaltigkeiten

Wir werden oft Funktionen und Vektorfeldern begegnen, die auf einer Untermannigfaltigkeit M definiert sind. Dafür müssen wir uns ein wenig Gedanken darüber machen, was in diesem Fall Differenzierbarkeit und die Ableitung bedeutet und wie man diese in lokalen Koordinaten darstellt.

Wenn immer möglich, führen wir die Konzepte so ein, dass sie nur mittels lokaler Karten formuliert sind, also der umgebende Raum \mathbb{R}^N nicht vorkommt. Das erlaubt später eine direkte Verallgemeinerungen auf abstrakte Mannigfaltigkeiten.

II.2.1 Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit. Eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **glatt**, wenn für jede lokale Karte $\varphi : \tilde{U} \rightarrow U$ die Funktion $\tilde{f} = f \circ \varphi : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$ glatt ist.

Wir stellen uns \tilde{f} vor als "f in den Koordinaten φ geschrieben". Sei beispielsweise $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) = x \cdot z$ und $\varphi(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$, dann ist $\tilde{f}(x, y) = f(\varphi(x, y)) = f(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) = x \cdot \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Nun ist es schwierig, nachzuprüfen, ob etwas in jeder Karte gilt. Daher ist folgendes Lemma nützlich:

II.2.2 Lemma

Sei $\{(\varphi_i, U_i) : i \in I\}$ ein Atlas für M . Eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann glatt, wenn $f \circ \varphi_i$ glatt ist für alle $i \in I$.

Mit anderen Worten: Zum Überprüfen der Glattheit genügt es, nur die Karten eines festen Atlases zu überprüfen, z.B. bei der Sphäre die beiden stereographischen Projektionen. Für den Beweis brauchen wir folgendes Lemma, das aus Analysis III bekannt ist.

II.2.3 Lemma

Seien φ, ψ zwei lokale Karten für M . Dann ist der Kartenwechsel $\psi^{-1} \circ \varphi$ glatt.

Den genauen Definitions- und Bildbereich von $\psi^{-1} \circ \varphi$ liest man aus Abbildung II.3 ab.

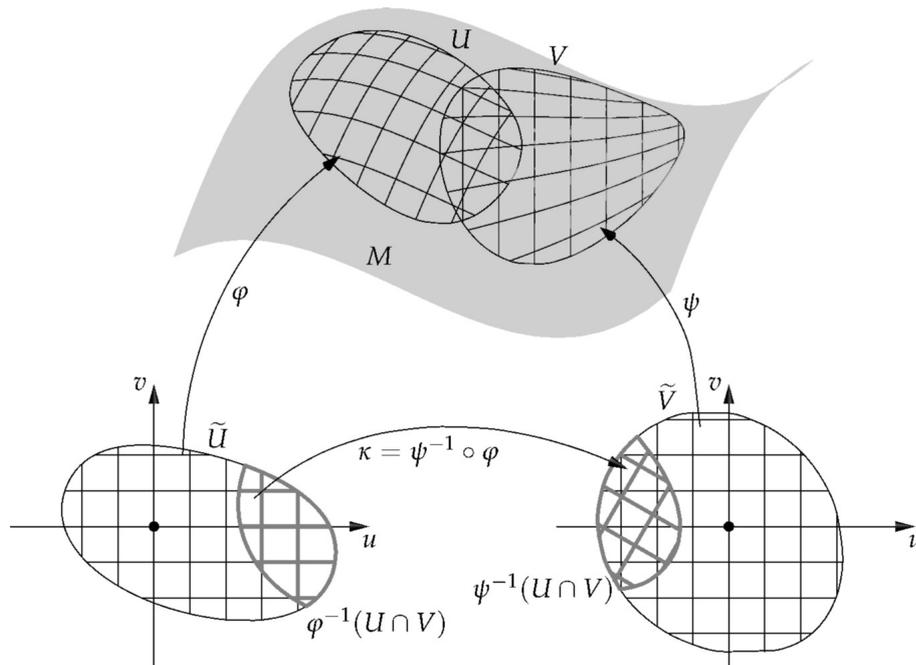


Abbildung II.3.: Der Kartenwechsel κ bildet $\varphi^{-1}(U \cap V)$ auf $\psi^{-1}(U \cap V)$ ab

Beweis (von Lemma II.2.2): Angenommen, ist $f \circ \varphi_i$ glatt für alle $i \in I$. Sei $\varphi : \tilde{U} \rightarrow U$ eine beliebige Karte. Wir müssen überprüfen, dass $f \circ \varphi$ glatt ist. Für jedes i ist $f \circ \varphi = (f \circ \varphi_i) \circ (\varphi_i^{-1} \circ \varphi)$, wo dies definiert ist, d.h. auf $\varphi^{-1}(U \cap U_i)$. Nach Voraussetzung ist $f \circ \varphi_i$ glatt und nach Lemma II.2.3 ist $\varphi_i^{-1} \circ \varphi$ auf seinem Definitionsbereich $\varphi^{-1}(U \cap U_i)$ glatt.

Also ist $f \circ \varphi$ auf der Menge $\varphi^{-1}(U \cap U_i) \subset \tilde{U}$ glatt. Da die Mengen U_i ganz M und damit auch U überdecken, überdecken die Mengen $\varphi^{-1}(U \cap U_i) \subset \tilde{U}$ ganz $\varphi^{-1}(U) = \tilde{U}$, wenn $i \in I$ variiert. Damit ist $f \circ \varphi$ glatt, was zu zeigen war. \square

Analog definieren wir für Abbildungen zwischen Untermannigfaltigkeiten Glattheit mittels lokaler Karten:

II.2.4 Definition

Seien M, N n - bzw. m -dimensionale Untermannigfaltigkeiten von \mathbb{R}^a bzw. \mathbb{R}^b . Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ heißt **glatt**, wenn für alle lokalen Karten $\varphi : \tilde{U} \rightarrow U \subset M$ und $\psi : \tilde{V} \rightarrow V \subset N$ die Abbildung $\tilde{f} = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{V} \subset \mathbb{R}^m$ glatt ist.

Wiederum stellt man sich \tilde{f} als "f in lokalen Koordinaten φ, ψ geschrieben" vor. Beachte, dass hierbei \tilde{f} Werte in \mathbb{R}^m hat, also als Vektor $\tilde{f} = (\tilde{f}^1, \dots, \tilde{f}^m)$ mit Funktionen $\tilde{f}^i : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$ geschrieben werden kann. Auch hier genügt es natürlich wieder, die Bedingung für alle Karten φ in einem Atlas für M und alle Karten ψ in einem Atlas in N nachzuprüfen.

Bemerkung: Wegen $N \subset \mathbb{R}^b$ kann man auch f als Vektor $f = (f^1, \dots, f^b)$ schreiben, und dann ist Glattheit von f im Sinne der Definition äquivalent zu Glattheit jeder der Komponentenfunktionen $f^i : M \rightarrow \mathbb{R}$ (Übung).

Die gegebene Definition hat den Vorteil, sofort auf den Fall abstrakter Mannigfaltigkeiten M, N übertragbar zu sein. Außerdem wird das hier auftretende \tilde{f} auch für die Berechnung des Differentials df mittels Basen von $T_p M, T_{f(p)} N$ gebraucht, siehe den folgenden Satz.

II.2.5 Definition

Seien $M \subset \mathbb{R}^a, N \subset \mathbb{R}^b$ Untermannigfaltigkeiten und $f : M \rightarrow N$ glatt, $p \in M$. Das **Differential** von f in p ist die Abbildung

$$df|_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$$

definiert wie folgt:

Sei $X \in T_p M$ gegeben durch die Kurve $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$, also $\gamma(0) = p$ und $\dot{\gamma}(0) = X$. Dann sei $df|_p(X) := (f \circ \gamma)'(0) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(\gamma(t))$.

$f \circ \gamma$ ist eine Kurve in N und es ist $(f \circ \gamma)(0) = f(p)$, daher ist tatsächlich $df|_p(X) \in T_{f(p)} N$.

Bemerkung: \triangleright Die Vorstellung ist: Der Vektor X beschreibt, in welcher momentanen Richtung und mit welcher momentanen Geschwindigkeit sich ein Punkt x von p fortbewegt; der Vektor $df|_p(X)$ gibt dann die momentane Richtung und Geschwindigkeit von $f(x)$ an.

\triangleright Man kann hier nicht $df|_p(x) = \frac{d}{dt} f(u_0 + tX)$ (wie im \mathbb{R}^n) nehmen, da gegebenenfalls $u_0 + tX \notin M$, also f dort nicht definiert ist.

\triangleright Falls $M \subset \mathbb{R}^n$ offen ist, so

– gilt $T_p M = \mathbb{R}^n$ für alle $p \in M$

– stimmt die Definition von df mit der alten Definition des Differentials Df überein, wir können also wahlweise Df oder df schreiben.

\triangleright (Spezialfall $N = \mathbb{R}$) Ist $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, so ist also für jedes $p \in M$ das Differential eine lineare Abbildung $df|_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$, also ein Element des Dualraums $T_p^* M := (T_p M)^*$. Für $X \in T_p M$ ist die Zahl $df|_p(X)$ die Richtungsableitung von f in Richtung X .

Beispiele: \triangleright Sei $M = N = S^2$ und $f(x, y, z) = (-y, x, z)$ die Rotation um 90° in der $x - y$ -Ebene um die z -Achse. Es ist $f(p) = U \cdot p$, wobei U eine orthogonale Matrix ist. Dann gilt $df|_p(X) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(\gamma(t)) = \frac{d}{dt}|_{t=0} U \cdot \gamma(t) = U \cdot \dot{\gamma}(0) = U \cdot X$.

Betrachte zum Beispiel $p = (1, 0, 0)$ und einen Einheitsvektor $X \in T_p S^2$, der tangential an den Äquator liegt. Dann ist $df|_p(X)$ ein Einheitsvektor tangential an den Äquator im Punkt $f(p) = (0, 1, 0)$.

▷ Ist $\varphi : \tilde{U} \rightarrow U \subset M$ eine lokale Karte, so ist

$$(II.1) \quad d\varphi|_u(e_i) = \frac{\partial \varphi}{\partial u^i}(u)$$

Dies folgt direkt aus der Definition der partiellen Ableitung.

II.2.6 Satz

$df|_p(X)$ ist wohldefiniert, also unabhängig von der Wahl von γ , solange $\gamma(0) = p$ und $\dot{\gamma}(0) = X$ gilt. Außerdem ist $df|_p$ linear und in Koordinaten φ, ψ für M, N gegeben durch

$$df|_p \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u^j} \right) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \tilde{f}^i}{\partial u^j} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v^i}$$

für $j = 1, \dots, n$. Dabei ist $\tilde{f} = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi$.

Kurz: In lokalen Koordinaten ist df durch die Jacobimatrix von \tilde{f} gegeben.

Weiterhin gilt die Kettenregel:

$$d(g \circ f)|_p = dg|_{f(p)} \circ df|_p$$

Kurz: $d(g \circ f) = dg \circ df$.

Die Darstellung durch die Jacobimatrix von \tilde{f} ist hier bezüglich der Basen $\frac{\partial \varphi}{\partial u^j}$ von $T_p M$ und $\frac{\partial \psi}{\partial v^i}$ von $T_{f(p)} N$ zu verstehen.

Der Übersichtlichkeit halber haben wir nicht hingeschrieben, wo die jeweiligen partiellen Ableitungen auszuwerten sind. Dies werden wir häufig so handhaben. Aus dem Kontext kann man dies immer leicht herleiten. In diesem Fall ist, falls $\varphi(u) = p = \psi(v)$, ausführlich $\frac{\partial \varphi}{\partial u^j}(u)$, $\frac{\partial \tilde{f}^i}{\partial u^j}(u)$ und $\frac{\partial \psi}{\partial v^i}(v)$ gemeint.

Beweis: ▷ Wohldefiniertheit: Reduziere alles mittels lokaler Karten auf offene Mengen im \mathbb{R}^n : Sei φ lokale Karte für M nahe p und $\tilde{\gamma} = \varphi^{-1} \circ \gamma$ die Kurve in \tilde{U} , die γ entspricht. Dann ist $f \circ \gamma = f \circ \varphi \circ \tilde{\gamma}$, also $\frac{d}{dt}|_{t=0} f(\gamma(t)) = \frac{d}{dt}|_{t=0} (f \circ \varphi)(\tilde{\gamma}(t))$. Da $f \circ \varphi : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^N$, ist letzteres nach Kettenregel im \mathbb{R}^n unabhängig von $\tilde{\gamma}$, hängt also nur von $\dot{\tilde{\gamma}}(0)$ und damit nur von $\dot{\gamma}(0) = d\varphi(\dot{\tilde{\gamma}}(0))$ ab.

▷ Kettenregel: Es gilt per Definition $d(g \circ f)(X) = \frac{d}{dt}|_{t=0} g(f(\gamma(t)))$ und auch ebenso $dg(df(X)) = dg\left(\frac{d}{dt}|_{t=0} f(\gamma(t))\right) = \frac{d}{dt}|_{t=0} g(f(\gamma(t)))$.

▷ Wähle lokale Karten φ für M nahe p und ψ für N nahe $f(p)$. Wegen $\tilde{f} = \sum_{i=1}^n \tilde{f}^i e_i$ gilt $d\tilde{f}(e_j) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^j} = \sum_{i=1}^n a_j^i e_i$, wobei $a_j^i = \frac{\partial \tilde{f}^i}{\partial u^j}$ gesetzt wurde. Aus $f \circ \varphi = \psi \circ \tilde{f}$ folgt nun mit der Kettenregel $df(d\varphi(e_j)) = d\psi(d\tilde{f}(e_j)) = d\psi(\sum_i a_j^i e_i) = \sum_i a_j^i d\psi(e_i)$, und mit Gleichung (II.1), angewendet für φ und ψ , folgt die Behauptung.

II.2.7 Definition

$f : M \rightarrow N$ heißt Diffeomorphismus, wenn f bijektiv ist und f und f^{-1} beide glatt sind.

Beispiel: Lokale Karten $\varphi : \tilde{U} \rightarrow U$ sind Diffeomorphismen.

Integration eines Vektorfeldes:**II.2.8 Definition**

Sei M eine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^N . Ein **Vektorfeld** X ist eine Abbildung, die jedem $p \in M$ ein $X_p \in T_p M$ zuordnet. Ist $\varphi : \tilde{U} \rightarrow U$ eine lokale Karte, so ist die Darstellung von X bezüglich φ :

$$X_p = \sum_i X^i(p) \frac{\partial \varphi}{\partial u^i}, \quad p \in U.$$

X heißt **glatt**, wenn alle Funktionen X^i für jede Karte φ glatt sind.

II.2.9 Definition

Sei X ein Vektorfeld auf M . Eine parametrisierte Kurve $\gamma : I \rightarrow M$ heißt **Integralkurve** von X , falls $\dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)}$ für alle $t \in I$ gilt.

Beispiel: Sei $M = \mathbb{R}$, $X(x) = x^2$. Schreibe $\gamma(t) = x(t)$. Dann ist γ Integralkurve von X genau dann, wenn x die Differentialgleichung $\dot{x} = x^2$ erfüllt.

II.2.10 Satz

Sei M eine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^N , X ein glattes Vektorfeld auf M und $p \in M$. Dann gibt es genau eine maximale Integralkurve $\gamma_p : I_{p,max} \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = p$. Dabei ist das Definitionintervall $I_{p,max}$ offen. Falls M kompakt ist, so ist $I_{p,max} = \mathbb{R}$, d.h. Integralkurven sind für alle Zeiten definiert.

Allgemeiner: Sei $X(t)$ ein zeitabhängiges Vektorfeld (d.h. $X(t)$ ist ein Vektorfeld für jedes t , und $(t, p) \mapsto X(t)_p$ ist glatt bezüglich t und p). Dann hat $\dot{\gamma}(t) = X(t)_{\gamma(t)}$ eine eindeutige Lösung, die bei kompaktem M für alle Zeiten definiert ist.

Lokale Existenz der Integralkurven zeigt man, indem man die Aussage mittels einer lokalen Karte auf die bekannte Aussage im \mathbb{R}^n zurückführt. Die übrigen Aussagen, wie auch Satz II.2.12, können ähnlich zu den analogen, aus Analysis III bekannten Sätzen für Vektorfelder auf offenen Teilmengen des \mathbb{R}^n bewiesen werden. Einzelheiten sind in Kapitel IV.3 ausgeführt.

Wir können nun den Beweis des Hauptsatzes der Kurventheorie vervollständigen. Es war noch Lemma I.3.9 zu zeigen.

Beweis (von Lemma I.3.9): Für jedes $C \in \mathcal{M}(n)$ sei $X(t)_C = A(t)C$. Dies ist ein zeitabhängiges Vektorfeld auf $\mathcal{M}(n)$. Sei $\mathcal{O}_+(n) = \{C \in \mathcal{O}(n) : \det C = +1\}$. Dies ist eine Zusammenhangskomponente von $\mathcal{O}(n)$ (Übung).

Die Gleichung $\dot{U} = AU$ bedeutet, dass U eine Integralkurve von $X(t)$ ist. Da $A(t)$ schiefssymmetrisch ist, ist $X(t)$ überall tangential an die Untermannigfaltigkeit $\mathcal{O}_+(n)$ von $\mathcal{M}(n)$, d.h. $X(t)_C \in T_C \mathcal{O}_+(n)$ für alle $C \in \mathcal{O}_+(n)$.

Also ist die Einschränkung $X(t)|_{\mathcal{O}_+(n)}$ ein (zeitabhängiges) Vektorfeld auf $\mathcal{O}_+(n)$. Da $\mathcal{O}_+(n)$ kompakt ist und $I \in \mathcal{O}_+(n)$, existiert genau eine Integralkurve $\tilde{U} : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{O}_+(n)$ von $X(t)|_{\mathcal{O}_+(n)}$ mit $\tilde{U}(0) = I$, also eine Lösung von $\dot{\tilde{U}}(t) = X(t)|_{\tilde{U}(t)}$.

Damit gilt $\dot{\tilde{U}} = A\tilde{U}$, d.h. \tilde{U} erfüllt dieselbe Differentialgleichung und Anfangsbedingung wie U . Wegen der Eindeutigkeit der Lösungen folgt $\tilde{U}(t) = U(t)$ für alle $t \in [0, b]$, also $U(t) \in \mathcal{O}_+(n)$ für alle n . \square

II.2.11 Definition

Der **Fluss** von X ist $\Phi(t, p) = \gamma_p(t)$, wobei γ_p die maximale Integralkurve mit $\gamma_p(0) = p$ ist.

Der Fluss enthält die Information aller Integralkurven gemeinsam. Der Definitionsbereich des Flusses ist $\{(t, p) : p \in M, t \in I_{p, \max}\} \subset \mathbb{R} \times M$. Falls alle Integralkurven für alle Zeiten definiert sind, d.h. $I_{p, \max} = \mathbb{R}$ für alle p , ist also

$$\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M.$$

Wir nehmen dies im Folgenden immer an (es ist z.B. für kompaktes M immer erfüllt) und definieren noch $\Phi_t : M \rightarrow M$ durch $\Phi_t(p) = \Phi(t, p)$.

II.2.12 Satz

Es gilt $\Phi_0 = \text{id}_M$ und $\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s$ für alle $t, s \in \mathbb{R}$. Die Abbildung Φ_t ist ein Diffeomorphismus $M \rightarrow M$ für alle t .

II.3. Erste Fundamentalform und Flächeninhalt

Vorbemerkung zur Notation

Bei vielen Überlegungen in diesem Kapitel fixieren wir einen Punkt $p \in M$. Wir bezeichnen Tangentialvektoren in $T_p M$ mit X, Y . Konsequenter wäre X_p, Y_p , aber dann werden die Formel schwerer lesbar.

Da wir viel in Koordinaten rechnen werden, führen wir folgende abkürzende Notation für die mittels einer Karte φ definierten Basisvektoren von $T_p M$, wobei $p = \varphi(u)$, ein:

$$\partial_i := \frac{\partial \varphi}{\partial u^i}(u)$$

Wenn wir die Koordinaten z.B. mit x, y bezeichnen, so schreiben wir ∂_x, ∂_y .

In der Geometrie sind unter anderem Längen und Winkel von Interesse. Diese sind bekanntlich mit Hilfe des Skalarprodukts zu berechnen.

II.3.1 Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit und $p \in M$.

Definiere $g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ durch $g_p(X, Y) = \langle X, Y \rangle_{\mathbb{R}^N}$ für $X, Y \in T_p M$.

g_p heißt **erste Fundamentalform** oder **induzierte Riemannsche Metrik** von M bei p .

Offenbar ist g_p ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum $T_p M$, also bei Wahl einer Basis (v_1, \dots, v_n) durch eine Matrix zu beschreiben. Dazu etwas Lineare Algebra zur Wiederholung:

g sei ein Skalarprodukt auf einem Vektorraum V . Sei v_1, \dots, v_n eine Basis von V und $g_{ij} = g(v_i, v_j)$ für $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Die $n \times n$ -Matrix (g_{ij}) heißt die Matrix von g bezüglich der Basis v_1, \dots, v_n .

Sind $X = \sum X^i v_i$ und $Y = \sum Y^j v_j$ beliebige Vektoren in V , dann gilt $g(X, Y) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} X^i Y^j$.

Sei nun $\varphi : \tilde{U} \rightarrow U$ eine lokale Karte von M , $p \in U$, $u \in \tilde{U}$ und $\varphi(u) = p$. Dann ist $\partial_1, \dots, \partial_n$ eine Basis von $T_p M$. Setze

$$g_{ij}(u) = g_p(\partial_i, \partial_j)$$

für $i, j \in \{1, \dots, n\}$. $g_{ij}(u)$ heißt Darstellung von g_p bzgl. der Karte φ . (g_{ij}) ist eine Abbildung, die jedem $u \in \tilde{U}$ eine $n \times n$ -Matrix zuordnet.

g_p ist also in der Basis $\partial_1, \dots, \partial_n$ durch die Matrix $(g_{ij}(u))$ gegeben.

Damit ist die Länge eines Tangentialvektors $X \in T_p M$, der in Koordinaten als $X = \sum X^i \partial_i$ gegeben ist, gleich

$$\|X\| = \sqrt{g_p(X, X)} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n X^i X^j g_{ij}(u)}$$

Der Winkel zwischen zwei Vektoren $X, Y \in T_p M$ ist $\angle X, Y = \arccos \frac{g_p(X, Y)}{\|X\| \cdot \|Y\|}$, was wiederum mittels der g_{ij} ausgedrückt werden kann.

Bemerkung: Allgemein ist eine **Riemannsche Metrik** auf einer (Unter-)Mannigfaltigkeit M eine Zuordnung eines Skalarproduktes g_p zu jedem Punkt $p \in M$, die glatt von p abhängt. Die Glattheit bedeutet dabei, dass für jede lokale Karte die Funktionen $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$ glatt auf \tilde{U} sind.

Die euklidische Metrik auf \mathbb{R}^N kann als Riemannsche Metrik aufgefasst werden: Für jeden Punkt $p \in \mathbb{R}^N$ ist $T_p \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^N$, und das Skalarprodukt darauf ist einfach das euklidische für jedes p .

Die erste Fundamentalform auf der Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^N$ ist dann diejenige Riemannsche Metrik, die von der euklidischen auf \mathbb{R}^N induziert ist, in dem Sinn, dass man für jedes $p \in M$ das euklidische Skalarprodukt auf $T_p M$ einschränkt. Außer in Kapitel IV.5 werden wir immer diese induzierte Riemannsche Metrik betrachten.

Beispiele: \triangleright Sei $n = N = 2$, $M = \mathbb{R}^2$ und $\varphi(u) = u$. Dann ist $\partial_1 = (1, 0)$ und $\partial_2 = (0, 1)$. Wenn man die entsprechenden Skalarprodukte ausrechnet, erhält man damit $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

\triangleright Betrachte Polarkoordinaten auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, also $\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Dann ist $\partial_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = (\cos \theta, \sin \theta)$ und $\partial_\theta = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = (-r \sin \theta, r \cos \theta)$. Durch Ausrechnen der Skalarprodukte ergibt sich $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$. Also ist dies die Darstellung der euklidischen Metrik auf \mathbb{R}^2 in Polarkoordinaten.

\triangleright Betrachte einen Zylinder im \mathbb{R}^3 , also $x^2 + y^2 = 1$ und z beliebig mit der Karte $\varphi(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z)$. Es ist $\partial_\theta = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$ und $\partial_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = (0, 0, 1)$ und $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Es fällt auf, dass dies die selbe Matrix ist wie beim \mathbb{R}^2 in Standardkoordinaten.

\triangleright Betrachte zuletzt die obere Hälfte der Einheitskugel S^2 mit der Karte $\varphi(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$. Es ist $\partial_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = (1, 0, -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}})$ und $\partial_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = (0, 1, -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}})$. In diesem Fall ergibt sich

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{x^2}{1 - x^2 - y^2} & \frac{xy}{1 - x^2 - y^2} \\ \frac{xy}{1 - x^2 - y^2} & 1 + \frac{y^2}{1 - x^2 - y^2} \end{pmatrix},$$

also keine konstante Matrix, was eher der Normalfall ist.

Flächeninhalt (Volumen) und Integration über M :

In Analysis III haben wir bereits gezeigt, dass das n -dimensionale Volumen des von den Vektoren $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^N$ aufgespannten Parallelotops gleich der Wurzel aus der **Gramschen Determinante**

$$\sqrt{\det \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \dots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \dots & \langle v_n, v_n \rangle \end{pmatrix}} = \sqrt{\det(\langle v_i, v_j \rangle)}$$

ist.

Daraus haben wir gefolgert, dass das Bild eines Würfels W unter der linearen Abbildung $d\varphi|_u$ (wobei $\varphi: \tilde{U} \rightarrow U \subset M$ eine lokale Karte ist) das n -dimensionale Volumen

$$\sqrt{\det(\langle \partial_i, \partial_j \rangle)} \cdot \text{vol}_n(W)$$

hat. Ist $u \in \tilde{U}$ und W ein kleiner Würfel mit $u \in \tilde{U}$, so liegt weiterhin das Bild $\varphi(W)$ nahe dem Bild von W unter $d\varphi|_u$ (verschoben in den Punkt $p = \varphi(u)$). Denn $d\varphi|_u(W) \subset T_p M$. Dies motiviert die folgende Definition.

II.3.2 Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit und $\varphi : \tilde{U} \rightarrow U \subset M$ eine lokale Karte.

a) $d\text{vol}(u) = \sqrt{\det(g_{ij}(u))} du$ heißt das **Volumenelement** von M bezüglich der Karte φ .

b) Es sei $\text{vol}(U) = \int_{\tilde{U}} d\text{vol}(u) = \int_{\tilde{U}} \sqrt{\det(g_{ij}(u))} du$.

c) Sei $\{(\varphi_k, U_k)\}_{i=1, \dots, K}$ ein Atlas für M , derart, dass die Kartengebiete U_k paarweise disjunkt sind und $M \setminus \bigcup_{k=1}^K U_k$ eine Nullmenge ist. Dann definiere für beliebige offenen Mengen $S \subset M$

$$\text{vol}(S) := \sum_k \text{vol}(S \cap U_k)$$

(beachte, dass mit U_k auch $S \cap U_k$ ein Kartengebiet ist).

Wie üblich steht hier abkürzend $du = du^1 \dots du^n$. Eine Teilmenge $A \subset M$ heißt dabei eine **Nullmenge**, wenn $\varphi^{-1}(A)$ eine Nullmenge ist für jede lokale Karte φ . Es ist wesentlich, dass die Definition von $\text{vol}(S)$ unabhängig ist von der Wahl der lokalen Karten (nachzurechnen mit Hilfe der Transformationsformel, siehe Analysis III). Damit wird ein Maß auf der von den offenen Teilmengen von M erzeugten σ -Algebra definiert. Dieses wird ebenfalls mit $d\text{vol}$ bezeichnet.

Mit Hilfe dieses Maßes kann man Funktionen integrieren. Es gilt (mit Notation wie in c), wobei $(g_{ij}^{(k)})$ die Darstellung von g in der Karte φ_k ist)

$$\int_M f d\text{vol} = \sum_k \int_{\tilde{U}_k} f(\varphi_k(u)) \sqrt{\det(g_{ij}^{(k)}(u))} du$$

(man kann dies auch als Definition des Integrals nehmen).

Um die Indizes zu vermeiden, schreibt man für $n = 2$ häufig $g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$. Damit ist $d\text{vol} = \sqrt{EG - F^2} du dv$.

Beispiel: Für Polarkoordinaten auf \mathbb{R}^2 ist $\det(g_{ij}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} = 1 \cdot r^2$, also $d\text{vol} = r dr d\theta$.

II.4. Die Krümmung von Flächen

Im Folgenden betrachten wir Flächen im Raum, also $n = 2$ und $N = 3$. Eine Verallgemeinerung auf Hyperflächen, also n beliebig und $N = n + 1$ ist unmittelbar möglich mit nur unwesentlich mehr Arbeit. Die Verallgemeinerung auf Untermannigfaltigkeiten höherer Kodimension ist ein wenig aufwändiger, da es – wie bei Kurven im \mathbb{R}^3 – nicht nur eine Normalengerade, sondern einen $(N - n)$ -dimensionalen Normalenraum an jedem Punkt gibt.

Normalenvektor und Orientierbarkeit**II.4.1 Definition**

Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche (also 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit) und $p \in M$. $N(p) \in \mathbb{R}^3$ heißt **Einheitsnormalenvektor** zu M in p , wenn $\|N(p)\| = 1$ und $N(p) \perp T_p M$ gilt.

Ein **Einheitsnormalenvektorfeld** auf M ist eine Abbildung $N : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, so dass $N(p)$ für alle $p \in M$ ein Einheitsnormalenvektor ist.

In jedem $p \in M$ gibt es genau zwei Einheitsnormalenvektoren. Diese können berechnet werden:

a) mittels einer lokalen Karte φ , $\varphi(u) = p$ als $N(p) = \pm \frac{\partial_1 \times \partial_2}{\|\partial_1 \times \partial_2\|}$.

b) falls M als $F^{-1}(r)$ vorliegt mit $\nabla F \neq 0$ auf M , so ist $N(p) = \pm \frac{\nabla F(p)}{\|\nabla F(p)\|}$.

a) definiert ein glattes Einheitsnormalenvektorfeld auf einer Kartenumgebung U . Aber auf ganz M muss ein solches nicht existieren!

Beispiel: Beim Möbiusband gibt es kein stetiges Einheitsnormalenvektorfeld, da es sonst an einem Punkt gleichzeitig nach innen und nach außen zeigen müsste (Beweis als Übung).

Man kann zeigen, dass ein stetiges Einheitsnormalenvektorfeld glatt ist.

II.4.2 Definition

M heißt **orientierbar**, wenn es ein glattes Einheitsnormalenvektorfeld besitzt. M zusammen mit einem glatten Einheitsnormalenvektorfeld N heißt **orientierte Fläche**, N **Orientierung** für M . $-N$ ist ebenfalls ein glattes Einheitsnormalenvektorfeld.

Bemerkung:

(1) Falls $M = F^{-1}(r)$ und $\nabla F \neq 0$ auf M , so ist M orientierbar, da $N(p) = \pm \frac{\nabla F(p)}{\|\nabla F(p)\|}$ glatt ist.

(2) Diese Definition ist direkt auf beliebige Hyperflächen (d.h. n -dimensionale Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^{n+1}) übertragbar. Im Fall ebener Kurven ($n = 1$) ist die Wahl eines Einheitsnormalenfeldes äquivalent zur Wahl einer Durchlaufrichtung (mittels 90-Grad Drehung wie dort besprochen), also zur alten Definition von Orientierung.

Für Hyperflächen kann man ein Einheitsnormalenfeld in einer Kartenumgebung analog durch $N(p) = \pm \frac{\partial_1 \times \dots \times \partial_n}{\|\partial_1 \times \dots \times \partial_n\|}$ berechnen. Hierbei ist das Kreuzprodukt von n Vektoren v_1, \dots, v_n im \mathbb{R}^{n+1} als der eindeutige Vektor $v_1 \times \dots \times v_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ definiert, für den

$$\langle v_1 \times \dots \times v_n, u \rangle = \det(v_1, \dots, v_n, u)$$

für alle $u \in \mathbb{R}^{n+1}$ gilt. Die Eigenschaften dieses Kreuzproduktes sind analog zu denen in \mathbb{R}^3 .

Wir verfolgen nun zwei Ideen, die Krümmung einer Fläche zu beschreiben:

a) Mit Hilfe der Änderungsgeschwindigkeit des Tangentialraums.

b) Mit Hilfe der Krümmung von Kurven, die in M verlaufen.

a) führt zur Weingartenabbildung, die im nächsten Unterabschnitt behandelt wird, b) zur zweiten Fundamentalform im darauf folgenden Unterabschnitt. Es sind äquivalente Beschreibungen.

Die Weingartenabbildung

Die Tangentialebene kann durch den Einheitsnormalenvektor beschrieben werden. Wir betrachten, wie sich dieser ändert, wenn wir in Richtung eines Tangentialvektors gehen. Wir haben also einen Tangentialvektor $X \in T_p M$ und untersuchen die Änderungsgeschwindigkeit von $N(x)$, wenn sich x von p in Richtung (und Geschwindigkeit) X fortbewegt. Dazu benötigen wir die Ableitung von N in Richtung X , also gerade das Differential.

Vorüberlegung: Wenn N ein Einheitsnormalenvektorfeld auf M ist, dann ist wegen $\|N(p)\| = 1$ jedenfalls $N(p) \in S^2$ für alle p . Also ist N eine Abbildung $M \rightarrow S^2$. Per Definition ist $dN|_p(X)$ die Änderungsgeschwindigkeit von N in Richtung X . Nun ist $dN|_p : T_p M \rightarrow T_{N(p)} S^2$, also $dN|_p(X)$ tangential an S^2 im Punkt $N(p)$. Da $T_{N(p)} S^2 = N(p)^\perp = T_p M$ gilt, ist $dN|_p$ eine Abbildung $T_p M \rightarrow T_p M$.

Bemerkung: $N : M \rightarrow S^2$ heißt auch **Gauß-Abbildung**.

II.4.3 Definition

Sei M eine orientierte Fläche mit Einheitsnormalenvektorfeld N .

Die **Weingartenabbildung** zu $p \in M$ ist die lineare Abbildung $W_p = -dN|_p : T_pM \rightarrow T_pM$.

Explizit bedeutet dies: Sei $p \in M$, $X \in T_pM$. Wähle eine Kurve $\gamma : I \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = X$. Dann ist

$$(II.2) \quad W_p(X) = -\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} N(\gamma(t))$$

Dies ist unabhängig von der Wahl von γ (da wir dies allgemein bei der Definition des Differentials gezeigt hatten). Dass dies tangential an M in p ist, folgt aus der Überlegung vor der Definition, wir können es aber auch direkt nachrechnen: Es gilt $\langle N(\gamma(t)), N(\gamma(t)) \rangle = 1$ für alle t , und wenn man dies nach t ableitet, ergibt sich $2\langle N(\gamma(t)), \frac{d}{dt}N(\gamma(t)) \rangle = 0$. Setze $t = 0$, dann folgt $\langle N(p), -W_p(X) \rangle = 0$, also ist $W_p(X) \in T_pM$.

Bemerkung: \triangleright Das Minuszeichen ist später bequem, siehe unten für Kurven.

\triangleright N muss nur nahe p definiert sein.

\triangleright W hängt von der Orientierung ab. Dreht man sie um (ersetzt man also N durch $-N$), erhält man $-W$ anstelle von W .

Die Krümmung einer nach Bogenlänge parametrisierten Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ war mittels der Ableitung der Tangente $\dot{T} = \kappa \cdot N$ definiert. Es gilt dann $\dot{N} = -\kappa \cdot T$, also folgt für die Weingartenabbildung von $\text{Bild}(c)$

$$W(T) = -\frac{d}{dt}N(\gamma(t)) = -\dot{N} = \kappa \cdot T.$$

(Bei Kurven hatten wir N als Funktion von t , nicht von $p = c(t)$ geschrieben. Außerdem können wir wegen $T = \dot{c}$ hier $\gamma = c$ – bis auf eine irrelevante Zeitverschiebung – nehmen.)

Das heißt: Für Kurven im \mathbb{R}^2 ist $W_p = \text{Multiplikation mit } \kappa(p)$.

W in Koordinaten:

Sei $\varphi : \tilde{U} \rightarrow U \subset M$ eine lokale Karte und $p \in U$, $p = \varphi(u)$. Wir wollen W in den lokalen Koordinaten φ berechnen. Das heißt, wir wollen $W(\partial_i)$ bestimmen. Der Vektor $\partial_i = \frac{\partial \varphi}{\partial u^i}(u)$ wird durch die Kurve $\gamma(t) = \varphi(u + te_i)$ repräsentiert, d.h. $\dot{\gamma}(0) = \partial_i$. Wir wenden Gleichung (II.2) für diese Kurve an. Es ist $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} N(\gamma(t)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} N(\varphi(u + te_i)) = \frac{\partial(N \circ \varphi)}{\partial u^i}$. Es ist üblich, statt $N \circ \varphi$ einfach N zu schreiben, d.h. $N(u)$ ist der Normalenvektor im Punkt $\varphi(u)$ (so wie wir es schon bei Kurven getan haben).

Also folgt

$$\boxed{W(\partial_i) = -\frac{\partial N}{\partial u^i}}$$

Die Matrix von W bzgl. der Basis (∂_i) wird mit (w_i^j) bezeichnet, d.h. $W(\partial_i) = \sum_{j=1}^2 w_i^j \partial_j$ für jedes i .

Beispiele: \triangleright $M = S^2$, $N(p) = p$, also nach außen zeigendes Einheitsnormalenvektorfeld. Dann ist $dN_p = \text{id}_{T_pM}$ und somit $W_p = -\text{id}_{T_pM}$ für alle p .

\triangleright Wenn M eine Ebene im \mathbb{R}^3 ist, dann ist N konstant, also $dN_p = 0$ und somit auch $W_p = 0$ für alle p .

- ▷ Wenn M der Zylinder im \mathbb{R}^3 ist, also $\varphi(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z)$, und N nach außen zeigt, dann ist $W(\partial_\theta) = -\partial_\theta$ und $W(\partial_z) = 0$. Also ist die Matrix von W bzgl. der Basis $\partial_\theta, \partial_z$ gleich $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

II.4.4 Satz

Die Weingartenabbildung ist selbstadjungiert bezüglich g , d.h. für alle $p \in M$ gilt

$$g_p(W_p(X), Y) = g_p(X, W_p(Y))$$

für alle $X, Y \in T_p M$.

Beweis: Da g_p bilinear ist, genügt es, dies für eine Basis zu zeigen. Setze also $X = \partial_i, Y = \partial_j$. Den Index p lassen wir der Übersicht halber weg. Es ist

$$\begin{aligned} g(\partial_i, W(\partial_j)) &= \langle \partial_i, W(\partial_j) \rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u^i}, -\frac{\partial N}{\partial u^j} \right\rangle \\ &\stackrel{!}{=} \left\langle -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^j \partial u^i}, N \right\rangle \\ &= \left\langle -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^i \partial u^j}, N \right\rangle \\ &= \dots \\ &= g(\partial_j, W(\partial_i)) \\ &= g(W(\partial_i), \partial_j) \end{aligned}$$

Nachprüfen von $\stackrel{!}{=}$:

$$\text{Es gilt } \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u^i}(u), N(u) \right\rangle = 0 \text{ für alle } u. \text{ Ableiten nach } u_j \text{ liefert } \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^j \partial u^i}, N \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u^i}, \frac{\partial N}{\partial u^j} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial u^j} 0 = 0. \quad \square$$

Bemerkung: Die Selbstadjungiertheit von W_p bedeutet nicht, dass (w_i^j) eine symmetrische Matrix ist. Das wäre nur der Fall, wenn (g_{ij}) die Einheitsmatrix wäre. Später werden wir aber sehen, dass die Matrix (h_{ij}) mit $h_{ij} := \sum_k w_j^k g_{ik}$ symmetrisch ist.

Die zweite Fundamentalform

Wir wollen nun die Krümmung von M mit Hilfe der Krümmung von Kurven in M beschreiben. Sei dafür M eine Fläche, $p \in M$, und $X \in T_p M$ mit $\|X\| = 1$. Wir wollen versuchen, die Krümmung von M mit Hilfe der Krümmung von Kurven in M , die bei p in Richtung X laufen, zu beschreiben.

Sei also $\gamma : I \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = p$ und $\dot{\gamma}(0) = X$. Betrachten wir $\ddot{\gamma}(0)$ (falls γ nach Bogenlänge parametrisiert ist, ist die Länge dieses Vektors die Krümmung von γ im Punkt p). Wir beobachten zunächst, dass dieser Vektor nicht nur von M, p und X , sondern auch von der Wahl von γ abhängt. Er taugt also nicht dazu, eine Eigenschaft von M selbst zu beschreiben.

Sei beispielsweise M die $x - y$ -Ebene und γ eine Kurve darin. $\ddot{\gamma} \neq 0$ liegt in der Ebene, drückt aber nicht die Krümmung dieser Ebene aus, da diese $= 0$ ist.

Wir werden gleich sehen, dass sich der Normalenanteil $\langle \ddot{\gamma}(0), N(p) \rangle$ besser verhält.

II.4.5 Definition

Sei M Fläche, $p \in M$ und $\gamma : I \rightarrow M$ eine Kurve mit $\gamma(0) = p$ und $\|\dot{\gamma}(0)\| = 1$. Dann heißt $\kappa_n := \langle \ddot{\gamma}(0), N(p) \rangle$ die **Normalkrümmung** von γ in p .

Der Vektor $\ddot{\gamma}(0)$ hängt natürlich von der konkreten Wahl von γ ab und kann nicht aus $\gamma(0)$ und $\dot{\gamma}(0)$ bestimmt werden. Daher ist folgende Aussage überraschend.

II.4.6 Proposition

In der Situation von II.4.5 hängt die Normalkrümmung von γ in p nur von $\dot{\gamma}(0)$ und von M ab.

Für $X \in T_p M$ schreiben wir $\kappa_n(X) = \langle \ddot{\gamma}(0), N(p) \rangle$, wobei $\gamma(0) = p, \dot{\gamma}(0) = X$.

Genauer gilt $\kappa_n(X) = g_p(X, W_p(X))$, wobei W_p die Weingartenabbildung von M in p ist.

Mit anderen Worten, zwei beliebige in M verlaufende Kurven durch p mit demselben Tangentialvektor in p haben dort dieselbe Normalkrümmung.

Man nennt daher $\kappa_n(X)$ auch die **Normalkrümmung von M in Richtung X** .

Beweis: Es gilt $\langle \dot{\gamma}(t), N(\gamma(t)) \rangle = 0$ für alle t , da $\gamma \subset M$. Ableiten nach t ergibt $\langle \ddot{\gamma}(t), N(\gamma(t)) \rangle + \langle \dot{\gamma}(t), \frac{d}{dt} N(\gamma(t)) \rangle = 0$. Setze $t = 0$, dann folgt $\langle \ddot{\gamma}(0), N(p) \rangle + \langle X, -W_p(X) \rangle = 0$. \square

Bemerkung: Der Beweis zeigt, dass die Formel $\langle \ddot{\gamma}(0), N(p) \rangle = g_p(X, W_p(X))$ auch ohne die Annahme $\|X\| = 1$ gilt. Um von Normalkrümmung sprechen zu können, braucht man aber diese Bedingung.

Für bestimmte Kurven fällt die Krümmung mit der Normalkrümmung zusammen (bis auf das Vorzeichen):

II.4.7 Definition

Sei M Fläche, $p \in M, X \in T_p M$ und $\|X\| = 1$. Sei $E_p = \text{span}\{N(p), X\}$. $E_p + p$ (Verschiebung von E_p nach p) heißt **Normalschnitt** von M in p bezüglich X .

E_p ist also die Ebene durch p , die von $N(p)$ und X aufgespannt wird.

Zur Berechnung der Normalkrümmung ist manchmal nützlich:

II.4.8 Proposition

$M \cap (E_p + p)$ ist nahe p eine reguläre Kurve, deren Krümmung in p genau $|\kappa_n(X)|$ ist. Die Krümmung dieser Kurve ist in p also gerade die Normalkrümmung.

Beweis: Dass dies eine reguläre Kurve ist, folgt aus dem Satz über implizite Funktionen (Übung). Sei γ die genannte Kurve, nach Bogenlänge parametrisiert. $\dot{\gamma}(0)$ muss in E_p liegen und senkrecht zu $\dot{\gamma}(0) = X$ sein. Also ist $\dot{\gamma}(0)$ parallel zu $N(p)$ und somit $|\langle \dot{\gamma}(0), N(p) \rangle| = \|\dot{\gamma}(0)\|$. \square

Beispiel: Wir prüfen das in ein paar einfachen Fällen nach.

▷ Sei $M = S^2$. $E_p + p$ schneidet S^2 im Großkreis durch p . Dieser hat Krümmung 1, also folgt $|g(X, W(X))| = 1$ für alle $X \in T_p M$. Es gilt $W(X) = -X$ für alle X , also $g(X, W(X)) = g(X, -X) = -\|X\|^2 = -1$, falls $\|X\| = 1$.

▷ Bei dem Zylinder mit $X = \partial_\theta$ ist $(E_p + p) \cap M$ ein Kreis mit Radius 1, also muss $g(X, W(X)) = \mp 1$ sein. Es war $W = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Es folgt $W(X) = -X$ und somit $g(X, W(X)) = -1$.

Bei $X = \partial_z$ ist der Normalschnitt eine Gerade. Sie hat die Krümmung 0, also ist hier $W(X) = 0$.

Wir haben jetzt zwei Wege, Krümmung einer Fläche in einem Punkt p zu verstehen:

▷ Als lineare Abbildung $W_p : T_p M \rightarrow T_p M$: Für $X \in T_p M$ beschreibt $W_p(X)$, wie sich der Normalenvektor ändert, wenn man von p in Richtung X läuft.

▷ Als Funktion $\kappa_n : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$: Für $X \in T_p M$ ist $\kappa_n(X)$

Der Zusammenhang zwischen diesen beiden Beschreibungen ist Spezialfall eines allgemeinen Prinzips der **Linearen Algebra**:

Sei V Vektorraum, g Skalarprodukt auf V . Dann sind folgende Konzepte auf V äquivalent:

- ▷ Symmetrische Bilinearformen $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$
- ▷ quadratische Formen $q : V \rightarrow \mathbb{R}$, d.h. Funktionen $q : V \rightarrow \mathbb{R}$, die sich als $q(X) = B(X, X)$ für eine symmetrische Bilinearform B darstellen lassen
- ▷ bzgl. g selbstadjungierte lineare Abbildungen $A : V \rightarrow V$, d.h. $g(A(X), Y) = g(X, A(Y))$

Relationen:

- ▷ $B \rightsquigarrow q$ mittels $q(X) = B(X, X)$
- ▷ $q \rightsquigarrow B$ mittels $B(X, Y) = \frac{1}{4}(q(X+Y) - q(X-Y))$ oder $B(X, Y) = \frac{1}{2}(q(X+Y) - q(X) - q(Y))$
- ▷ $A \rightsquigarrow B$ mittels $B(X, Y) = g(X, A(Y))$
- ▷ $B \rightsquigarrow A$ mittels Riesz-Lemma (für jede Linearform l auf V gibt es genau einen Vektor $Z \in V$ mit $l(X) = g(X, Z)$ für alle $X \in V$. Fixiere Y und wende dies auf die Linearform $l(X) = B(X, Y)$ an.)

Um das etwas konkreter zu machen, wähle eine Orthonormalbasis v_1, \dots, v_n bezüglich g . Wir drücken A und B bezüglich der Basis aus:

- ▷ $B_{ij} = B(v_i, v_j)$, also $B(\sum_i X^i v_i, \sum_j Y^j v_j) = \sum_{i,j} B_{ij} X^i Y^j$
- ▷ $A(v_i) = \sum_j A_i^j v_j$

A und B stehen in der oben genannten Beziehung genau dann, wenn $B_{ij} = A_i^j$ für alle i, j gilt.

Wichtig: Dies gilt nur für Orthonormalbasen (v_i) , nicht für eine beliebige Basis.

Die quadratische Form ist dann durch $q(\sum_i X^i v_i) = \sum_{i,j} B_{ij} X^i X^j$ gegeben. Offenbar ist $q(tX) = t^2 q(X)$ für beliebige $t \in \mathbb{R}, X \in V$, also ist q schon durch ihre Werte auf der Einheitskugel ($\|X\| = 1$) eindeutig bestimmt.

Zum Beispiel bei $n = 2$ und $V = \mathbb{R}^2$ mit $v_i = e_i$ und $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ ist $q(\zeta, \eta) = a\zeta^2 + 2b\zeta\eta + c\eta^2$, wobei wir $\zeta = X^1, \eta = X^2$ geschrieben haben (um obere Indizes nicht mit dem Exponenten 2 zu verwechseln). Das ist die allgemeine Formel für quadratische Formen von zwei Variablen.

II.4.9 Definition

Sei M eine Fläche, $p \in M$, N ein Einheitsnormalenvektorfeld und W die zugeordnete Weingartenabbildung.

Die **zweite Fundamentalform** von M in p (bezüglich N) ist $II_p(X, Y) := g_p(X, W_p(Y))$ für $X, Y \in T_p M$.

$II_p : T_p M \rightarrow T_p M$ ist wie die erste Fundamentalform g_p eine symmetrische Bilinearform auf $T_p M$. Es ist diejenige symmetrische Bilinearform auf $T_p M$, die bezüglich g_p der linearen Abbildung W_p zugeordnet ist.

Im Unterschied zu g_p braucht II_p aber nicht positiv definit zu sein.

II.4.10 Proposition

Seien M, p, N wie in der Definition und $X \in T_p M$ mit $\|X\| = 1$. Dann ist $II_p(X, X)$ die Normalkrümmung von M bei p in Richtung X .

Das heißt, die Normalkrümmung als Funktion von X ist die quadratische Form (eingeschränkt auf Einheitsvektoren X), die der Bilinearform II_p zugeordnet ist.

Beweis: Folgt sofort aus der Definition und der vorigen Proposition. □

Bemerkung: \triangleright Dass $X \mapsto$ (Normalkrümmung in Richtung X) eine quadratische Form ist, ist eine a priori überraschende Aussage!

\triangleright Wie oben bemerkt, gilt $II_p(X, X) = \langle \dot{\gamma}(0), N(p) \rangle$ für beliebige $X \in T_p M$ (ohne Bedingung $\|X\| = 1$).

Der folgende Satz gibt eine Interpretation von II_p als Hessische einer Funktion:

II.4.11 Satz

Sei M Fläche, $p \in M$. Dann ist M nahe p ein Graph über $T_p M$. Das heißt es gibt Umgebungen \tilde{U} von 0 in $T_p M$, U von p in M und eine glatte Funktion $h : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $U = \{p + X + h(X)N(p) : X \in \tilde{U}\}$. Es gilt $h(0) = 0$, $dh|_0 = 0$ und $\text{Hess}(h)|_0 = II_p$.

Die Aussage wird klarer, wenn man das Koordinatensystem so wie am Anfang des Beweises unten legt.

Bemerkung: Wenn $h : V \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung auf einem Vektorraum V mit $h(0) = 0$ ist, dann ist $dh|_0 : V \rightarrow \mathbb{R}$ linear, und falls $dh|_0 = 0$, dann ist $\text{Hess}(h)|_0 : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform definiert durch $\text{Hess}(h)(X, Y) = d(dh(X))(Y) = d^2h(X, Y)$.

Falls $V = \mathbb{R}^n$ ist, so ist $\text{Hess}(h)$ in der Standardbasis durch die Matrix $\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^j}(0)\right)$ gegeben.

Beweis: Wir legen das Koordinatensystem des \mathbb{R}^3 so, dass $p = 0$ und $N = (0, 0, 1)$, also $T_p M$ die $x - y$ -Ebene ist.

M ist lokal Graph über der $x - y$ -Ebene nahe p (Analysis II, Satz über implizite Funktionen). Also gibt es h mit $U = \{(x, y, h(x, y)) : (x, y) \in \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2\}$, und $\frac{\partial h}{\partial x}(0) = \frac{\partial h}{\partial y}(0) = 0$ wegen $T_0 M = (x, y)$ -Ebene.

Berechne II_0 : Sei $X = (\zeta, \eta) \in \mathbb{R}^2 = T_p M$ und $\gamma(t) = (tX, h(tX)) = (t\zeta, t\eta, h(t\zeta, t\eta))$. Damit ist $\gamma(0) = 0$ und $\dot{\gamma}(0) = X$ und der Normalteil von $\dot{\gamma}$ ist

$$\begin{aligned} \langle \dot{\gamma}(0), N \rangle &= \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} h(t\zeta, t\eta) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} [\zeta \cdot h_\zeta(t\zeta, t\eta) + \eta \cdot h_\eta(t\zeta, t\eta)] \\ &= \zeta^2 \cdot h_{\zeta\zeta}(0) + 2\zeta\eta \cdot h_{\zeta\eta}(0) + \eta^2 h_{\eta\eta}(0) \end{aligned}$$

Dies ist genau die quadratische Form, die durch die Matrix $\text{Hess}(h)|_0$ gegeben ist. □

Beispiel: Sei $M = \{(x, y, h(x, y)) : x, y \in \mathbb{R}\}$ mit $h(x, y) = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2)$, $a, b \in \mathbb{R}$. Dann ist $II_0(X, X) = a\zeta^2 + b\eta^2$, da $h_{xx}(0) = a$, $h_{yy}(0) = b$ und $h_{xy}(0) = 0$ ist.

Die Normalkrümmung in Richtung $X = (1, 0)$ ist a , in Richtung $X = (0, 1)$ ist sie b . Bei beliebigem X mit $\|X\| = \zeta^2 + \eta^2 = 1$ liegt $II_0(X, X)$ zwischen a und b . Denn wenn oBdA $a \leq b$ ist, gilt $a\zeta^2 + b\eta^2 \leq b\zeta^2 + b\eta^2 = b$ und $a = a\zeta^2 + a\eta^2 \leq a\zeta^2 + b\eta^2$.

Hauptkrümmungen, Gaußkrümmung und mittlere Krümmung

II.4.12 Definition

Sei M Fläche, $p \in M$. Die **Hauptkrümmungen** von M in p sind die Eigenwerte der Weingartenabbildung W_p . Sie werden mit $\kappa_1 = \kappa_1(p)$ und $\kappa_2 = \kappa_2(p)$ bezeichnet. Falls $\kappa_1 \neq \kappa_2$, so heißen die zugehörigen Eigenvektoren die **Hauptkrümmungsrichtungen**.

Da W_p selbstadjungiert bzgl. des Skalarprodukts g_p ist, ist W_p diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten, d.h. es gibt eine Basis aus Eigenvektoren. Falls $\kappa_1 \neq \kappa_2$, so sind die Eigenvektoren bis auf skalare Vielfache eindeutig und stehen senkrecht aufeinander. Falls $\kappa_1 = \kappa_2$, so folgt $W_p = \kappa_1 \text{Id}$.

II.4.13 Proposition

Die Hauptkrümmungen von M in p sind der kleinste und der größte Wert von $II_p(X, X)$ über alle $X \in T_p M$ mit $\|X\| = 1$. Falls $\kappa_1 \neq \kappa_2$, sind die Hauptkrümmungsrichtungen die zugehörigen Vektoren X .

Beweis: Seien κ_1, κ_2 die Eigenwerte von W_p und X_1, X_2 zugehörige Eigenvektoren. Es gilt also $W_p(X_1) = \kappa_1 X_1$ und $W_p(X_2) = \kappa_2 X_2$. Wir können annehmen, dass $\|X_1\| = \|X_2\| = 1$ und $X_1 \perp X_2$ (die Orthogonalität ist für $\kappa_1 \neq \kappa_2$ automatisch, für $\kappa_1 = \kappa_2$ können wir X_1, X_2 so wählen). Die Darstellung von W in dieser Basis ist die Diagonalmatrix $\text{diag}(\kappa_1, \kappa_2)$, und da dies eine Orthonormalbasis ist, ist II durch dieselbe Matrix dargestellt, d.h. für $X = \zeta X_1 + \eta X_2$ ist

$$II(X, X) = \kappa_1 \zeta^2 + \kappa_2 \eta^2$$

Unter allen Vektoren X mit $\|X\|^2 = \zeta^2 + \eta^2 = 1$ hat dies, wie im Beispiel oben gezeigt, Maximum und Minimum κ_1, κ_2 , und diese werden bei den Vektoren $X = X_1$ bzw. $X = X_2$ angenommen. \square

Bemerkung: Falls $\kappa_1 = \kappa_2$, so ist $II_p(X, X) = \kappa_1$ für alle $X \in T_p M$ mit $\|X\| = 1$, es gibt keine ausgezeichnete Krümmungsrichtung.

Im letzten Beispiel war $\kappa_1(0) = a$ und $\kappa_2(0) = b$ mit den Hauptkrümmungsrichtungen $X = (1, 0)$ für κ_1 bzw. $X = (0, 1)$ für κ_2 .

Beispiele: $\triangleright h(x, y) = x^2 - y^2$. Dann ist $\kappa_1 = -2$ und $\kappa_2 = 2$ und im Punkt $(0, 0)$ ist der Graph hyperbolisch, ein Sattel.

$\triangleright h(x, y) = x^2$. Dann ist der Graph parabolisch, eine "Rinne".

$\triangleright h(x, y) = x^4 + y^4$. Hier ist $h_{xx}(0) = h_{yy}(0) = h_{xy}(0) = 0$, also $II_0 = 0$ und somit $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$. Bei 0 hat der Graph einen Flachpunkt.

Bemerkung: Für n -dimensionale Hyperflächen $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ sind die Hauptkrümmungen ebenfalls als die Eigenwerte von W_p definiert. Betrachtet man die Funktion $q : X \mapsto II_p(X, X)$ auf der Einheitsphäre $S^{n-1} = \{X \in T_p M : \|X\| = 1\}$, so sind die Hauptkrümmungen die Werte von q an seinen stationären Punkten, d.h. an den Punkten X mit $dq|_X = 0$. Neben dem Maximum und Minimum sind dies Sattelpunkte von q .

II.4.14 Definition

Sei M eine Fläche, $p \in M$, κ_1, κ_2 die Hauptkrümmungen in p bzgl. eines Einheitsnormalenvektorfeldes N .

\triangleright Die **Gauß-Krümmung** von M in p ist

$$K = \kappa_1 \cdot \kappa_2 = \det W_p.$$

\triangleright Die **mittlere Krümmung** von M in p ist

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{1}{2} \text{tr } W_p.$$

Beispiel: $\triangleright S^2$ mit $N =$ äußere Normale. Wir wissen bereits, dass $W_p(X) = -X$ und $II_p(X, X) = -\|X\|^2$ gilt. Für $\|X\| = 1$ ist demnach $II_p(X, X) = -1$ und es folgt $\kappa_1 = \kappa_2 = -1$ für alle Punkte, also $K = 1$ und $H = -1$. Es gibt keine Hauptkrümmungsrichtungen, da $\kappa_1 = \kappa_2$. In diesem Fall wird p als **Nabelpunkt** bezeichnet.

\triangleright Zylinder, $W = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ in Zylinderkoordinaten. Es ist $\kappa_1 = -1$ und $\kappa_2 = 0$, also $K = 0$ und $H = -\frac{1}{2}$.

Bemerkung: Ersetzt man N durch $-N$, so

- \triangleright geht W in $-W$ über
- \triangleright gehen κ_1, κ_2 in $-\kappa_1, -\kappa_2$ über
- \triangleright geht K in K über
- \triangleright geht H in $-H$ über

Wenn M als Graph über T_pM dargestellt wird und die Hauptkrümmungsrichtungen X_1, X_2 als Basisvektoren von T_pM genommen werden, ergibt sich $II_p(X, X) = \kappa_1\zeta^2 + \kappa_2\eta^2 = \text{Hess}(h)|_0(X, X)$. Identifiziere T_pM mit \mathbb{R}^2 und $X = \zeta X_1 + \eta X_2$ mittels dieser Basis, dann folgt nach Taylor $h(\zeta, \eta) = \frac{1}{2}(\kappa_1\zeta^2 + \kappa_2\eta^2) + O(|(\zeta, \eta)|^3)$ für $\zeta, \eta \rightarrow 0$. Das bedeutet, dass M zu dritter Ordnung durch eine quadratische Fläche approximiert wird (bzw. tangential zu zweiter Ordnung an eine solche Fläche ist). Es gilt

- $\triangleright K = \kappa_1 \cdot \kappa_2 > 0$: M liegt nahe p auf einer Seite von T_pM , p ist ein **elliptischer Punkt**
- $\triangleright K = \kappa_1 \cdot \kappa_2 < 0$: M liegt nahe p beidseitig von T_pM , p ist ein **hyperbolischer Punkt**
- $\triangleright K = \kappa_1 \cdot \kappa_2 = 0$ aber nicht beide $\kappa_i = 0$: p ist ein **parabolischer Punkt**
- $\triangleright \kappa_1 = \kappa_2 = 0$: p ist ein **Flachpunkt**

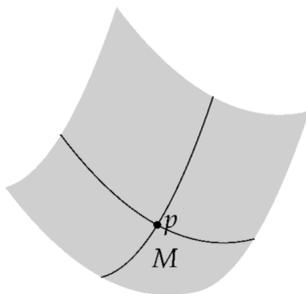


Abbildung II.4.: $\kappa > 0$

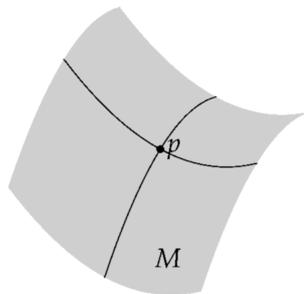


Abbildung II.5.: $\kappa < 0$

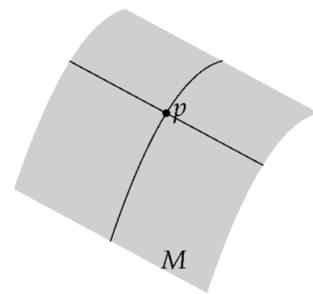


Abbildung II.6.: $\kappa = 0$

Die Bedeutung von K und H :

Die Bedeutung von $K > 0$ und $K < 0$ haben wir gerade gesehen. Weiterhin gilt:

- $\triangleright H \equiv 0$: M ist Minimalfläche (s.u.)
- $\triangleright H = \text{const}$: minimale Fläche bei gegebenem eingeschlossenes Volumen
- $\triangleright K \equiv 0$: es gibt verzerrungsfreie Landkarten (später)

H gibt die Flächenänderung an, wenn man M in Richtung N bewegt.

Beispiel: Wenn man die Einheitssphäre mit nach außen gerichtetem Einheitsnormalenvektorfeld betrachtet, so hat diese $H = -1$. Dehnt man die Sphäre nach außen aus, wird die Fläche größer. Genauer gilt:

II.4.15 Satz

Sei M eine Fläche, N ein Einheitsnormalenvektorfeld, $a : M \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und glatt und $M_\epsilon := \{p + \epsilon a(p)N(p) : p \in M\}$. Dann ist

$$\frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} \text{vol}(M_\epsilon) = -2 \int_M a \cdot H d \text{vol}.$$

II.4.16 Korollar

Falls die Fläche von M unter kleinen Änderungen nicht verkleinert werden kann, so ist $H \equiv 0$.

II.4.17 Definition

M heißt **Minimalfläche**, wenn $H \equiv 0$ ist.

K hat auch die Bedeutung eines Verzerrungsfaktors für den Flächeninhalt unter der Gauß-Abbildung $N : M \rightarrow S^2$.

Genauer gilt: Ist $p \in M$ und $K(p) \neq 0$, so existiert eine Umgebung $U \subset M$ von p , so dass $N : M \rightarrow N(U)$ ein Diffeomorphismus ist und die Fläche von N gleich $\left| \int_U K d \text{vol} \right|$ ist.

(Übung, wegen $K = \det W = \det(-dN)$ ist das im Wesentlichen die Transformationsformel.)

Berechnung von g , W , II , K und H in lokalen Koordinaten: Die Indexschlacht

Wir lassen im Folgenden die Punkte p bzw. u weg. Sei $\varphi : \tilde{U} \rightarrow U \subset M$ eine lokale Karte. $\partial_i = \frac{\partial \varphi}{\partial u^i}(u)$ ist Basis von $T_p M$, falls $p = \varphi(u)$ ist.

Wie kann man $g_p, W_p, II_p, K, H, \kappa_1, \kappa_2$ berechnen?

Wir kennen bereits $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j) = \langle \partial_i, \partial_j \rangle$. Damit ist

$$g(X, Y) = \sum_{i,j} g_{ij} X^i Y^j$$

falls $X = \sum_i X^i \partial_i$ und $Y = \sum_j Y^j \partial_j$ ist.

Für W setzen wir $(w_i^j)_{ij}$ als Matrix von W bezüglich ∂_i , d.h. $W(\partial_i) = \sum_j w_i^j \partial_j$, also für X wie oben

$$W(X) = \sum_j \left(\sum_i w_i^j X^i \right) \partial_j.$$

Weiter ist

$$h_{ij} := II(\partial_i, \partial_j) = \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^i \partial u^j}, N \right\rangle$$

nach der Rechnung im Beweis von Satz II.4.4.

Wir suchen nun eine Beziehung zwischen den g_{ij}, h_{ij} und w_i^j , um Zusammenhänge darstellen zu können.

Es gilt für alle i, j

$$\begin{aligned} h_{ij} &= II(\partial_i, \partial_j) \\ &= g(\partial_i, W(\partial_j)) \\ &= g\left(\partial_i, \sum_k w_j^k \frac{\partial \varphi}{\partial u^k}\right) \\ &= \sum_k w_j^k \cdot g\left(\partial_i, \frac{\partial \varphi}{\partial u^k}\right) \\ &= \sum_k w_j^k g_{ik} \end{aligned}$$

Kurz: mit $g = (g_{ik})_{i,k=1,2}$, $h = (h_{ij})_{i,j=1,2}$ und $w = (w_j^k)_{j,k=1,2}$ gilt $h = w \cdot g$ (Matrixprodukt).

II.4.18 Definition

$(g^{ij})_{i,j}$ bezeichnet die inverse Matrix zu $(g_{ij})_{i,j}$.

Damit ist $w_i^j = \sum_k h_{ik} g^{kj}$, da $w = h \cdot g^{-1}$.

Bemerkung: Oft wird die Einsteinsche Summationskonvention benutzt. Die Summenzeichen lässt man weg, aber es wird immer über Indizes summiert, die sowohl unten als auch oben vorkommen. Indizes, über die nicht summiert wird, behalten ihre Positionen (oben oder unten).

Zum Beispiel schreibt man dann $h_{ij} = w_j^k g_{ik}$ und $w_i^j = h_{ik} g^{kj}$.

Es gilt $g_{ij} = g_{ji}$ und $h_{ij} = h_{ji}$, denn g und h symmetrisch. Die Weingartenabbildung W ist selbstadjungiert bezüglich g , daraus folgt aber im Allgemeinen nicht, dass $w_i^j = w_j^i$ ist! Dies gilt nur, wenn die ∂_i eine Orthonormalbasis bilden.

Diese Formeln sind scheußlich und für geometrische Fragen eher ungeeignet! Aber man braucht sie manchmal zur Rechnung.

Ist eine lokale Karte φ gegeben, so kann man also nacheinander berechnen:

- (1) Die Vektoren $\partial_i = \frac{\partial \varphi}{\partial u^i}$
- (2) $g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle$ und die inverse Matrix $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$
- (3) Ein Normalenvektorfeld $N = \frac{\partial_i \times \partial_j}{\|\partial_i \times \partial_j\|}$
- (4) $h_{ij} = \langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^i \partial u^j}, N \rangle$
- (5) $w_i^j = \sum_k h_{ik} g^{kj}$
- (6) $K = \det w = \frac{\det h}{\det g}$
- (7) $H = \frac{1}{2} \operatorname{tr} w$
- (8) $\kappa_{1/2} = H \pm \sqrt{H^2 - K}$

Die letzte Formel ergibt sich daraus, dass wegen $K = \kappa_1 \kappa_2$ und $H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$ nach den Formeln von Vieta die Zahlen κ_1, κ_2 die Nullstellen des quadratischen Polynoms $x^2 - 2Hx + K$ sein müssen.

In $n = 2$ sind folgende Schreibweisen üblich:

$$g = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix},$$

woraus unter anderem

$$g^{-1} = \frac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$$

folgt. Damit erhält man beispielsweise auch $w_1^1 = \frac{eG-fF}{EG-F^2}$, $w_1^2 = \frac{-eF+fG}{EG-F^2}$, usw. Weiter gilt

$$K = \det W = \det w = \det h \cdot \det g^{-1} = \frac{eg-f^2}{EG-F^2}$$

und

$$H = \frac{1}{2} \operatorname{tr} W = \frac{1}{2} \frac{eG-2fF+EG}{EG-F^2}.$$

Beispiel: Sei M als Graph gegeben, $M = \{(x, y, \psi(x, y))\}$. $\varphi(x, y) = (x, y, \psi(x, y))$ ist also eine lokale Karte und es ist $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = (1, 0, \psi_x)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = (0, 1, \psi_y)$. Damit ergibt sich

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 + \psi_x^2 & \psi_x \psi_y \\ \psi_x \psi_y & 1 + \psi_y^2 \end{pmatrix},$$

$$(g^{ij}) = \frac{1}{1 + |\nabla \psi|^2} \begin{pmatrix} 1 + \psi_y^2 & -\psi_x \psi_y \\ -\psi_x \psi_y & 1 + \psi_x^2 \end{pmatrix},$$

$$h_{ij} = \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^i \partial u^j}, N \right\rangle \text{ mit } N = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla \psi|^2}} (-\psi_x, -\psi_y, 1),$$

also

$$(h_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla \psi|^2}} \begin{pmatrix} \psi_{xx} & \psi_{xy} \\ \psi_{yx} & \psi_{yy} \end{pmatrix},$$

$$K = \frac{\psi_{xx} \psi_{yy} - \psi_{xy}^2}{(1 + |\nabla \psi|^2)^2} \text{ und}$$

$$H = \frac{1}{2} \frac{(1 + \psi_y)^2 \psi_{xx} - 2\psi_x \psi_y \psi_{xy} + (1 + \psi_x)^2 \psi_{yy}}{(1 + |\nabla \psi|^2)^{3/2}}.$$

III. Die innere Geometrie von Flächen

Stellen wir uns zweidimensionales Wesen vor, die innerhalb einer Fläche leben und nicht aus ihr "heraus-schauen" können. Sie kennen also keine dritte Dimension (so wenig, wie wir eine vierte kennen). Kann ein solcher "Flachländer" erkennen, in welcher Art Fläche er "lebt", wenn er dabei nur Längen- und Winkelmessungen innerhalb der Fläche durchführen kann?

Beispielsweise unterscheidet sich die Ebene deutlich von der Sphäre, da man die Sphäre nicht "flach" machen kann, ohne die Längen zu verzerren. Dies werden wir beweisen. Wenn man ein Blatt Papier zu einer "Rinne" formt, bleiben aber sowohl Längen als auch Winkel erhalten, da ein Papier nicht elastisch ist. Daher können Flachländer ein Stück der Ebene nicht von einem Halbzylinder unterscheiden.

Im Allgemeinen ist die Antwort also "nein". Es gibt verschiedene Flächen, die von "innen" betrachtet gleich aussehen. Dies wollen wir in diesem Kapitel mathematisch formulieren und näher untersuchen.

III.1. Isometrien

Diese Ideen sollen hier mathematisch formuliert werden.

III.1.1 Definition

Seien $M \subset \mathbb{R}^N$ und $M' \subset \mathbb{R}^{N'}$ n -dimensionale Untermannigfaltigkeiten. Eine glatte Abbildung $F : M \rightarrow M'$ heißt **Isometrie**, wenn F bijektiv ist und

$$g_p(X, Y) = g'_{F(p)}(dF|_p(X), dF|_p(Y))$$

für alle $p \in M$, $X, Y \in T_p M$ gilt. g bzw. g' sind dabei die erste Fundamentalformen auf M bzw. M' .

Für $X = Y$ sagt diese Definition wegen $\|X\|^2 = g_p(X, X)$ aus, dass $dF|_p$ längenerhaltend ist, also dass $\|X\| = \|dF|_p(X)\|$ für alle X gilt. Da eine symmetrische Bilinearform durch ihre quadratische Form eindeutig festgelegt ist, ist diese Bedingung sogar äquivalent zur Definition.

Weiterhin ist äquivalent dazu, dass für alle Kurven γ in M gilt $L[\gamma] = L[F \circ \gamma]$, denn

" \Rightarrow " Es gilt mit $\tilde{\gamma} := F \circ \gamma$

$$\begin{aligned} L[\tilde{\gamma}] &= \int_a^b \|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\| dt \\ &= \int_a^b \|dF|_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))\| dt \\ &= \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt \\ &= L[\gamma] \end{aligned}$$

" \Leftarrow " Sei $p \in M$, $X \in T_p M$, $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = X$. Sei $\gamma_T := \gamma|_{[0, T]}$ für $0 < T < \epsilon$.

Damit ist

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\dot{\gamma}(t)\| dt &= L[\gamma_T] \\ &= L[F \circ \gamma_T] \\ &= \int_0^T \|dF_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))\| dt \end{aligned}$$

Ableiten nach T an der Stelle $T = 0$ liefert einerseits

$$\frac{d}{dt}\Big|_{T=0} L[\gamma_T] = \|\dot{\gamma}(0)\| = \|X\|$$

und andererseits

$$\frac{d}{dt}\Big|_{T=0} L[F \circ \gamma_T] = \|dF_{\gamma(0)}(\dot{\gamma}(0))\| = \|dF_p(X)\|$$

Also gilt $\|X\| = \|dF_p(X)\|$.

Diese Rechnung erklärt das Auftreten von dF_p in Definition III.1.1. Die Bedingung in der Definition ist damit die ‚infinitesimale‘ Version der Längenerhaltung.

III.1.2 Definition

Sei M eine wegzusammenhängende Untermannigfaltigkeit, $p, q \in M$. Dann ist der (intrinsische) Abstand von p und q

$$d_M(p, q) := \inf_{\gamma: p \rightsquigarrow q} L[\gamma]$$

über alle Kurven γ in M mit Anfangspunkt p und Endpunkt q .

Beachte: Man muss auf der Fläche bleiben, um den Abstand zu bestimmen, darf also nicht die „Luftlinie“ durch den \mathbb{R}^3 gehen.

Man prüft leicht nach, dass (M, d_M) ein metrischer Raum ist.

Fassen wir zusammen:

III.1.3 Satz

Seien $M \subset \mathbb{R}^N$ und $M' \subset \mathbb{R}^{N'}$ n -dimensionale wegzusammenhängende Untermannigfaltigkeiten und $F: M \rightarrow M'$ ein Diffeomorphismus. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

- (1) $g_p(X, Y) = g'_{F(p)}(dF_p(X), dF_p(Y))$ für alle $X, Y \in T_p M$
- (2) $\|X\| = \|dF_p(X)\|$ für alle $p \in M, X \in T_p M$
- (3) $L[\gamma] = L[F \circ \gamma]$ für alle Kurven γ in M
- (4) $d_M(p, q) = d_{M'}(F(p), F(q))$ für alle $p, q \in M$

Die Äquivalenz von (1), (2) und (3) haben wir bereits bewiesen, und (3) impliziert offenbar (4). Der Beweis, dass aus (4) eine (und damit jede) der anderen Bedingungen folgt, sei Ihnen als Übung überlassen.

Bemerkung: \triangleright (2) \Rightarrow (1) bedeutet: Wenn F Längen erhält, dann erhält es auch Winkel. Denn wenn α der Winkel zwischen X und Y ist, dann ist $\cos \alpha = \frac{g(X, Y)}{\|X\| \|Y\|}$.

- \triangleright Eine Isometrie ist immer ein Diffeomorphismus, d.h. F^{-1} ist glatt. Denn (2) impliziert, dass dF_p injektiv ist, wegen $\dim M = \dim M'$ also bereits bijektiv. Mit dem Satz über die Umkehrabbildung folgt dann dass F^{-1} glatt ist.

III.1.4 Proposition

Sei $F : M \rightarrow M'$ Diffeomorphismus. F ist genau dann eine Isometrie, wenn zu jeder lokalen Karte $\varphi : \tilde{U} \rightarrow U \subset M$ für die lokale Karte $\varphi' = F \circ \varphi : \tilde{U} \rightarrow U' := F(U) \subset M'$

$$g_{ij}(u) = g'_{ij}(u)$$

für alle i, j und alle u gilt. Dabei sind g_{ij} die Komponenten von g bezüglich φ und g'_{ij} die Komponenten von g' bezüglich φ' .

Wie immer genügt es, dass die Bedingung für eine Überdeckung von M mit lokalen Karten erfüllt ist.

Beweis: Mit $\partial_i = \frac{\partial \varphi}{\partial u^i}$ und $\partial'_i = \frac{\partial \varphi'}{\partial u^i}$ folgt aus der Kettenregel $\partial'_i = \frac{\partial (F \circ \varphi)}{\partial u^i} = dF(\partial_i)$. Ist F eine Isometrie, so gilt also $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j) = g(dF(\partial_i), dF(\partial_j)) = g'(\partial'_i, \partial'_j) = g'_{ij}$. Umgekehrt bedeutet $g_{ij} = g'_{ij}$, dass die Isometriebedingung für die Vektoren $X = \partial_i, Y = \partial_j$ erfüllt ist. Da g, g' bilinear sind, gilt sie dann für beliebige X, Y . \square

Folgende Formulierung wird später nützlicher sein.

III.1.5 Korollar

Seien $\varphi : \tilde{U} \rightarrow U \subset M$ und $\psi : \tilde{U} \rightarrow V \subset M'$ lokale Karten mit demselben Definitionsbereich $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$. Seien g_{ij}, g'_{ij} die ersten Fundamentalformen für M, M' bezüglich dieser Karten. Falls $g_{ij}(u) = g'_{ij}(u)$ für alle $u \in \tilde{U}$ und alle i, j gilt, so sind U, V isometrisch, d.h. es gibt eine Isometrie $U \rightarrow V$.

Beweis: Setze $F = \psi \circ \varphi^{-1} : U \rightarrow V$, dann ist $F \circ \varphi = \psi$, und nach Proposition III.1.4 ist F eine Isometrie. \square

Beispiel: $F : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow U \subset Z$ mit $(\theta, z) \mapsto (\cos \theta, \sin \theta, z)$ ist ein Diffeomorphismus auf den Zylinder ohne "Naht" an der Seite ("aufgeschnittenen" Zylinder U). Wir hatten berechnet, dass g von Z in den θ, z -Koordinaten gleich $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist für alle θ und z .

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist auch die Matrix der euklidischen Metrik auf $(0, 2\pi) \times \mathbb{R}$. Also ist F eine Isometrie (entspricht dem Aufrollen eines Papiers).

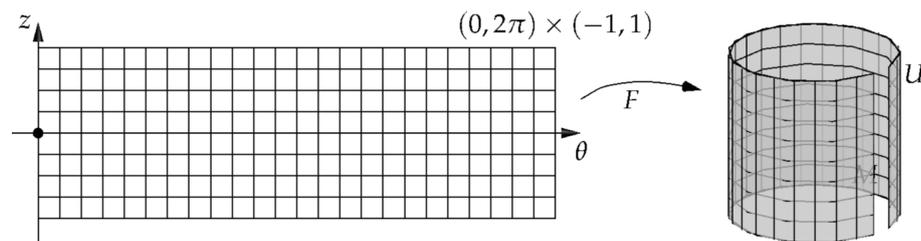


Abbildung III.1.1: »Aufrollen« zu einem Zylinder

Der Begriff "Innere Geometrie":**III.1.6 Definition (informell)**

Eine Größe, die für (Unter-)Mannigfaltigkeiten der Dimension n definiert ist, heißt **Größe der inneren Geometrie**, falls sie unter Isometrien erhalten bleibt.

"Größen" können dabei Funktionen auf M oder auf $M \times M$ oder auch kompliziertere Objekte sein. Was unter "erhalten bleiben" zu verstehen ist, ist für jede Art von Größe anzugeben, daher ist dies keine echte Definition.

Beispiele: Größen der inneren Geometrie sind:

- ▷ Die Abstandsfunktion $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, da $d(F(p), F(q)) = d(p, q)$ für Isometrien F
- ▷ Die Länge von Kurven, da $L[\gamma] = L[F \circ \gamma]$
- ▷ Der Flächeninhalt, da $\text{vol}_n(A) = \text{vol}_n(F(A))$ für alle messbaren $A \subset M$
- ▷ Allgemein: jede Größe, die sich in lokalen Koordinaten allein mittels der g_{ij} oder ihrer (einfachen und höheren) partiellen Ableitungen nach den u^k (also z.B. ohne Verwendung von $\frac{\partial \varphi}{\partial u^i}$ oder N) ausdrücken lässt, ist eine Größe der inneren Geometrie.

Erfahrungsgemäß gilt auch die Umkehrung: Jede innere Größe lässt sich allein mittels der g_{ij} ausdrücken. Das ist schwer zu präzisieren, da wir nicht genauer gesagt haben, was "Größe" und "ausdrücken" bedeutet.

Zum Beispiel ist $d\text{vol} = \sqrt{\det(g_{ij})} du$ eine Größe der inneren Geometrie.

- ▷ K ist eine Größe der inneren Geometrie (Beweis später).
- ▷ Weiter unten lernen wir die kovariante Ableitung und den Riemannsche Krümmungstensor, die beide Größen der inneren Geometrie sind. Dies sind komplizierte Arten von Objekten (keine Funktionen).

Keine Größen der inneren Geometrie sind z.B. $\frac{\partial \varphi}{\partial u^i}$, N , κ_1 , κ_2 , H , diese können also von den "Flachländern" nicht erkannt werden!

Für H folgt dies aus dem Beispiel des aufgeschnittenen Zylinders U , der isometrisch zu $(0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ ist. Für U ist $H \equiv -\frac{1}{2}$ und für $(0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ ist $H \equiv 0$.

III.1.7 Definition

- ▷ M und M' heißen **isometrisch**, falls eine Isometrie $F : M \rightarrow M'$ existiert.
- ▷ M heißt **flach**, wenn es lokal isometrisch zu \mathbb{R}^n ist, d.h. für alle $p \in M$ gibt es eine Umgebung $U \subset M$ von p , so dass U isometrisch zu einer Teilmenge des \mathbb{R}^n ist.

\mathbb{R}^n hat hier immer die Standard-Metrik (euklidische Metrik).

Beispiele: ▷ Zylinder und Kegel sind flach, da sie lokal isometrisch zum \mathbb{R}^2 sind.

- ▷ Die Sphäre ist nirgends flach, d.h. es gibt keine offene Menge $U \subset S^2$, die isometrisch zu einem $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^2$ ist.

Denn sei $p \in U$. Berechne den Umfang eines Kreises mit Radius $R > 0$, innerhalb der Sphäre gemessen. Wir bestimmen zunächst den in \mathbb{R}^3 gemessenen Radius r dieses Kreises: Dazu sei dieser Kreis der obere Rand eines Kegels mit Spitze im Ursprung und halbem Öffnungswinkel α . Es ist $r = \sin \alpha$ und $R = \alpha$, also $r = \sin \alpha = \sin R$. Also hat der Kreis einen Umfang von $2\pi r = 2\pi \sin R$. Wäre U flach, so müsste dieselbe Formel wie im \mathbb{R}^2 gelten, da alle Längen unter einer Isometrie erhalten bleiben. Wegen $R > \sin R$ für $R > 0$ gilt aber $2\pi \sin R \neq 2\pi R$, also ist U nicht flach!

Bemerkung: Für Ebene und Zylinder / Kegel gilt jeweils $K = 0$!

Dass die Sphäre und die Ebene nicht isometrisch sind, kann man auch daran sehen, dass in der Sphäre $K \equiv 1$, für \mathbb{R}^2 aber $K \equiv 0$ gilt. Dafür muss man aber gezeigt haben, dass K eine Größe der inneren Geometrie ist. Das werden wir später zeigen.

Frage: Wie bestimmt man für zwei gegebene Mannigfaltigkeiten, ob sie isometrisch sind?

Ein Beweis, dass sie isometrisch sind, würde im Angeben einer Isometrie bestehen. Es kann aber schwierig sein, eine solche zu finden. Noch schwieriger ist die Frage, wie man beweisen kann, dass *keine* Isometrie existiert.

Frage: Wie sieht man einer Fläche M (in lokalen Koordinaten gegeben) an, ob sie flach ist?

Um solche Fragen zu beantworten, sucht man nach Invarianten, d.h. Größen, die M zugeordnet sind und unter den relevanten Abbildungen (hier: Isometrien) erhalten bleiben.

Berechnet man die Invariante für M und für M' und sind diese verschieden (bzw. nicht zur Deckung zu bringen), so folgt, dass M und M' nicht isometrisch sein können.

III.2. Vektorfelder und kovariante Ableitung

Vorbemerkung zur Notation: Von jetzt an bezeichnen X, Y, Z immer Vektorfelder, nicht Vektoren an einem Punkt.

Unser Ziel ist es, zu zeigen, dass die Gauß-Krümmung K eine Größe der inneren Geometrie ist. Das ist nicht offensichtlich, da K mittels κ_1 und κ_2 bzw. mittels der Weingartenabbildung definiert ist, die keine innere Größen sind. Wir werden aber im Folgenden eine Formel für K finden, in der nur die g_{ij} vorkommen.

Als Vorbereitung ist es nützlich, sich über folgende Frage klar zu werden: Wie leitet man ein Vektorfeld ab?

Nach Definition II.2.8 ist ein Vektorfeld X eine Abbildung, die jedem $p \in M$ einen Vektor $X_p \in T_pM$ zuordnet. Dies sollte genauer erklärt werden, da der „Zielraum“ T_pM mit p variiert. Wir können ein Vektorfeld auf M auf zwei Arten betrachten:

- ▷ extrinsisch: Wegen $T_pM \subset \mathbb{R}^N$ ist X eine Abbildung $M \rightarrow \mathbb{R}^N$, für die $X_p \in T_pM$ für alle $p \in M$ gilt.
- ▷ intrinsisch: Bezüglich einer beliebigen lokalen Karte $\varphi : \tilde{U} \rightarrow U \subset M$ lässt sich $X|_U$ schreiben als

$$X_{\varphi(u)} = \sum_{i=1}^n X^i(u) \partial_i \text{ für } u \in \tilde{U}.$$

Beachten Sie, dass im zweiten Fall X durch n „Komponentenfunktionen“ beschrieben wird, im ersten durch N Komponentenfunktionen (die allerdings zusätzliche Bedingungen erfüllen müssen, damit $X_p \in T_pM$ ist). Beide Betrachtungsweisen erlauben uns, zu definieren, was es bedeutet, dass ein Vektorfeld glatt ist: Die jeweiligen Komponentenfunktionen sollen glatt sein. Im ersten Fall ist das äquivalent dazu, dass die Abbildung $M \rightarrow \mathbb{R}^N$ glatt ist. Diese aus den beiden Betrachtungsweisen resultierenden Definitionen von Glattheit sind äquivalent (Übung).

Wir verwenden folgende Bezeichnungen:

- ▷ $\mathcal{X}(M) = \{\text{glatte Vektorfelder auf } M\}$
- ▷ $C^\infty(M) = \{\text{glatte Funktionen } M \rightarrow \mathbb{R}\}$

Man kann Vektorfelder und Funktionen auf zwei Weisen kombinieren:

III.2.1 Definition (Multiplikation eines Vektorfelds mit einer Funktion)

Sei $X \in \mathcal{X}(M)$ und $h \in C^\infty(M)$. Dann ist das Vektorfeld $hX \in \mathcal{X}(M)$ (oder $h \cdot X$) definiert durch $(hX)_p = h(p)X_p$.

Das heißt, die Länge von X_p wird variabel mit p geändert, so wie es die Funktion h vorgibt.

III.2.2 Definition (Ableiten einer Funktion in Richtung eines Vektorfelds)

Sei $X \in \mathcal{X}(M)$ und $f \in C^\infty(M)$. Dann ist die Funktion $Xf \in C^\infty(M)$ definiert durch die Richtungsableitung von f in Richtung X ,

$$(Xf)(p) = df|_p(X_p).$$

Also bloß eine neue Notation für ein altes Konzept! Wir stellen Xf in lokalen Koordinaten dar: Sei $\varphi : \tilde{U} \rightarrow U \subset M$ eine lokale Karte. Betrachte zunächst $X = \partial_i$ und $\tilde{f} = f \circ \varphi$. Nach Definition und Kettenregel ist

$$\begin{aligned} (\partial_i f)(\varphi(u)) &= df|_{\varphi(u)}(\partial_i) = df|_{\varphi(u)}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u^i}(u)\right) \\ &= \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial u^i}(u) \\ &= \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^i}(u) \end{aligned}$$

Also kurz:

$$\partial_i f = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^i}$$

Diese eingängige Identität ist der Grund für die Bezeichnung ∂_i . Für ein beliebiges Vektorfeld $X_{\varphi(u)} = \sum_i X^i(u) \partial_i$ folgt analog $Xf = \sum_i X^i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^i}$

Beachte: $(Xf)(p)$ hängt ab von:

- ▷ bzgl. X : nur dem Vektor X_p
- ▷ bzgl. f : nur den ersten Ableitungen von f bei p

III.2.3 Lemma (Rechenregeln für Xf)

Seien $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, $f, g, h \in C^\infty(M)$, $c \in \mathbb{R}$.

- (1) a) $(X + Y)f = Xf + Yf$
b) $(h \cdot X)f = h \cdot (Xf)$
- (2) a) $X(f + g) = Xf + Xg$
b) $X(c \cdot f) = c \cdot Xf$
- (3) $X(f \cdot g) = Xf \cdot g + f \cdot Xg$ (Produktregel)

Beweis: (1) und (2) sind einfach direkt nachzurechnen. Für (3) genügt es wegen Punkt (1) des Lemmas, die Aussage für $X = \partial_i$ nachzuprüfen. Damit folgt (3) aus der üblichen Produktregel. \square

Bemerkung: Man kann die Aussagen des Lemmas auch mit schicken Begriffen der Algebra formulieren (das ist hier nicht unbedingt nötig, kann aber für die Übersicht nützlich sein, wenn Sie noch mehr ähnliche Regeln kennenlernen):

- ▷ $\mathcal{X}(M)$ und $C^\infty(M)$ sind \mathbb{R} -Vektorräume. Dabei sind Addition und Multiplikation mit Skalaren punktweise definiert, d.h. $(X + Y)_p = X_p + Y_p$, $(cX)_p = cX_p$ für $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ und $c \in \mathbb{R}$, und ähnlich für Funktionen.
- ▷ $C^\infty(M)$ ist sogar eine **\mathbb{R} -Algebra**, d.h. ein Vektorraum, auf dem zusätzlich ein Produkt $C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$, $(f, g) \mapsto f \cdot g$ definiert ist (punktweise Multiplikation), das \mathbb{R} -bilinear ist, d.h. mit den Vektorraum-Operationen verträglich ist (insbesondere ist $C^\infty(M)$ mit $+$ und \cdot ein Ring).

Genauer ist $C^\infty(M)$ eine **assoziative \mathbb{R} -Algebra**, d.h. das Produkt erfüllt das Assoziativgesetz $(fg)h = f(gh)$.

$\mathcal{X}(M)$ ist aber keine assoziative Algebra: Man kann Vektorfelder nicht multiplizieren. (In Kapitel IV.5 werden Sie aber die Lie-Klammer kennenlernen, die $\mathcal{X}(M)$ doch zu einer Algebra macht – diese ist aber nicht assoziativ.)

- ▷ $\mathcal{X}(M)$ wird mit der Operation $C^\infty(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$, $(h, X) \mapsto hX$ ein **$C^\infty(M)$ -Modul** (dies beinhaltet die Regeln $(hk)X = h(kX)$, $(h+k)X = hX + kX$).
- ▷ Teil (1) des Lemmas sagt: Die Abbildung $(X, f) \mapsto Xf$ ist $C^\infty(M)$ -linear bezüglich X . D.h. für jedes feste f ist $X \mapsto Xf$ eine $C^\infty(M)$ -lineare Abbildung.
- ▷ Teil (2) des Lemmas sagt: Die Abbildung $(X, f) \mapsto Xf$ ist \mathbb{R} -linear bzgl. f . D.h. für jedes feste X ist $f \mapsto Xf$ \mathbb{R} -linear.
- ▷ Teil (3) des Lemmas sagt insbesondere, dass $(X, f) \mapsto Xf$ *nicht* $C^\infty(M)$ -linear bzgl. f ist: $X(fg)$ ist im Allgemeinen nicht gleich $f(Xg)$.
- ▷ Ist A eine \mathbb{R} -Algebra, so nennt man eine Abbildung $D : A \rightarrow A$ eine **Derivation**, wenn sie \mathbb{R} -linear ist und die Produktregel

$$D(fg) = (Df)g + f(Dg)$$

für beliebige $f, g \in A$ gilt.

(2) und (3) sagen also, dass $f \mapsto Xf$ für jedes $X \in \mathcal{X}(M)$ eine Derivation ist.

Vektorfelder kommen in zwei Rollen vor:

- (1) Als Richtungen, in denen Objekte (Funktionen, Vektorfelder) abgeleitet werden
- (2) Als Objekte, die selber abgeleitet werden

Wir haben sie bereits verwendet, um Funktionen abzuleiten. Nun kommen wir zu den anderen Rollen.

Ableiten von Vektorfeldern

Seien $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Wir wollen Y in der Richtung X ableiten und ein Vektorfeld auf M erhalten. Für $M = \mathbb{R}^N$ ist das kein Problem:

III.2.4 Definition

Sei $M = \mathbb{R}^N$ und seien $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Die Ableitung von Y in Richtung X ist definiert als

$$\left(\nabla_X^{\mathbb{R}^N} Y \right)_p = dY|_p(X_p).$$

$\nabla_X^{\mathbb{R}^N} Y$ ist ein Vektorfeld.

III.2.5 Alternativ-Definition

Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ mit $\gamma(0) = p$ und $\dot{\gamma}(0) = X_p$, dann definieren wir

$$\left(\nabla_X^{\mathbb{R}^N} Y \right)_p = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} Y_{\gamma(t)}$$

Die Alternativ-Definition ist deshalb von Interesse, weil Y hier nur an den Kurvenpunkten $\gamma(t)$ definiert sein muss. Die Äquivalenz der beiden Definitionen folgt direkt aus der Kettenregel.

Ist $Y = (Y^1, \dots, Y^N) = \sum Y^i e_i$, so ist $\nabla_X^{\mathbb{R}^N} Y = (X(Y^1), \dots, X(Y^N))$, wobei $X(Y^i)$ die Richtungsableitung der Funktion Y^i in Richtung X ist.

Sei nun $M \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit und $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Betrachte $(\nabla_X^{\mathbb{R}^N} Y)_p = \frac{d}{dt}|_{t=0} Y_{\gamma(t)}$, wobei γ innerhalb von M verläuft und $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = X_p$ ist (es gibt so eine Kurve, weil $X_p \in T_p M$).

Problem: Das muss nicht tangential an M sein! Lösung: Projiziere auf $T_p M$!

Erinnerung: Sei $v \in \mathbb{R}^N$, dann ist $v = \langle v, N_p \rangle N_p + (v - \langle v, N_p \rangle N_p)$ die Zerlegung von v in Vektoren parallel und orthogonal zu N .

III.2.6 Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

Die **kovariante Ableitung von Y in Richtung X** ist das (tangente) Vektorfeld $\nabla_X Y \in \mathcal{X}(M)$ definiert durch

$$(\nabla_X Y)_p = \text{orthogonale Projektion von } (\nabla_X^{\mathbb{R}^N} Y)_p \text{ auf } T_p M.$$

Falls M Hyperfläche ist, so ist

$$(\nabla_X Y)_p = (\nabla_X^{\mathbb{R}^N} Y)_p - \langle (\nabla_X^{\mathbb{R}^N} Y)_p, N_p \rangle N_p.$$

Auch wenn M keine Hyperfläche ist, kann man natürlich eine Formel $\nabla_X Y$ angeben, sie ist aber ein klein wenig komplizierter.

Beachte, dass sich diese Definition auf die extrinsischen Größen N und $\nabla^{\mathbb{R}^N}$ bezieht. Daher ist es überraschend, dass wir gleich zeigen werden, dass ∇ eine Größe der inneren Geometrie ist!

Statt kovariante Ableitung sagt man auch **Zusammenhang** oder **Levi-Civita-Zusammenhang**.

III.2.7 Lemma (Rechenregeln für ∇)

Seien $X, Y, X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(M)$, $h \in C^\infty(M)$.

- (1) $\triangleright \nabla_{X_1+X_2} Y = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y$
 $\triangleright \nabla_{hX} Y = h \cdot \nabla_X Y$
- (2) $\triangleright \nabla_X (Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$
 $\triangleright \nabla_X (hY) = (Xh)Y + h \cdot \nabla_X Y$ (Produktregel)
- (3) ∇ ist mit g verträglich, d.h. für alle $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ gilt

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

Beweis: Nachrechnen für $\nabla^{\mathbb{R}^N}$, dann für ∇ . (Übung) □

Die Produktregel in (2) merkt man sich am besten so: Wenn das Produkt hY abgeleitet wird, muss eine Summe herauskommen: Im ersten Summanden wird h abgeleitet und das Ergebnis mit Y multipliziert, im zweiten wird Y abgeleitet und das Ergebnis mit h multipliziert. Die angegebenen Ableitungsoperationen (Xh bzw. $\nabla_X Y$) sind die in diesem Kontext einzig natürlichen.

Bemerkung: Nochmal für die Algebra-Fans: (1) sagt, dass $(X, Y) \rightarrow \nabla_X Y$ bezüglich $X \in C^\infty(M)$ -linear ist ('Man kann Funktionen rausziehen'). (2) sagt, dass es bezüglich Y nicht $C^\infty(M)$ -linear ist, sondern eine verallgemeinerte Derivation. Ist A eine Algebra und \mathcal{M} ein A -Modul, so ist eine **verallgemeinerte Derivation** auf \mathcal{M} eine A -lineare Abbildung $D : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, für die eine Derivation D' auf A existiert, so dass

$D(hX) = (D'h)X + hD(X)$ für alle $h \in A$, $X \in \mathcal{M}$ gilt. Hier ist $A = C^\infty(M)$, $\mathcal{M} = \mathcal{X}(M)$, $D = \nabla_X$ und $D' = X$.

Wir beschreiben ∇ nun in lokalen Koordinaten. Für $\nabla^{\mathbb{R}^N}$ sieht das ähnlich aus wie $\partial_i f$ für Funktionen:

III.2.8 Lemma

Sei $\varphi : \tilde{U} \rightarrow U \subset M$ eine lokale Karte, $Y \in \mathcal{X}(M)$ und $\tilde{Y} = Y \circ \varphi$. Dann ist $\nabla_{\partial_i}^{\mathbb{R}^N} Y = \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial u^i}$:

Beweis: $\nabla_{\partial_i}^{\mathbb{R}^N} Y = dY(\partial_i) = \frac{\partial(Y \circ \varphi)}{\partial u^i} = \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial u^i}$. □

Insbesondere für $Y = \partial_j$ (wobei wir hier nachlässig sind und Y statt \tilde{Y} schreiben) folgt

$$\nabla_{\partial_i}^{\mathbb{R}^N} \partial_j = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^i \partial u^j}.$$

Bemerkung (Hoch- und Runterziehen von Indizes): Bei den folgenden Rechnungen in Koordinaten ist folgende Konstruktion wichtig: Sind (a_1, \dots, a_n) und (b^1, \dots, b^n) Vektoren in \mathbb{R}^n , so gilt:

$$a_l = \sum_k b^k g_{kl} \forall l \iff b^k = \sum_l g^{kl} a_l \forall k$$

da wir

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}, g^{-1} = \begin{pmatrix} g^{11} & \cdots & g^{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ g^{n1} & \cdots & g^{nn} \end{pmatrix}$$

gesetzt hatten und mit $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b^1, \dots, b^n)$ gilt: $a = b \cdot g \iff b = a \cdot g^{-1}$.

Man sagt, dass man (a_l) durch Runterziehen eines Indexes aus den (b^k) erhält, bzw. (b^k) durch Hochziehen aus (a_l) .

Weiterhin gilt dann:

$$v = \sum_k b^k \partial_k \iff a_l = g(v, \partial_l) \forall l$$

denn $g(\sum_k b^k \partial_k, \partial_l) = \sum_k b^k g_{kl}$.

In Worten: (b^l) sind die Komponenten eines Vektors $\iff a_k =$ Skalarprodukte des Vektors mit ∂_k .

III.2.9 Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit und $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ die kovariante Ableitung. Sei $\varphi : \tilde{U} \rightarrow U$ eine lokale Karte. Die **Christoffel-Symbole zweiter Art von M (bzw. ∇) bzgl. φ** sind die Funktionen $\Gamma_{ij}^k : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k$$

für $i, j = 1, \dots, n$.

Die **Christoffel-Symbole erster Art von M** bzgl. φ erhält man durch Runterziehen des oberen Indexes

$$\Gamma_{ij,l} = \sum_k \Gamma_{ij}^k g_{kl} = g(\nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_l)$$

Bemerkung: Es gilt (für $n = N - 1$ der Einfachheit halber)

$$\begin{aligned} \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k &= \nabla_{\partial_i} \partial_j \\ &= \nabla_{\partial_i}^{\mathbb{R}^N} \partial_j - \langle \nabla_{\partial_i}^{\mathbb{R}^N} \partial_j, N \rangle N \\ &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^i \partial u^j} - \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^i \partial u^j}, N \right\rangle N. \end{aligned}$$

Außerdem ist $\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^i \partial u^j}, N \rangle = II(\partial_i, \partial_j) = h_{ij}$, also erhalten wir

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^i \partial u^j} = \sum \Gamma_{ij}^k \partial_k + h_{ij} \cdot N.$$

Dies ist die Zerlegung von $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^i \partial u^j}$ in tangentialen und normalen Anteil. Da $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^i \partial u^j} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^j \partial u^i}$ gilt, folgt außerdem

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \quad \text{und daher auch} \quad \Gamma_{ij,l} = \Gamma_{ji,l}$$

Das bedeutet also $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \nabla_{\partial_j} \partial_i$. Aber im Allgemeinen gilt $\nabla_X Y \neq \nabla_Y X$! (Übung)

III.2.10 Satz

∇ ist eine Größe der inneren Geometrie. Genauer gilt

$$\Gamma_{ij,l} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} \right)$$

für $i, j, l = 1, \dots, n$.

Beweis: Wende Lemma III.2.7 auf $X = \partial_l, Y = \partial_i, Z = \partial_j$ an.

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} = \partial_l g_{ij} &= \partial_l g(\partial_i, \partial_j) \\ &= g(\nabla_{\partial_l} \partial_i, \partial_j) + g(\partial_i, \nabla_{\partial_l} \partial_j) \\ &= \Gamma_{li,j} + \Gamma_{lj,i} \end{aligned}$$

die Richtungsableitung von g in Richtung ∂_l . Also gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} &= \Gamma_{li,j} + \Gamma_{lj,i}, \\ \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} &= \Gamma_{ij,l} + \Gamma_{il,j}, \\ \frac{\partial g_{li}}{\partial u^j} &= \Gamma_{jl,i} + \Gamma_{ji,l}. \end{aligned}$$

Damit folgt $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} \right) = \Gamma_{ij,l}$. □

Beispiel: Ist M flach, so können wir eine Karte wählen, in der $g_{ij} = \delta_{ij}$ ist, also konstant für jedes i, j . Aus der Formel im Satz folgt dann $\Gamma_{ij,l} = 0$ für alle i, j, l .

Es lohnt sich nicht, die Formeln für Γ_{ij}^k auswendig zu lernen. Wichtig ist nur, dass ∇ durch g bestimmt und Γ durch eine Kombination erster Ableitungen von g gegeben ist.

Die folgenden Überlegungen sind für das weitere Verständnis zunächst nicht unbedingt nötig, vervollständigen aber das Bild etwas.

In welchem Sinne bleibt ∇ unter Isometrien erhalten? Um dies zu formulieren, ist folgende Notation nützlich:

III.2.11 Definition

Sei $F : M \rightarrow M'$ ein Diffeomorphismus zwischen Untermannigfaltigkeiten $M \subset \mathbb{R}^N, M' \subset \mathbb{R}^{N'}$. Ist X ein Vektorfeld auf M , so ist das Vektorfeld $F_* X$ (**push-forward von X unter F**) auf M' definiert durch

$$(F_* X)_q = dF_p(X_p) \quad \text{für } q = F(p)$$

Man rechnet leicht nach, dass $F_*(X + Y) = F_* X + F_* Y$ ist und dass man 'Funktionen rausziehen kann': Für $h \in C^\infty(M)$, $X \in \mathcal{X}(M)$ ist $F_*(hX) = F_* h F_* X$; wobei $F_* h = h \circ F^{-1}$ die auf M' 'verschobene' Funktion h ist.

III.2.12 Satz

Die kovariante Ableitung ist eine Größe der inneren Geometrie in dem Sinn, dass für jede Isometrie $F : M \rightarrow M'$ zwischen Untermannigfaltigkeiten $M \subset \mathbb{R}^N$, $M' \subset \mathbb{R}^{N'}$ und für beliebige Vektorfelder $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ gilt:

$$F_*(\nabla_X Y) = \nabla'_{F_*X} F_*Y$$

Hierbei sind ∇, ∇' die kovarianten Ableitungen von M, M' .

Beweis: Wir rechnen zunächst nach, dass dies für Koordinatenvektorfelder gilt. Sei also $\varphi : \tilde{U} \rightarrow U \subset M$ eine lokale Karte für M und $\varphi' : \tilde{U} \rightarrow M'$ die entsprechende lokale Karte für M' wie in Proposition III.1.4. Nach dieser Proposition gilt $g_{ij}(u) = g'_{ij}(u)$ für alle $u \in \tilde{U}$, also folgt aus der Formel in Satz III.2.10, dass $\Gamma_{ij}^k = \Gamma'_{ij}{}^k$ für alle i, j, k ist. Weiterhin gilt $\partial'_i = dF(\partial_i) = F_*\partial_i$, also

$$F_*(\nabla_{\partial_i}\partial_j) = F_*\left(\sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k\right) = \sum_k \Gamma'_{ij}{}^k \partial'_k$$

und

$$\nabla_{\partial'_i}\partial'_j = \sum_k \Gamma'_{ij}{}^k \partial'_k$$

Wegen $\Gamma_{ij}^k = \Gamma'_{ij}{}^k$ folgt die Behauptung für $X = \partial_i$, $Y = \partial_j$.

Indem man beliebige X, Y nun lokal in der Basis der ∂_i darstellt und die Rechenregeln für ∇ anwendet, folgt die Behauptung allgemein (Übung). \square

Frage: Gibt es eine geometrische Art, $\nabla_X Y$ intrinsisch zu beschreiben?

Antwort: Ja, werden wir später sehen.

III.3. Riemannscher Krümmungstensor und Theorema Egregium

Das Theorema Egregium, das besagt, dass die Gauß-Krümmung einer Fläche eine Größe der inneren Geometrie ist, bildet die Grundlage für alle weiteren Entwicklungen der Differentialgeometrie. Sein Beweis ist nicht einfach. Mit „Drauflosrechnen“ ist er kaum zu finden. Stattdessen ist es nützlich, sich zunächst genau zu überlegen, was gesucht ist und wie man es finden könnte.

Machen wir uns klar, was wir suchen. Die wichtigsten Größen bei der Beschreibung einer Fläche sind die erste und zweite Fundamentalform. Diese sind in Koordinaten durch die Matrizen $g = (g_{ij})$ und $h = (h_{ij})$ gegeben. Die Gauß-Krümmung ist $K = \frac{\det h}{\det g}$ (dies folgte direkt aus der Definition von K als Determinante der Weingarten-Abbildung). Wir suchen eine Formel, die K allein mittels g ausdrückt. Damit würde $\frac{\det h}{\det g} = (\text{ein Ausdruck in } g)$ folgen. Eine solche Formel würde also bedeuten, dass es eine Beziehung zwischen g und h gibt, die für jede beliebige Fläche besteht.

Stellen wir uns also zunächst folgende Frage: Gibt es universelle Beziehungen, die für beliebige Flächen (und beliebige lokale Karten) zwischen g und h bestehen?

Ein wenig anders formuliert: Können wir Bedingungen an die Matrizen g und h finden, die erfüllt sein müssen, damit es eine Fläche gibt, die g als erste und h als zweite Fundamentalform hat?

Offensichtliche Bedingungen sind, dass g und h symmetrisch sind und dass g positiv definit ist. Gibt es weitere? Präziser formuliert (für Hyperflächen, was nicht schwieriger als für Flächen ist):

Frage: Sei $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen und seien glatte Funktionen $g_{ij}, h_{ij} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$ (für $i, j = 1, \dots, n$) gegeben, so dass $g(u) = (g_{ij}(u))$ und $h(u) = (h_{ij}(u))$ für jedes $u \in \tilde{U}$ symmetrische Matrizen sind. Außerdem sei $(g_{ij}(u))$ positiv definit für alle u . Gibt es dann eine lokale Karte φ einer Hyperfläche $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$, so dass g_{ij} und h_{ij} gerade die erste und zweite Fundamentalform von M bezüglich dieser Karte beschreiben?

Wenn die Antwort nicht allgemein 'ja' lautet, können wir dann (notwendige und hinreichende) Bedingungen an g und h formulieren, unter denen ein solches φ existiert?

Um dies zu untersuchen, stellen wir zunächst zusammen, welche Beziehungen zwischen φ , den (g_{ij}) und den (h_{ij}) wir kennen.

III.3.1 Satz

Wenn (g_{ij}) und (h_{ij}) die erste und zweite Fundamentalform einer Hyperfläche $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ bezüglich einer Karte φ sind, gilt für alle i, j, k , mit $\partial_i = \frac{\partial \varphi}{\partial u^i}$ etc.,

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^i \partial u^j} = \nabla_{\partial_i} \partial_j + h_{ij} N = \sum_{\alpha} \Gamma_{ij}^{\alpha} \partial_{\alpha} + h_{ij} \cdot N$$

$$(2) \quad \frac{\partial N}{\partial u^k} = -W(\partial_k) = -\sum_{\beta, \gamma} h_{k\beta} g^{\beta\gamma} \partial_{\gamma}.$$

Beweis: (1) beschreibt die Zerlegung von $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^i \partial u^j} = \nabla_{\partial_i}^{\mathbb{R}^N} \partial_j$ in tangentialen und normalen Anteil. Dies hatten wir bereits nach III.2.9 gesehen.

$$(2) \text{ folgt aus } \frac{\partial N}{\partial u^k} = -W(\partial_k) = -\sum_{\gamma} w_k^{\gamma} \partial_{\gamma} \text{ mittels } w_k^{\gamma} = \sum_{\beta} h_{k\beta} g^{\beta\gamma} \quad \square$$

Bemerkung: Diese Formeln sind die Analoga für Flächen der Frenet-Formeln für Kurven: Man drückt die Ableitung von Tangential- und Normalvektoren mittels der Tangential- und Normalvektoren aus. Bei den Frenet-Gleichungen nahmen wir eine Bogenlängeparametrisierung an, daher hatte \dot{T} keine T -Komponente. Dies hat kein Analogon in $n \geq 2$ Dimensionen. T entspricht hier ∂_i , $i = 1, \dots, n$.

Für die folgenden Überlegungen benötigen wir noch folgendes Lemma.

III.3.2 Lemma

Für ein Vektorfeld X auf M ist die Zerlegung von $\frac{\partial X}{\partial u^i} = \nabla_{\partial_i}^{\mathbb{R}^N} X$ in Tangential- und Normalteil gegeben durch

$$\frac{\partial X}{\partial u^i} = \nabla_{\partial_i} X + II(\partial_i, X)N$$

Dies hatten wir für $X = \partial_j$ bereits in Satz III.3.1 verwendet. Die Notation hier ist etwas vereinfacht: wir unterscheiden nicht zwischen X und $\tilde{X} = X \circ \varphi$.

Beweis: Der tangentiale Teil ist $\nabla_{\partial_i} X$ nach Definition der kovarianten Ableitung. Der Normalanteil von $\frac{\partial X}{\partial u^i}$ ist $g(N, \frac{\partial X}{\partial u^i})N$. Weil $g(N, X) = 0$ für alle u gilt, ist (wieder einmal die Standardrechnung!)

$$0 = \frac{\partial}{\partial u^i} g(N, X) = g(N, \frac{\partial X}{\partial u^i}) + g(\frac{\partial N}{\partial u^i}, X)$$

Der letzte Term ist $-g(W(\partial_i), X) = -II(\partial_i, X)$, und die Behauptung folgt. (Diese Rechnung wurde bereits analog im Beweis von Satz II.4.4 durchgeführt.) \square

Satz III.3.1 ist ein System partieller Differentialgleichungen für die unbekanntenen Funktionen φ und N bei gegebenen (g_{ij}) und (h_{ij}) , da Γ_{ij}^{α} durch die (g_{ij}) bestimmt ist (beachte: damit ist immer gemeint, dass jedes Γ_{ij}^{α} durch die gesamte Matrix $(g_{rs})_{r,s=1,\dots,n}$ bestimmt ist).

Bemerkung: Um die folgenden Überlegungen einordnen zu können, ist es nützlich, sich an folgendes Problem aus Analysis III zu erinnern.

Frage: Wann ist ein Vektorfeld auf $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ ein Gradientenfeld?

D.h.: Sei $X = (X^1, \dots, X^n) : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld auf \tilde{U} . Unter welchen Bedingungen an X gibt es eine Funktion φ auf \tilde{U} mit $\nabla \varphi = X$, also

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u^i} = X^i \quad \text{für alle } i?$$

Auch dies ist ein System partieller Differentialgleichungen für φ .

Eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit erhalten wir, indem wir die i -te Gleichung nach w^j und die j -te Gleichung nach w^i ableiten. Wir erhalten $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial w^i \partial w^i} = \frac{\partial X^i}{\partial w^i}$ und $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial w^i \partial w^j} = \frac{\partial X^j}{\partial w^i}$. Da immer $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial w^i \partial w^j} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial w^j \partial w^i}$ für alle i, j gilt, folgt $\frac{\partial X^i}{\partial w^j} = \frac{\partial X^j}{\partial w^i}$ für alle i, j . Dies ist die gesuchte notwendige Bedingung an X . Die Bedingung ist auch hinreichend, falls U einfach zusammenhängend ist.

Analog zu dieser Bemerkung wollen wir aus den Gleichungen (1) und (2) in Satz III.3.1 die höheren φ -Ableitungen und N sowie $\frac{\partial N}{\partial u^k}$ eliminieren, um eine Gleichung nur für die g_{ij} und h_{ij} zu erhalten (denn Γ_{ij}^k kann ja durch die g_{ij} ausgedrückt werden).

Dazu leiten wir Formel (1) aus dem Satz nochmals ab und verwenden

$$\frac{\partial}{\partial w^i} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial w^j \partial w^l} = \frac{\partial}{\partial w^j} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial w^i \partial w^l}.$$

Wir berechnen $\frac{\partial}{\partial w^i} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial w^j \partial w^l}$, indem wir es in Tangential- und Normalteil aufspalten. Wir wenden Lemma III.3.2 auf den tangentialen Term in der Zerlegung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial w^j \partial w^l} = \nabla_{\partial_j} \partial_l + h_{jl} N$$

an und erhalten:

$$\frac{\partial}{\partial w^i} \nabla_{\partial_j} \partial_l = \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} \partial_l + II(\partial_i, \nabla_{\partial_j} \partial_l) N$$

Die Ableitung des normalen Terms $h_{jl} N$ ist nach der Produktregel

$$\frac{\partial}{\partial w^i} (h_{jl} N) = h_{jl} \frac{\partial N}{\partial w^i} + \frac{\partial h_{jl}}{\partial w^i} N$$

Dies ist bereits eine Summe eines tangentialen und eines normalen Teils. Mit $\frac{\partial N}{\partial w^i} = -W(\partial_i)$ folgt also

$$\frac{\partial}{\partial w^i} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial w^j \partial w^l} = \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} \partial_l - h_{jl} W(\partial_i) + (\dots) N$$

wobei wir die genaue Formel für den normalen Teil hier nicht benötigen.

Wir schreiben nun denselben Ausdruck noch einmal mit vertauschten Indizes i, j hin und bilden die Differenz:

$$(III.1) \quad 0 = \frac{\partial}{\partial w^i} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial w^j \partial w^l} - \frac{\partial}{\partial w^j} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial w^i \partial w^l} = \left[\nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} \partial_l - \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_i} \partial_l \right] - \left[h_{jl} W(\partial_i) - h_{il} W(\partial_j) \right] + (\dots) N$$

Die Differenz der eckigen Klammern ist tangential, der letzte Term ist normal. Daher müssen beide verschwinden. Das ist die gesuchte Relation zwischen g und h ! Die erste eckige Klammer lässt sich allein mittels g ausdrücken, die zweite enthält zusätzlich h . Der erste Ausdruck ist so wichtig, dass er einen eigenen Namen hat. Es ist ein Vektor, wir betrachten also seine Koeffizienten bzgl. der Basis ∂_k :

III.3.3 Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit und $\varphi : \tilde{U} \rightarrow U \subset M$ eine lokale Karte.

Für $i, j, k, l = 1, \dots, n$ sind die Komponenten des **Riemannschen Krümmungstensors** R_{lij}^k bzgl. φ definiert durch

$$\nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} \partial_l - \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_i} \partial_l = \sum_k R_{lij}^k \partial_k$$

Die Zahlen $R_{klij} = \sum_m R_{lij}^m g_{mk}$, die man durch Runterziehen des oberen Index erhält, werden auch als Komponenten des Riemannschen Krümmungstensors bezeichnet. Nach dem allgemeinen Rezept für Runterziehen gilt

$$R_{klij} = g \left(\partial_k, \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} \partial_l - \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_i} \partial_l \right)$$

Fassen wir das Ergebnis zusammen. Bildet man das Skalarprodukt von Gleichung (III.1) mit ∂_k und verwendet $g(W(\partial_i), \partial_k) = h_{ik}$, so folgt:

III.3.4 Satz (Gauß-Gleichung)

Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche, deren Krümmungstensor und zweite Fundamentalform in einer lokalen Karte durch (R_{klj}) bzw. (h_{ij}) gegeben sind. Dann gilt für alle i, j, k, l

$$R_{klj} = h_{jl}h_{ik} - h_{il}h_{jk}$$

Dies ist die gesuchte Beziehung zwischen g und h . Beachten Sie, dass hier φ nicht mehr explizit vorkommt.

III.3.5 Satz (THEOREMA EGREGIUM, Gauß 1827)

Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche, dann ist die Gaußkrümmung K eine Größe der inneren Geometrie und es gilt

$$K = \frac{R_{2121}}{\det(g_{ij})_{ij}}$$

Beweis: Nach der Gauß-Gleichung ist $R_{2121} = h_{11}h_{22} - h_{21}h_{12} = \det(h_{ij})_{ij}$ und damit

$$K = \frac{\det(h_{ij})_{ij}}{\det(g_{ij})_{ij}} = \frac{R_{2121}}{\det(g_{ij})_{ij}},$$

was zu zeigen war. Dies ist eine Größe der inneren Geometrie, da R mittels der ∇ , einer Größe der inneren Geometrie, bestimmt ist (für eine explizite Formel siehe die Bemerkungen unten). \square

Bemerkungen: $\triangleright R_{klj}$ sind n^4 Zahlen, da $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$ sind. Viele von diesen sind aber bis auf das Vorzeichen gleich. Beispielsweise folgt aus $R_{klj} = h_{jl}h_{ik} - h_{il}h_{jk}$ wegen der Symmetrie der Matrix der zweiten Fundamentalform $R_{klji} = -R_{klj}$ und $R_{lkij} = -R_{klj}$.

Daraus folgt $R_{klj} = 0$ für $k = l$ oder $i = j$. Für $n = 2$ müssen die anderen R_{klj} bis aufs Vorzeichen gleich sein. Sie sind $\pm K \det g$. Insbesondere enthält R hier also nicht mehr Informationen als K .

\triangleright Indem man ∇ mittels der Christoffel-Symbole ausdrückt, erhält man nach kurzer Rechnung die Formel

$$R_{lij}^k = \frac{\partial \Gamma_{jl}^k}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma_{il}^k}{\partial u^j} + \sum_{\alpha} \left(\Gamma_{jl}^{\alpha} \Gamma_{i\alpha}^k - \Gamma_{il}^{\alpha} \Gamma_{j\alpha}^k \right).$$

Da die Γ 's Kombinationen aus g sowie seinen ersten und zweiten Ableitungen sind, sieht man: R_{lij}^k ist ein Ausdruck in g und seinen ersten und zweiten Ableitungen.

\triangleright Kommen wir auf unsere Ausgangsfrage zurück: Was sind Bedingungen an g und h (außer Symmetrie und Definitheit), damit diese die erste und zweite Fundamentalform einer Hyperfläche bzgl. geeigneter Koordinaten sind?

Wir haben gezeigt, dass die Gauß-Gleichung eine *notwendige* Bedingung darstellt. Eine weitere *notwendige* Bedingung ergibt sich daraus, dass der Normalenanteil in Gleichung (III.1) verschwindet. Dies ist die **Codazzi-Meinardi-Gleichung**. In Koordinaten lautet sie

$$\sum_{\alpha} \left(\Gamma_{jl}^{\alpha} h_{i\alpha} - \Gamma_{il}^{\alpha} h_{j\alpha} \right) + \frac{\partial h_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial h_{il}}{\partial u^j} = 0$$

für alle i, j, l . Man kann zeigen, dass die Gauß- und die Codazzi-Meinardi-Gleichungen zusammen auch eine *hinreichende* Bedingung für die Existenz einer Hyperfläche darstellen (zumindest lokal), siehe z.B. das Differentialgeometrie-Buch von Kühnel.

Dies ist das Analogon des Hauptsatzes der Kurventheorie für Hyperflächen.

▷ Dass K eine Größe der inneren Geometrie ist, kann man, wie wir zeigen werden, auch sehr viel "geometrischer" einsehen. Auf dem Weg dorthin braucht man aber Formeln wie die oben angegebenen.

▷ Bisher hatten wir immer zuerst eine Größe geometrisch (koordinatenunabhängig) eingeführt und dann ihre Komponenten bzgl. lokaler Koordinaten betrachtet (z.B. bei g, W, II, ∇). Bei R haben wir bisher nur einen Ausdruck in lokalen Koordinaten, die R_{ij}^k .

Für eine koordinatenunabhängige Definition von R benötigt man den Begriff der Lie-Klammer zweier Vektorfelder. Dies wird in Kapitel IV.5 eingeführt. Dort wird auch der Begriff **Tensor** eingeführt und gezeigt, dass R ein Tensor ist. Daraus folgt dann insbesondere: Falls $R_{ij}^k = 0$ für alle k, l, i, j in einem Koordinatensystem gilt, so gilt es auch in jedem anderen Koordinatensystem.

(Vorsicht: ∇ ist zwar ebenfalls eine Größe der inneren Geometrie, aber es ist kein Tensor, und aus $\Gamma_{ij}^k = 0 \forall i, j, k$ in einem Koordinatensystem folgt nicht, dass dies in jedem anderen Koordinatensystem gilt. Übung: Berechnen Sie die Christoffelsymbole für Polarkoordinaten in \mathbb{R}^2 .)

▷ Aus dem Theorema Egregium folgt: Falls eine Fläche M flach ist, so muss $K \equiv 0$ sein. Denn wählt man lokale Karten so, dass $g_{ij} = \delta_{ij}$ ist, so sind alle $\Gamma_{ij}^k \equiv 0$ und damit auch $K \equiv 0$.

Allgemeiner ist für eine flache Untermannigfaltigkeit $R_{ij}^k \equiv 0$ für alle i, j, k, l . Dies folgt aus demselben Argument zusammen mit der vorigen Bemerkung.

Man kann zeigen, dass die Umkehrung auch gilt: Ist $R_{ij}^k(u) = 0$ für alle $u \in U$ und alle i, j, k, l (bzw. $K \equiv 0$ bei Flächen), so ist M flach. Für Flächen werden wir das im nächsten Abschnitt beweisen.

III.4. Parallelverschiebung und Geodätische

In diesem Abschnitt wollen wir versuchen, ∇ geometrisch zu verstehen. Dafür untersuchen wir, was es für Vektorfelder X, Y bedeutet, dass $\nabla_X Y = 0$ ist. Wir beobachten:

- ▷ Sei $M = \mathbb{R}^N$. Dann ist $\nabla_X^{\mathbb{R}^N} Y = 0$ für alle $X \in \mathcal{X}(M)$ genau dann, wenn Y konstant ist, d.h. alle Y_p zueinander parallel sind.
- ▷ Sei M eine Mannigfaltigkeit. Der Begriff "Y konstant" macht hier keinen Sinn, da Y_p für verschiedene p in verschiedenen Tangentialräumen liegen.

Wir werden sehen, dass es bei $n \geq 2$ kein $Y \in \mathcal{X}(M)$ mit $\nabla_X Y = 0$ für alle $X \in \mathcal{X}(M)$ gibt, wenn die Krümmung $K \neq 0$ ist. Daher betrachten wir "Konstanz" von Y ("Parallelität") nur entlang von Kurven.

III.4.1 Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit, $\gamma : I \rightarrow M$ eine parametrisierte Kurve. Ein **Vektorfeld entlang γ** ist eine glatte Abbildung, die jedem $t \in I$ ein $X_t \in T_{\gamma(t)}M$ zuordnet. X muss dabei nicht tangential an γ sein.

Beachten Sie, dass wir X hier als Funktion des Kurvenparameters t schreiben, nicht als Funktion von $\gamma(t)$ wie sonst bei Vektorfeldern üblich. Dies ist praktischer. Falls γ eine einfache Kurve ist - d.h. $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ für alle t und γ injektiv -, kann man X als Funktion von $\gamma(t)$ umschreiben. Hat γ Selbstschnitte, geht das im Allgemeinen nicht (denn es kann $X_{t_0} \neq X_{t_1}$ sein, selbst wenn $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$ ist).

Glattheit wird wie üblich mittels lokaler Karten definiert: Ist $X_t = \sum_i X^i(t) \partial_i$, so sollen die Funktionen X^i glatt sein. Äquivalent ist X aufgefasst als Abbildung $I \rightarrow \mathbb{R}^N$ glatt.

Schreibweise: Ist X ein Vektorfeld entlang einer Kurve γ , so sei

$$\nabla_{\dot{\gamma}}^{\mathbb{R}^N} X := \frac{dX}{dt}, \quad \nabla_{\dot{\gamma}} X := \text{Projektion von } \nabla_{\dot{\gamma}}^{\mathbb{R}^N} X \text{ auf } T_p M$$

mit $p = \gamma(t)$. Man schreibt auch $\frac{\nabla}{dt} X$ statt $\nabla_{\dot{\gamma}} X$ und nennt dies die **kovariante Ableitung von X entlang γ** .

Die Schreibweise $\nabla_{\dot{\gamma}} X$ ist sehr naheliegend und hat den Vorteil, dass sie den Bezug zur Kurve γ deutlich macht. Die Schreibweise $\frac{\nabla}{dt} X$ ist intuitiv, da es die Projektion von $\frac{d}{dt} X$ auf $T_p M$ ist.

III.4.2 Definition

Ein Vektorfeld X entlang einer Kurve $\gamma : I \rightarrow M$ heißt **parallel entlang γ** , falls $\nabla_{\dot{\gamma}} X = 0$ ist für alle $t \in I$.

Diese Definition ist sinnvoll, obwohl X nur auf γ und nicht in einer Umgebung davon definiert ist, denn es wird nur die Ableitung in Richtung $\dot{\gamma}$ genommen, siehe III.2.5.

Beispiel: \triangleright Für $M = \mathbb{R}^N$ ist X parallel entlang γ genau dann, wenn $\frac{dX}{dt} = 0$ für alle t , d.h. wenn X konstant ist.

\triangleright Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ beliebig. $\nabla_{\dot{\gamma}} X_t$ ist die orthogonale Projektion von $\nabla_{\dot{\gamma}}^{\mathbb{R}^N} X_t = \frac{dX}{dt}(t)$ auf $T_{\gamma(t)} M$. Also ist X parallel entlang γ , wenn $\frac{dX}{dt}(t)$ im \mathbb{R}^N orthogonal auf $T_{\gamma(t)} M$ steht. Das heißt also, $\frac{dX}{dt}$ ist innerhalb der Fläche "nicht zu sehen".

\triangleright Sei $M = S^2$ und γ der Äquator, nach Bogenlänge parametrisiert, X_t sei Einheits tangentenvektor $\dot{\gamma}(t)$ im Punkt $\gamma(t)$. Dann steht $\frac{dX}{dt}$ senkrecht auf γ (siehe Kapitel ??) und liegt wie der Äquator in der $x - y$ -Ebene, ist also orthogonal zu M . Demnach ist X parallel entlang γ .

Beachte: X_t und $X_{t'}$ sind dabei als Vektoren im \mathbb{R}^3 nicht parallel!

\triangleright Analoges gilt für jeden Großkreis, also Schnitte von S^2 mit Ebenen durch 0. Die Tangentenvektorfelder an andere Breitenkreise sind nicht parallel (Übung, werden wir aber auch später zeigen).

\triangleright Sei γ der Äquator wie eben und $X_t = (0, 0, 1)$ (senkrecht nach oben zeigend). Dann ist $\frac{dX}{dt} = 0$ für alle t , also ist X parallel.

Für $\nabla_{\dot{\gamma}} X$ gelten analoge Rechenregeln wie für die kovariante Ableitung, insbesondere für Vektorfelder X, Y entlang γ und eine Funktion h auf I die Produktregel

$$\nabla_{\dot{\gamma}}(hX) = \frac{dh}{dt} X + h \nabla_{\dot{\gamma}} X$$

und die Verträglichkeit mit der Metrik

$$\frac{d}{dt} g(X_t, Y_t) = g(\nabla_{\dot{\gamma}} X_t, Y_t) + g(X_t, \nabla_{\dot{\gamma}} Y_t)$$

(schreiben Sie beide Regeln in der $\frac{\nabla}{dt}$ -Notation, dann sind sie sehr leicht zu merken). Man kann Vektoren immer parallel verschieben:

III.4.3 Satz

Sei $\gamma : I \rightarrow M$ eine Kurve, $t_0 \in I$ und $v \in T_{\gamma(t_0)} M$. Dann gibt es genau ein paralleles Vektorfeld X entlang γ mit $X_{t_0} = v$.

Beweis: Wir zeigen, dass diese Aussage äquivalent zur Lösbarkeit eines Systems linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen ist.

Wir können annehmen, dass das Bild von γ in einer einzigen Koordinatenumgebung $U \subset M$ enthalten ist. Ist dies nicht der Fall, können wir Bild γ durch solche U überdecken und X Schritt für Schritt fortsetzen.

Sei $\varphi : \tilde{U} \rightarrow U$ eine lokale Karte. Schreibe $X = \sum_j X^j \partial_j$, $\dot{\gamma} = \sum_i a^i \partial_i$. Dabei ist $X^j = X^j(t)$ gesucht, $a^i = a^i(t)$ gegeben. Es gilt

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{\gamma}} \partial_j &= \nabla_{\sum_i a^i \partial_i} \partial_j \\ &= \sum_i a^i \nabla_{\partial_i} \partial_j \\ &= \sum_i a^i \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k \end{aligned}$$

und aus dieser Nebenrechnung folgt

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{\gamma}} X &= \sum_j \nabla_{\dot{\gamma}} (X^j \partial_j) \\ &= \sum_j \left(\frac{dX^j}{dt} \cdot \partial_j + X^j \cdot \nabla_{\dot{\gamma}} \partial_j \right) \\ &= \sum_k \left[\dot{X}^k + \sum_{i,j} X^j a^i \Gamma_{ij}^k \right] \partial_k. \end{aligned}$$

Also erhalten wir aufgrund der linearen Unabhängigkeit der ∂_k mit $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k(\gamma(t))$

$$\nabla_{\dot{\gamma}} X = 0 \Leftrightarrow \dot{X}^k + \sum_{i,j} X^j a^i \Gamma_{ij}^k = 0 \text{ für } k = 1, \dots, n.$$

Dies hat die Form

$$\begin{pmatrix} \dot{X}^1 \\ \vdots \\ \dot{X}^n \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix}$$

mit $A : I \rightarrow \mathcal{M}(n)$ glatt.

Der Satz über die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen linearer gDGL-Systeme sagt dann aus, dass dies zu gegebenem X_{t_0} genau eine Lösung hat, die auf ganz I definiert ist. \square

III.4.4 Definition

Sei $\gamma : I \rightarrow M$ eine glatte Kurve und $t_0, t_1 \in I$. Die **Parallelverschiebung** entlang γ von t_0 nach t_1 ist die Abbildung $P_{\gamma[t_0, t_1]} : T_{\gamma(t_0)}M \rightarrow T_{\gamma(t_1)}M$, die wie folgt definiert ist: Sei $v \in T_{\gamma(t_0)}M$. Sei X das eindeutige parallele Vektorfeld entlang γ mit $X_{t_0} = v$. Dann setze $P_{\gamma[t_0, t_1]}(v) = X_{t_1}$.

Falls $I = [t_0, t_1]$ ist, schreiben wir einfach $P_\gamma = P_{\gamma[t_0, t_1]}$.

Also kurz: $P_{\gamma[t_0, t_1]} : X_{t_0} \mapsto X_{t_1}$ mit X parallel.

III.4.5 Proposition

Für beliebige γ , t_0 und t_1 ist die Parallelverschiebung $P_{\gamma[t_0, t_1]}$ eine lineare, orthogonale Abbildung.

Das heißt, die Parallelverschiebung erhält Winkel und Längen. Sie erhält auch Orientierung (das wird unten eingeführt).

Beweis: Schreibe kurz $P_\gamma = P_{\gamma[t_0, t_1]}$. Das im letzten Beweis gefundene System von Differentialgleichungen ist linear, die Lösung hängt also linear von den Anfangswerten ab. Damit ist P_γ linear. Um zu zeigen, dass P_γ orthogonal ist, muss man $g(X_{t_0}, Y_{t_0}) = g(X_{t_1}, Y_{t_1})$ nachprüfen, für beliebige entlang γ parallele Vektorfelder X, Y . Es ist $\frac{d}{dt}g(X_t, Y_t) = g(\nabla_{\dot{\gamma}} X_t, Y_t) + g(X_t, \nabla_{\dot{\gamma}} Y_t) = g(0, Y_t) + g(X_t, 0) = 0$, da X und Y parallel entlang γ sind. \square

Beispiel: Sei γ ein Breitengrad auf einem Kegel, also ein Kreis mit konstantem Abstand zur Spitze. Bei einem vollen Durchlauf des Breitengrades dreht sich X unter Parallelverschiebung. γ ist eine geschlossene Kurve von p nach p und P_γ eine im Allgemeinen von der Identität verschiedene Rotation.

Beachte: Aus der (offensichtlichen) Parallelität der Vektoren links (im \mathbb{R}^2) dürfen wir auf die Parallelität der Vektoren auf dem Kegel rechts schließen, da die kovariante Ableitung und damit Parallelität ein Begriff der inneren Geometrie ist, also unter der Isometrie, φ erhalten bleibt.

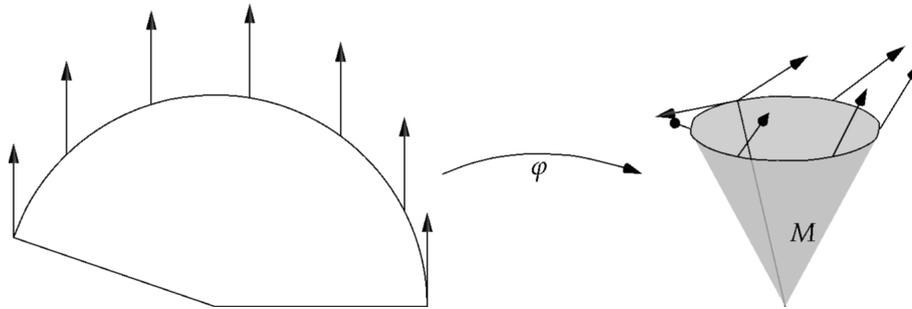


Abbildung III.2.: Parallelverschiebung entlang eines Kegel-Breitengrades

Bemerkung: \triangleright Parallelverschiebungen von $T_p M \rightarrow T_q M$ hängen im Allgemeinen vom Weg ab. Wenn γ_1 und γ_2 zwei verschiedene Wege von p nach q sind, ist normalerweise $P_{\gamma_1} \neq P_{\gamma_2}$.

\triangleright Wenn M und M' zwei Flächen sind, die sich entlang einer Kurve γ berühren, so ist Paralleltransport entlang γ in M derselbe wie der in M' . Denn $\nabla_\gamma X$ ist die Projektion von $\frac{dX}{dt}$ auf $T_{\gamma(t)} M = T_{\gamma(t)} M'$.

Die physikalische Bedeutung der Parallelität: Befestigt man einen Zeiger horizontal (d.h. tangential zu M) so an einem vertikalen Stab, dass er sich frei um diesen drehen kann, und bewegt den vertikalen Stab entlang X , so ist die Richtung des Zeigers parallel entlang γ .

Auch die Schwingungsrichtung des Foucaultschen Pendels wird bei der Erddrehung parallel verschoben.

Geodätische

Was bedeutet "geradeaus fahren" auf einer Fläche? Dass innerhalb der Fläche keine Richtungsänderung stattfindet!

III.4.6 Definition

Eine Kurve $\gamma : I \rightarrow M$ heißt **Geodätische**, falls

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$$

gilt, also falls $\dot{\gamma}$ parallel entlang γ ist.

In der alternativen Schreibweise heißt das $\frac{\nabla}{dt} \dot{\gamma} = 0$.

Bemerkung: Wegen $\nabla_{\dot{\gamma}(t)}^{\mathbb{R}^N} \dot{\gamma}(t) = \ddot{\gamma}(t)$ = Beschleunigung ist dies äquivalent dazu, dass die Beschleunigung im \mathbb{R}^N (also die momentane Änderung des Geschwindigkeitsvektors $\dot{\gamma}$) immer senkrecht auf M steht. Der tangentielle Anteil der Beschleunigung ist also gleich 0.

Beispiele:

Im \mathbb{R}^N ist $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = \ddot{\gamma}$, also ist γ Geodätische genau dann, wenn γ eine mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufene Gerade ist.

Wir haben im letzten Beispiel gesehen, dass jeder Großkreis auf S^2 mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen eine Geodätische ist. Wie wir sehen werden, sind dies auch die einzigen auf der Sphäre.

Bemerkung: Wenn γ eine Geodätische ist, dann ist $\|\dot{\gamma}\|$ konstant, da parallele Vektorfelder konstante Länge haben.

Bemerkung: Zur intrinsischen Bedeutung von Geodätischen:

- ▷ Ein Auto, das mit gerade gestelltem Lenkrad auf M fährt, fährt entlang einer Geodätischen. (Idealisiert, wenn wir den Radabstand als vernachlässigbar klein annehmen.)
- ▷ Ein Teilchen, das sich nur innerhalb von M bewegen kann und auf das keine Kräfte einwirken, bewegt sich entlang von Geodätischen. Dasselbe gilt für Lichtstrahlen, die sich innerhalb M ausbreiten.

Diese Interpretationen machen folgenden Satz plausibel:

III.4.7 Satz (Existenz und Eindeutigkeit von Geodätischen)

Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit, $p \in M$ und $v \in T_p M$. Dann gibt es genau eine maximale Geodätische $\gamma_{p,v} = \gamma : I \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = p$ und $\dot{\gamma}(0) = v$. Dabei ist $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $0 \in I$, der maximale Definitionsbereich. γ hängt glatt von t, p und v ab.

Beweis: Wir beweisen hier nur die Existenz auf einem Intervall $(-\epsilon, \epsilon)$ und Eindeutigkeit darauf für ein $\epsilon > 0$. Der Rest ist eine Übung.

Wir schreiben die Gleichung $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$ in lokalen Koordinaten, $\gamma(t) = \varphi(u^1(t), \dots, u^n(t))$ für die gesuchte Kurve γ und leiten ein Differentialgleichungssystem für $u^1(t), \dots, u^n(t)$ her:

Es gilt $\dot{\gamma} = \sum_i \dot{u}^i \partial_i$ nach der Kettenregel. Nach der Rechnung im Beweis zu Satz III.4.3 mit $a^i = \dot{u}^i$ und $X = \dot{\gamma}$, also $X^j = \dot{u}^j$ folgt

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0 \Leftrightarrow \ddot{u}^k + \sum_{i,j} \dot{u}^i \dot{u}^j \Gamma_{ij}^k(u) = 0 \quad \forall k.$$

Dies ist ein System von n (nicht-linearen) Differentialgleichungen zweiter Ordnung der Form $\ddot{u} = F(u, \dot{u})$. Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz hat dies eine eindeutige Lösung definiert in einer Umgebung von 0, wenn $\gamma(0)$ und $\dot{\gamma}(0)$ vorgegeben sind. Diese Lösung hängt nach dem Satz über die glatte Abhängigkeit von Lösungen von den Anfangswerten glatt von t, p und v ab. \square

Beispiele: ▷ Da bei $M = S^2$ durch jeden Punkt $p \in S^2$ und für jedes $v \in T_p S^2$ ein Großkreis durch p mit Richtung v existiert und da Großkreise Geodätische sind, sind dies auch sämtliche Geodätischen. Sie sind für alle Zeiten definiert, also $I = \mathbb{R}$.

- ▷ Wenn M eine beschränkte offene Teilmenge des \mathbb{R}^N ist, sind Geodätischen Geraden und Punkte. Da Geraden nach endlicher Zeit den Rand treffen, sind sie nur für ein endliches Intervall I , das von p und v abhängt, definiert.

Frage: Ein Schiff fährt in Irland los in Richtung Westen und dann immer nur geradeaus. Wo trifft es wieder auf Land, wenn es keine Strömungen und Winde gibt?

Bemerkung: ▷ Falls M kompakt ist, sind Geodätische für alle Zeiten definiert.

- ▷ Sei γ Geodätische in einer Fläche M . Ein Vektorfeld X ist parallel entlang γ genau dann, wenn $\|X\|$ und der Winkel zwischen X und $\dot{\gamma}$ konstant sind (Übung).

Die intrinsische Bedeutung von Geodätischen folgt neben den angeführten Argumenten auch aus

III.4.8 Satz

Kürzeste Linien sind Geodätische, d.h. seien $p, q \in M$ gegeben und γ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve von p nach q . Angenommen, für jede andere Kurve $\tilde{\gamma}$ von p nach q gilt $L[\tilde{\gamma}] \geq L[\gamma]$. Dann ist γ eine Geodätische.

Beweis: Sei $\gamma : [0, L] \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma(L) = q$. Wir betrachten "Variationen" von γ , d.h. Scharen von regulären Kurven $\gamma_s : [0, L] \rightarrow M$, $s \in (-\epsilon, \epsilon)$, die auch p und q miteinander verbinden, mit $\gamma_0 = \gamma$.

Wir schreiben $\gamma(s, t) = \gamma_s(t)$ und nehmen an, dass γ glatt in (s, t) ist. Von jetzt an verwenden wir die Bezeichnung γ für $\gamma(s, t)$ und γ_0 für die gegebene Kurve. Wir schreiben $\dot{\gamma} = \frac{\partial \gamma}{\partial t}$ und $\gamma' = \frac{\partial \gamma}{\partial s}$.

Es ist $L[\gamma_s] = \int_0^L \sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})} dt$. (Beachte: γ_s muss nicht nach Bogenlänge parametrisiert sein.)

Der Integrand ist glatt in s , also ist $s \mapsto L[\gamma_s]$ eine glatte Funktion. Nach Annahme hat sie ein Minimum bei $s = 0$, also folgt $\frac{d}{ds}|_{s=0} L[\gamma_s] = 0$. Wir berechnen diese Ableitung.

Wie bei lokalen Karten folgt aus $\frac{\partial^2 \gamma}{\partial s \partial t} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t \partial s}$ und aus $\nabla_{\gamma'} \dot{\gamma} = \nabla_{\frac{\partial \gamma}{\partial t}} \frac{\partial \gamma}{\partial s} =$ normaler Anteil von $\frac{\partial^2 \gamma}{\partial s \partial t}$, dass $\nabla_{\frac{\partial \gamma}{\partial s}} \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \nabla_{\frac{\partial \gamma}{\partial t}} \frac{\partial \gamma}{\partial s}$ gilt, also $\nabla_{\gamma'} \dot{\gamma} = \nabla_{\dot{\gamma}} \gamma'$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) &= 2 \cdot g(\nabla_{\gamma'} \dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \\ &= 2 \cdot g(\nabla_{\dot{\gamma}} \gamma', \dot{\gamma}) \\ &= 2 \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} g(\gamma', \dot{\gamma}) - g(\gamma', \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}) \right). \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\frac{\partial}{\partial s} \sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})} = \frac{\frac{\partial}{\partial s} g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})}{2\sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})}}.$$

Wir werten die Ableitung bei $s = 0$ aus. Wegen $\|\dot{\gamma}_0\| = 1$ ist die Wurzel im Nenner = 1.

Insgesamt ergibt sich

$$\frac{d}{ds}|_{s=0} L[\gamma_s] = \int_0^L \left[\frac{\partial}{\partial t} g(\gamma'_{|s=0}, \dot{\gamma}_0) - g(\gamma'_{|s=0}, \nabla_{\dot{\gamma}_0} \dot{\gamma}_0) \right] dt.$$

Das Integral über den ersten Term ist gleich Null, denn er ist gleich $g(\gamma', \dot{\gamma}_0)|_{t=0}^{t=L}$, und wegen $\gamma_s(0) = p$ und $\gamma_s(L) = q$ für alle s ist $\gamma' = 0$ für $t = 0$ und für $t = L$ (und beliebige s).

Es bleibt also

$$\frac{d}{ds}|_{s=0} L[\gamma_s] = - \int_0^L g(\gamma'_{|s=0}, \nabla_{\dot{\gamma}_0} \dot{\gamma}_0) dt$$

Diese Formel heißt **erste Variation der Länge**.

$X := \gamma'_{|s=0}$ ist ein Vektorfeld entlang γ . Nun war aber γ_s frei wählbar, und zu jedem Vektorfeld X entlang γ mit $X_0 = 0$ und $X_L = 0$ gibt es eine Schar γ_s mit $\gamma'_{|s=0} = X$. Damit folgt die Behauptung aus folgendem Lemma mit $Y = \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}$: \square

III.4.9 Lemma

Sei Y ein Vektorfeld entlang $\gamma : [0, L] \rightarrow M$. Angenommen für jedes Vektorfeld X entlang γ mit $X_0 = X_L = 0$ gilt

$$\int_0^L g(X_t, Y_t) dt = 0.$$

Dann ist $Y_t = 0$ für alle t .

Beweis: Analog zur entsprechenden Aussage über Funktionen: Falls $Y_{t_0} \neq 0$ für ein $t_0 \in (0, L)$ ist, so wählen wir eine glatte Funktion $\rho : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\rho(t) \geq 0$ für alle t , $\rho(0) = \rho(L) = 0$ und $\rho(t_0) > 0$. Weiter setzen wir $X_t = \rho(t)Y_t$. Dann ist $g(X_t, Y_t) = \rho(t)\|Y\|^2 \geq 0$ und für $t = t_0$ sogar > 0 , also $\int g(X_t, Y_t) dt > 0$, was ein Widerspruch ist. \square

Die Formel für die erste Variation der Länge ist auch für Kurven γ_0 interessant, die keine Geodätischen sind. Beispielsweise gilt in der Ebene $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = \ddot{\gamma} =$ Beschleunigung (zeigt ins "Innere" der Kurve). Die Formel sagt dann: Verschiebt man γ in Richtung $\dot{\gamma}$, so nimmt die Länge ab.

Frage: Gilt auch die Umkehrung, sind also Geodätischen immer kürzeste Verbindungen?

Im Allgemeinen nicht, wie man leicht am Beispiel der Sphäre erkennen kann: Liegen p und q nahe beieinander, so kann man von p nach q entweder den kurzen oder den langen Weg ("hintenherum") auf dem Großkreis gehen; der lange Weg ist eine Geodätische, aber bestimmt nicht der kürzeste Weg.

Lokal ist die Antwort aber "Ja". Genauer gilt:

III.4.10 Satz

Sei M eine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^N . Jeder Punkt $p \in M$ hat eine Umgebung U mit

- ▷ zu je zwei Punkten $q, q' \in U$ gibt es genau eine Geodätische von q nach q' , die in U verläuft.
- ▷ Diese ist der kürzeste Weg von q nach q' unter allen Wegen in M .

Zum Beweis siehe Bücher zur Riemannschen Geometrie. Auf der Sphäre kann man für U irgendeine Kreisscheibe mit Radius $< \frac{\pi}{2}$ wählen (also enthalten in einer Halbsphäre).

Orientierung, Holonomiewinkel und geodätische Krümmung

Die bisherigen Überlegungen dieses Abschnitts galten in beliebigen Dimensionen. Nun beschränken wir uns auf Flächen.

Wir erinnern uns an den Anfang der Vorlesung, also Kurven in der Ebene, und wollen die Überlegungen dort auf Kurven in einer Fläche M verallgemeinern.

Insbesondere hatten wir für $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Krümmung definiert. Sei c nach Bogenlänge parametrisiert. Dann war die Krümmung $\kappa \in \mathbb{R}$ definiert durch $|\kappa| = \|\ddot{c}\|$ und $\kappa > 0$, wenn \ddot{c} in Richtung n zeigt, wobei n die Drehung von $T = \dot{c}$ um $+\frac{\pi}{2}$ war, sonst $\kappa < 0$. (Wir schreiben hier n statt N , um diese Normale nicht mit der Flächennormalen zu verwechseln.)

Kurz: κ ist durch $\ddot{c} = \kappa n$ definiert.

Das Vorzeichen wird später sehr wichtig sein, daher überlegen wir uns für eine Fläche M zunächst, was "Drehung um $+\frac{\pi}{2}$ " bedeutet. Beachte: Eine Drehung um $+\frac{\pi}{2}$ von oben betrachtet ist eine Drehung um $-\frac{\pi}{2}$ von unten betrachtet.

Eine Festlegung, was "positiver Drehsinn" bedeutet, hängt also damit zusammen, von welcher Seite man auf M schaut, also mit der Wahl eines (Einheits-)Normalenvektors auf M .

III.4.11 Definition

Sei (M, N) eine orientierte Fläche, also N ein glattes Einheitsnormalenvektorfeld auf M . Sei $p \in M$. Eine Basis (e_1, e_2) von $T_p M$ heißt **positiv orientiert**, wenn die Basis (e_1, e_2, N) des \mathbb{R}^3 positiv orientiert, also $\det(e_1, e_2, N) > 0$ ist. Andernfalls heißt sie negativ orientiert.

Bemerkung: ▷ $\det(e_1, e_2, N) > 0$ entspricht der "Rechten-Hand-Regel" mit $e_1 =$ Daumen, $e_2 =$ Zeigefinger und $N =$ Mittelfinger der rechten Hand.

- ▷ Rotiert man e_1, e_2 gemeinsam, ändert sich die Orientierung nicht. Ist (e_1, e_2) positiv orientiert, so ist $(e_1, -e_2)$ negativ orientiert.
- ▷ Winkel in $T_p M$ werden immer "von e_1 in Richtung e_2 " gemessen, wenn (e_1, e_2) eine positive Basis ist.
- ▷ Wenn eine Orientierung gegeben ist, dann ist der Begriff "Rotation um den Winkel α " für jeden Tangentialraum wohldefiniert: Man wähle eine positive Orthonormalbasis (e_1, e_2) und definiere $R_\alpha : T_p M \rightarrow T_p M$ durch $e_1 \mapsto e_1 \cos \alpha + e_2 \sin \alpha$ und $e_2 \mapsto e_1 \sin \alpha + e_2 \cos \alpha$. Dies hängt nicht von der Wahl von e_1 und e_2 ab.

Eine Orientierung auf einer Fläche M erlaubt uns, den wichtigen Begriff des Holonomiewinkels zu definieren. Ist γ eine Kurve in M von p nach q , so ist die Parallelverschiebung P_γ **orientierungserhaltend**, d.h. für jede positiv orientierte Basis (e_1, e_2) von $T_p M$ ist die Basis $(P_\gamma(e_1), P_\gamma(e_2))$ von $T_q M$ positiv orientiert. Denn sind X, Y die parallelen Vektorfelder entlang γ , die bei p gleich e_1 bzw. e_2 sind, so ist die Funktion $t \mapsto \det(X_t, Y_t, N_{\gamma(t)})$ stetig und immer ungleich Null, wechselt also nie das Vorzeichen.

Ist insbesondere $p = q$, so ist P_γ daher eine Drehung von $T_p M$. (Für nicht-orientierbare Flächen stimmt das nicht, überlegen Sie sich das für das Möbiusband!)

III.4.12 Definition (Holonomie)

Sei M eine orientierte Fläche und $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ eine Kurve mit $\gamma(a) = \gamma(b) =: p$. Die durch Parallelverschiebung entlang γ definierte lineare Abbildung

$$P_\gamma : T_p M \rightarrow T_p M$$

heißt **Holonomie** von γ . Dies ist eine Drehung um einen Winkel θ . Der Winkel θ heißt **Holonomiewinkel** von γ .

Der Holonomiewinkel ist nur bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π definiert, sollte also als Element von $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ aufgefasst werden. Dreht man die Durchlaufrichtung der Kurve oder die Orientierung von M um, ändert der Holonomiewinkel sein Vorzeichen (Übung).

Zum Beispiel ist für Kurven in der Ebene der Holonomiewinkel immer Null.

III.4.13 Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche mit Orientierung N . Sei $\gamma : I \rightarrow M$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve und $t \in I$. Wähle $n \in T_{\gamma(t)} M$ derart, dass $(\dot{\gamma}, n)$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis ist. Die **geodätische Krümmung** $\kappa_g \in \mathbb{R}$ von γ in t ist definiert durch

$$\frac{\nabla}{dt} \dot{\gamma} = \kappa_g \cdot n.$$

Es gilt $\kappa_g = g\left(\frac{\nabla}{dt} \dot{\gamma}, n\right)$.

Bemerkung: ▷ Wegen $\|\dot{\gamma}\|^2 = g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 1$ für alle t ist $0 = \frac{d}{dt} g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 2g\left(\frac{\nabla}{dt} \dot{\gamma}, \dot{\gamma}\right)$, also ist $\frac{\nabla}{dt} \dot{\gamma} \perp \dot{\gamma}$. Da außerdem $\frac{\nabla}{dt} \dot{\gamma} \in T_{\gamma(t)} M$ ist, muss $\frac{\nabla}{dt} \dot{\gamma}$ ein skalares Vielfaches von n sein. Daher macht die Definition Sinn.

- ▷ Zusammenhang von Krümmung κ als Kurve im Raum, geodätischer Krümmung κ_g und Normalkrümmung κ_n : Es gilt
 - $|\kappa_g| = \|\text{orthogonale Projektion von } \ddot{\gamma} \text{ auf } T_p M\|$ (nach Definition von ∇)
 - $\kappa_n = \|\text{orthogonale Projektion von } \ddot{\gamma} \text{ auf } N(p)\|$
 - $\kappa = \|\ddot{\gamma}\|$

Nach Pythagoras gilt $\kappa^2 = \kappa_g^2 + \kappa_n^2$. Beachte: κ_n sagt etwas über die Krümmung der Fläche im Raum, κ_g etwas über die Krümmung der Kurve in der Fläche aus!

- ▷ γ ist eine Geodätische genau dann, wenn überall $\kappa_g = 0$ gilt und genau dann, wenn $\dot{\gamma}$ überall kollinear mit N ist.
- ▷ κ_g ist eine Größe der inneren Geometrie, da ∇ es ist.

Bedeutung der geodätischen Krümmung als Richtungsänderung, Beziehung zum Holonomiewinkel

Im \mathbb{R}^2 hatten wir gesehen, dass $\kappa = \dot{\alpha}$ gilt, wenn α der (in stetiger Weise bestimmte) Winkel zwischen $\dot{\gamma}$ und der x -Achse ist. Bei der Verallgemeinerung auf Flächen tritt das Problem auf, dass es keine Referenzrichtung wie die x -Achse gibt. Wir werden nun sehen, dass man diese Referenzrichtung durch ein paralleles Vektorfeld ersetzen kann.

Wir formulieren dies etwas allgemeiner, dies wird beim Beweis des Satzes von Gauß-Bonnet nützlich sein. Ein **orthogonaler Rahmen** entlang einer Kurve γ in einer Fläche ist ein Paar von Vektorfeldern (e_1, e_2) entlang γ , so dass $(e_1(t), e_2(t))$ für jedes t eine Orthonormalbasis ist. Ist M orientiert, so heißt der Rahmen positiv orientiert, falls $(e_1(t), e_2(t))$ für ein und damit jedes t positiv orientiert ist.

III.4.14 Lemma (Formel für die Drehung eines orthogonalen Rahmens)

Sei (M, N) eine orientierte Fläche. Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ eine Kurve und (e_1, e_2) ein positiv orientierter orthogonaler Rahmen entlang γ .

- (1) Sei $X \neq 0$ ein paralleles Vektorfeld entlang γ und $\alpha(t)$ der Winkel von X_t nach $e_1(t)$. Dann gilt

$$\frac{\nabla}{dt} e_1 = \dot{\alpha} e_2$$

und damit $\dot{\alpha} = g\left(\frac{\nabla}{dt} e_1, e_2\right)$.

- (2) Sei $\gamma(a) = \gamma(b)$ und $e_1(a) = e_1(b)$. Dann gilt

$$\int_a^b g\left(\frac{\nabla}{dt} e_1, e_2\right) dt \equiv -\theta \pmod{2\pi},$$

wobei θ der Holonomiewinkel entlang γ ist.

Beweis: (1) O.B.d.A. sei $\|X\| = 1$. Sei Y das Vektorfeld entlang γ , das durch Drehung um $+\frac{\pi}{2}$ aus X entsteht. Dann ist Y ebenfalls parallel entlang γ . (Beweis als Übung.)

Es ist (Skizze!)

$$e_1 = \cos \alpha X + \sin \alpha Y, \quad e_2 = -\sin \alpha X + \cos \alpha Y.$$

Leitet man e_1 kovariant nach t ab und verwendet die Parallelität von X, Y , erhält man

$$\frac{\nabla}{dt} e_1 = -\dot{\alpha} \sin \alpha X + \dot{\alpha} \cos \alpha Y = \dot{\alpha} e_2.$$

Nimmt man das Skalarprodukt mit e_1 , folgt $\dot{\alpha} = g\left(\frac{\nabla}{dt} e_1, e_2\right)$.

- (2) Wähle ein paralleles Vektorfeld X entlang γ und definiere α wie in (1). Durch Integration von $\dot{\alpha} = g\left(\frac{\nabla}{dt} e_1, e_2\right)$ über $[a, b]$ folgt $\alpha(b) - \alpha(a) = \int_a^b g\left(\frac{\nabla}{dt} e_1, e_2\right) dt$. Da $\alpha(a)$ der Winkel von X_a zu $e_1(a)$ und $\alpha(b)$ der Winkel von X_b zu $e_1(b)$ ist und $e_1(a) = e_1(b)$ gilt, ist $\alpha(b) - \alpha(a)$ der Winkel von X_b zu X_a , also das Negative des Holonomiewinkels: $\theta \equiv \alpha(a) - \alpha(b)$. \square

Daraus folgt:

III.4.15 Proposition (Geodätische Krümmung als Winkeländerung zu parallelem Vektorfeld)

Sei γ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve in der orientierten Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$.

(1) Sei X ein paralleles Vektorfeld entlang γ . Sei $\alpha(t)$ der Winkel von X_t nach $\dot{\gamma}(t)$. Dann gilt

$$\kappa_g = \dot{\alpha}.$$

(2) Die Kurve γ sei geschlossen. Dann gilt für den Holonomiewinkel

$$\theta \equiv - \int_a^b \kappa_g(t) dt \pmod{2\pi}$$

Beweis: Setze $e_1(t) = \dot{\gamma}(t)$ und $e_2(t) = n(t)$, dann ist $g\left(\frac{\nabla}{dt}e_1, e_2\right) = g\left(\frac{\nabla}{dt}\dot{\gamma}, n\right) = \kappa_g$. Also folgt $\dot{\alpha} = \kappa_g$ aus Lemma III.4.14(1). Ist γ geschlossen, so gilt $\gamma(a) = \gamma(b)$ und $\dot{\gamma}(a) = \dot{\gamma}(b)$, also folgt (2) aus Teil (2) des Lemmas. \square

Für $M = \mathbb{R}^2$ und $X = (1, 0)$ ergibt sich $\kappa = \dot{\alpha}$ wie vorher.

Bemerkung: Bei der Definition des Holonomiewinkels genügt es, dass $\gamma(a) = \gamma(b)$ ist (die Kurve braucht nicht geschlossen zu sein, Anfang und Ende dürfen einen Winkel $\neq 0$ bilden). Für die Formel mittels der geodätischen Krümmung muss zusätzlich $\dot{\gamma}(a) = \dot{\gamma}(b)$ sein.

Orthogonale Koordinaten und Normalkoordinaten bezüglich einer Kurve

Geodätische kann man dazu verwenden, Koordinatensysteme (d.h. lokale Karten) zu konstruieren, in denen die erste Fundamentalform eine besonders einfache Gestalt hat. Dies ist nützlich, da dann die Rechnungen mit den komplizierten Gleichungen (z.B. für Christoffel-Symbole und Krümmung) vereinfacht werden.

Im Folgenden bezeichnen wir die Koordinaten in \mathbb{R}^2 mit u und v (statt u^1, u^2). Statt der Indizes 1 und 2 schreiben wir dann oft u und v . Z.B.: Ist φ eine lokale Karte, so schreiben wir $\partial_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u}$ und $\partial_v = \frac{\partial \varphi}{\partial v}$. Statt $g_{11} = g(\partial_1, \partial_1)$ schreiben wir $g_{uu} = g(\partial_u, \partial_u)$ usw.

III.4.16 Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}^3$. Eine lokale Karte $\varphi: \tilde{U} \rightarrow U \subset M$ heißt **orthogonal**, falls überall $\frac{\partial \varphi}{\partial u} \perp \frac{\partial \varphi}{\partial v}$ gilt. Mit anderen Worten: Die durch φ definierten Koordinatenlinien schneiden sich rechtwinklig.

Man nennt dann die durch die Karte definierten Koordinaten **orthogonale Koordinaten**.

Beispiel (Rotationsfläche): Die Fläche, die entsteht, wenn man eine beliebige Funktion f um die z -Achse rotieren lässt, kann durch die Karte $\varphi(\theta, z) = (f(z) \cos \theta, f(z) \sin \theta, z)$ beschrieben werden. Dabei entspricht $\theta = \text{konstant}$ den Meridianen und $z = \text{konstant}$ den Breitenkreisen. Es gilt $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \perp \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ (Übung).

Orthogonalität von φ bedeutet, dass $g_{uv} = 0$ überall auf \tilde{U} gilt, d.h., dass die erste Fundamentalform die Gestalt

$$g = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}$$

hat.

Mit den beim Beweis des Theorema Egregium hergeleiteten Formeln kann man berechnen:

III.4.17 Lemma

Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche, $\varphi: \tilde{U} \rightarrow U$ eine orthogonale lokale Karte. Die Gauß-Krümmung ist dann

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial E / \partial v}{\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial G / \partial u}{\sqrt{EG}} \right) \right].$$

Beweis: Übung! □

Wir wollen zeigen, dass es immer orthogonale Koordinaten gibt. Diese (und sogar sehr spezielle) erhält man wie folgt.

Im Folgenden sagen wir kurz **BL-Geodätische** statt ‚nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische‘. Da jede Geodätische konstante Geschwindigkeit hat, gilt: Ist γ Geodätische und gilt $\|\dot{\gamma}(t_0)\| = 1$ für ein t_0 , so ist γ eine BL-Geodätische.

III.4.18 Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle, $0 \in I$, $\tilde{U} = I \times J$ und $\varphi : \tilde{U} \rightarrow U \subset M$ eine lokale Karte. Sei $c : J \rightarrow M$ die durch $u = 0$ gegebene Kurve, d.h. $c(v) = \varphi(0, v)$.

Die durch φ gegebenen lokalen Koordinaten heißen **Normalkoordinaten bzgl. c** , wenn gilt:

Für jedes v ist die durch $\gamma_v(u) = \varphi(u, v)$ definierte Kurve
eine BL-Geodätische, die c orthogonal schneidet.

Falls c ebenfalls eine BL-Geodätische ist, so nennt man diese Koordinaten **Fermi-Koordinaten**.

Beachten Sie, dass wir hier von Normalkoordinaten bezüglich einer Kurve sprechen. Der Begriff Normalkoordinaten bezeichnet ein Koordinatensystem, bei dem die Kurven $t \mapsto \varphi(tu, tv)$ für beliebige u, v Geodätische sind. Diese sind in anderen Kontexten nützlich, wir brauchen sie hier nicht.

III.4.19 Lemma

Seien Normalkoordinaten auf $U \subset M$ bezüglich einer regulären Kurve c gegeben. Dann gilt in U :

$$(1) \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}$$

für eine positive Funktion R auf \tilde{U} . Insbesondere sind die Koordinaten orthogonal.

$$(2) \quad \nabla_{\partial_u} \partial_u = 0$$

$$(3) \quad \nabla_{\partial_u} \partial_v = \frac{\partial_u R}{R} \partial_v$$

$$(4) \quad K = -\frac{\partial_u^2 R}{R} \quad (\text{Gauß-Krümmung})$$

(5) Falls c eine BL-Geodätische ist, so gilt

$$R = 1, \quad \partial_u R = 0 \quad \text{bei } u = 0.$$

Hierbei bezeichnen $\partial_u R$ usw. die partiellen Ableitungen. Wichtig: (1)-(4) gelten auf ganz U , (5) nur bei $u = 0$ (d.h. entlang c).

Bemerkung: Ein Spezialfall sind Rotationsflächen im \mathbb{R}^3 , wobei c ein Breitenkreis und die γ_v die Meridiane sind. Nimmt man als v die Winkelkoordinate, so lässt sich eine Rotationsfläche als

$$M = \{\varphi(u, v) : v \in [0, 2\pi], u \in I\}, \quad \varphi(u, v) = (R(u) \cos v, R(u) \sin v, h(u))$$

schreiben, wobei $u \mapsto (R(u), h(u))$ die nach BL parametrisierte ‚Profilkurve‘ der Rotationsfläche ist. Hierbei ist $R(u)$ der Radius des Breitenkreises von M beim Parameterwert u .

In diesem Fall hängt R nicht von v ab (das macht gerade die Rotationsinvarianz von M aus). Für allgemeines M kann aber R von u und v abhängen.

Beweis: Einige der Aussagen sind direkt geometrisch klar (Definition von BL oder von Geodätische), andere erschließen sich erst nach nicht-trivialer Rechnung:

(2) Wegen $\partial_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \dot{\gamma}_v$ ist das die Aussage, dass γ_v eine Geodätische ist.

(1) Es ist $g_{uu} = 1$ und $g_{uv} = 0$ auf U zu zeigen, dann setzt man $R = \sqrt{g_{vv}}$.

Zunächst ist $g_{uu} = g(\partial_u, \partial_u) = \|\dot{\gamma}_v\|^2 = 1$, da γ_v nach BL parametrisiert ist.

Die Aussage $g_{uv} = 0$ ist weniger trivial. Für $u = 0$ gilt dies, da sich per Definition die Kurven c und γ_v orthogonal schneiden. Für beliebige u ist $2\Gamma_{uu,v} = \frac{\partial g_{uv}}{\partial u} + \frac{\partial g_{uv}}{\partial u} - \frac{\partial g_{uu}}{\partial v}$. Wegen (2) und $g_{uu} \equiv 1$ folgt daraus $\frac{\partial g_{uv}}{\partial u} = 0$ auf U . Damit folgt die Behauptung durch Integration: Fixiere v und setze $f(u) = g_{uv}(u, v)$. Dann haben wir $f(0) = 0$ und $f'(u) = 0$ für alle u . Daraus folgt $f(u) = 0$ für alle u .

(3) Übung.

(4) Dies folgt aus Lemma (III.4.17), oder einfacher mittels direkter Rechnung.

(5) Aus $R = \sqrt{g(\partial_v, \partial_v)}$ folgt $R = 1$ bei $u = 0$, da c nach BL parametrisiert ist.

Da c Geodätische ist, ist $\nabla_{\partial_v} \partial_v = 0$ bei $u = 0$, also

$$0 = \partial_v g(\partial_u, \partial_v) = g(\nabla_{\partial_v} \partial_u, \partial_v) + g(\partial_v, \nabla_{\partial_v} \partial_v) = g(\nabla_{\partial_v} \partial_u, \partial_v),$$

und wegen $\nabla_{\partial_v} \partial_u = \nabla_{\partial_u} \partial_v$ folgt aus (3), dass $\partial_u R = 0$ ist (alles bei $u = 0$). \square

Bemerkung: Die Gleichung $g_{uv} \equiv 0$ hat eine interessante geometrische Bedeutung: Sei die Kurve c gegeben: Für $s > 0$ sei c_s die Parallelkurve zu c im Abstand s , d.h. $c_s(v) = \gamma_v(s)$, der Punkt, den man erreicht, wenn man von $c(v)$ aus orthogonal entlang einer Geodäte die Strecke s läuft. $g_{uv} \equiv 0$ sagt dann, dass c_s überall orthogonal zu den Kurven γ_v ist. Für einen Kreis c in der Ebene ist dies klar (c_s ist ein konzentrischer Kreis mit anderem Radius), dass dies auch für beliebige Kurven c gilt, ist weniger offensichtlich, selbst für $M = \mathbb{R}^2$.

Bemerkung: Wir haben damit insbesondere gezeigt, dass lokal immer orthogonale Koordinaten existieren. Denn sei $p \in M$. Wähle eine reguläre Kurve c durch p , finde die Geodätischen γ_v und definiere damit φ . Da c und γ_v bei p orthogonal sind, ist $d\varphi$ bei p injektiv, also definiert es eine lokale Karte für eine Umgebung von p .

Wann ist eine Fläche flach?

Wir können nun einen der zentralen Sätze der Differentialgeometrie von Flächen beweisen.

III.4.20 Satz

Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche und K ihre Gauß-Krümmung. Dann gilt:

$$M \text{ ist flach} \iff K \equiv 0$$

Erinnerung: 'flach' bedeutet lokal isometrisch zu einer Teilmenge von \mathbb{R}^2 , oder äquivalent, dass es überall lokal eine Karte gibt, in der $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt.

Beweis: Sei M flach. Da M lokal isometrisch zu \mathbb{R}^2 ist, \mathbb{R}^2 die Gauß-Krümmung null hat und die Gauß-Krümmung unter Isometrien erhalten bleibt (Theorema egregium), folgt $K \equiv 0$.

Sei umgekehrt $K \equiv 0$. Wir zeigen, dass Fermi-Koordinaten eine lokale Isometrie zu $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^2$ geben. Da wir schon wissen, dass in Fermi-Koordinaten $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$ ist, bleibt nur zu zeigen, dass $G \equiv 1$ gilt.

Fixiere v und betrachte die Funktion $f(u) = R(u, v)$. Nach Lemma III.4.19 (5) ist $f(0) = 1, f'(0) = 0$, und nach Lemma III.4.19 (4) folgt aus $K \equiv 0$, dass $f''(u) = 0$ für alle u ist. Diese Differentialgleichung hat mit den Anfangsbedingungen $f(0) = 1, f'(0) = 0$ die eindeutige Lösung $f(u) = 1 \forall u$. Also ist $R \equiv 1$. \square

Bemerkung: Ein analoger Satz gilt in höheren Dimensionen: Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit ist flach genau dann, wenn ihr Riemannscher Krümmungstensor konstant gleich null ist. Siehe Satz IV.7.2.

Praktisch bedeutet dies, dass man entscheiden kann, ob eine Fläche M flach ist, d.h. ob sie einen Atlas aus verzerrungsfreie Karten besitzt, indem man K berechnet. Dabei kann man K entweder mit Hilfe der ersten Fundamentalform berechnen (erst die Christoffelsymbole mit den Formeln $\Gamma_{ij}^k = \sum_l g^{kl} \Gamma_{ij,l}$ und $\Gamma_{ij,l} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} \right)$ berechnen, dann R_{121}^k mit der Formel $R_{lij}^k = \frac{\partial \Gamma_{jl}^k}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma_{il}^k}{\partial u^j} + \sum_{\alpha} \left(\Gamma_{ji}^{\alpha} \Gamma_{i\alpha}^k - \Gamma_{il}^{\alpha} \Gamma_{j\alpha}^k \right)$, dann $R_{2121} = \sum_k g_{2k} R_{121}^k$ und $K = \frac{R_{2121}}{\det(g_{ij})_{ij}}$).

Je nachdem, wie die Fläche gegeben ist, kann es allerdings einfacher sein, statt dem Weg über die innere Geometrie die extrinsische Größe h zu verwenden. Dann braucht man nur $\det h$ zu berechnen. Wegen $K = \frac{\det h}{\det g}$ ist M flach genau dann, wenn $\det h \equiv 0$ ist.

III.5. Der Satz von Gauß-Bonnet

Wir werden einige erstaunliche Beziehungen zwischen Integralen von Gaußscher Krümmung einer Fläche, geodätischer Krümmung von Kurven in der Fläche und "topologischen Invarianten" der Fläche kennenlernen. Als Nebenprodukt der Rechnungen erhalten wir auch eine hübsche intrinsische Charakterisierung der Gaußkrümmung (III.5.6).

Frage: Gilt der Hopfsche Umlaufsatz (Satz I.4.5) auch für geschlossene Kurven in einer Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$, wenn man κ durch κ_g ersetzt?

Im Allgemeinen nicht, z.B. gilt für den Äquator einer Sphäre $\kappa_g = 0$, also auch $\int \kappa_g = 0 \neq 2\pi$.

III.5.1 Definition

Eine beschränkte, zusammenhängende Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^2$ mit stückweise glattem Rand heißt **einfach zusammenhängend**, wenn ihr Rand Bild einer geschlossenen Kurve ist.

Die Kurve ist dann natürlich stückweise glatt. Also ist z.B. eine Kreisscheibe einfach zusammenhängend, der Kreisring $\{u \in \mathbb{R}^2 : 1 < \|u\| < 2\}$ aber nicht. Der Begriff einfach zusammenhängend ist auch für beliebige topologische (insbesondere metrische) Räume X definiert, die Definition lautet aber anders (jede geschlossene Kurve in X lässt sich in X stetig zu einer konstanten Kurve – also einem Punkt – zusammenziehen). Im oben angegebenen Spezialfall ist sie zu der angegebenen Bedingung äquivalent, und diese Bedingung werden wir verwenden.

III.5.2 Satz (Lokale Version des Satzes von Gauß-Bonnet, glatter Fall)

Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte Fläche, $\varphi : \tilde{U} \rightarrow U$ Normalkoordinaten bzgl. einer Kurve, $\tilde{V} \subset \tilde{U}$ beschränkt und einfach zusammenhängend mit glattem Rand, $V = \varphi(\tilde{V})$. Dann gilt

$$\int_{\partial V} \kappa_g ds + \int_V K d\text{vol} = 2\pi.$$

Hierbei ist κ_g die geodätische Krümmung von ∂V positiv durchlaufen, K die Gauß-Krümmung, ds das Volumen- (also Längen-)element von ∂V und $d\text{vol}$ das Volumenelement von M .

Das heißt, der Hopfsche Umlaufsatz gilt bis auf einen "Defekt" von $\int K d\text{vol}$.

Der Rand (oder eine Randkomponente) einer offenen Teilmenge $V \subset M$ wird **positiv durchlaufen**, falls V immer links liegt. Genauer: Für die Parametrisierung $\gamma : I \rightarrow \partial V$ sei $n(t) \in T_{\gamma(t)}M$ der um $+\frac{\pi}{2}$ gedrehte Vektor $\dot{\gamma}(t)$. Dann soll $n(t)$ in V hineinzeigen für alle $t \in I$. (Als Übung versuchen Sie, dies präzise formal zu definieren!)

Beispiel: Wenn $M = \mathbb{R}^2$ ist, ist $K = 0$ und der Satz entspricht dem Hopfschen Umlaufsatz. Ist $M = S^2$ und V eine Halbsphäre, so ist $\kappa_g = 0$ und $K = 1$, so dass sich $\int_V K \, d\text{vol} = \text{vol } V = 2\pi$ ergibt. (Hier haben wir nicht nachgeprüft, ob eine Karte wie gefordert existiert; das tut sie auch nicht; dass der Satz trotzdem gilt, folgt aus den Überlegungen weiter unten.)

Der zentrale Teil des Beweises besteht darin, das Auftreten des Integrals über die Gaußkrümmung zu erklären. Diese Rechnung führt zunächst auf eine interessante Beziehung zur Holonomie:

III.5.3 Satz

Sei M eine orientierte Fläche und $V \subset M$ wie in Satz III.5.2. Sei γ eine positive Parametrisierung von ∂V . Dann gilt für den Holonomiewinkel entlang γ

$$\theta \equiv \int_V K \, d\text{vol} \quad \text{mod } 2\pi$$

Wenn V genügend klein ist, ist die rechte Seite nahe Null, daher gilt hier Gleichheit, wenn man für θ einen Repräsentanten in $(-\pi, \pi)$ wählt. Dies ergibt eine neue Charakterisierung der Krümmung mittels des Holonomiewinkels (einer für Bewohner der Fläche M messbaren Größe).

Beweis: Wir wählen Normalkoordinaten bzgl. einer Kurve, wobei wir o.B.d.A. annehmen können, dass φ eine **orientierungserhaltende Karte** ist, d.h. dass (∂_u, ∂_v) in jedem Punkt von V eine positive Basis ist. (Andernfalls ist φ orientierungsumkehrend, dann ersetzen wir es durch $\varphi'(u, v) = \varphi(u, -v)$.)

Wir wollen Lemma III.4.14 auf den orthonormalen Rahmen $e_1 = \partial_u, e_2 = \frac{\partial_v}{R}$ anwenden, wobei R wie in Lemma III.4.19 ist. Dazu berechnen wir $g\left(\frac{\nabla}{dt}e_1, e_2\right) = g(\nabla_{\dot{\gamma}}e_1, e_2)$. Für eine Kurve $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ gilt $\dot{\gamma} = \dot{u}\partial_u + \dot{v}\partial_v$, also berechnen wir zunächst $g(\nabla_{\partial_u}e_1, e_2)$ und $g(\nabla_{\partial_v}e_1, e_2)$. Nach Lemma III.4.19 ist $\nabla_{\partial_u}\partial_u = 0$ und $\nabla_{\partial_v}\partial_u = \frac{\partial_u R}{R}\partial_v$, damit folgt

$$g(\nabla_{\partial_u}e_1, e_2) = g(\nabla_{\partial_u}\partial_u, e_2) = 0, \quad g(\nabla_{\partial_v}e_1, e_2) = \frac{1}{R}g(\nabla_{\partial_v}\partial_u, \partial_v) = \frac{\partial_u R}{R^2} \|\partial_v\|^2 = \frac{\partial R}{\partial u}.$$

Insgesamt folgt $g(\nabla_{\dot{\gamma}}e_1, e_2) = \dot{v}\frac{\partial R}{\partial u}$.

Nach Lemma III.4.14(2) ist $\theta \equiv -\int_a^b \dot{v}\frac{\partial R}{\partial u}$. Wir können dieses Integral mit Hilfe des Integralsatzes von Gauß, Satz III.5.4 umschreiben. Nehmen wir dort $P = \frac{\partial R}{\partial u}$, so erhalten mit $K = -\frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial u^2}$ aus Lemma III.4.19:

$$\theta \equiv -\int_a^b \dot{v}\frac{\partial R}{\partial u} = -\int_{\tilde{V}} \frac{\partial^2 R}{\partial u^2} \, dudv = \int_{\tilde{V}} K R \, dudv = \int_V K \, d\text{vol}$$

wobei wir $d\text{vol} = \sqrt{g} \, dudv = R \, dudv$ verwendet haben.

III.5.4 Satz (von Gauß)

Sei $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend. ∂V sei durch die Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ in positivem Umlaufsinn parametrisiert, $\gamma(t) = (u(t), v(t))$. Für glatte Funktionen P, Q auf \tilde{V} gilt dann

$$\int_{\tilde{V}} \left(\frac{\partial P}{\partial u} + \frac{\partial Q}{\partial v} \right) \, dudv = \int_a^b (\dot{v}P - \dot{u}Q) \, dt.$$

Die Standardversion des Satzes von Gauß lautet $\int_{\tilde{V}} (\text{div } X) \, dudv = \int_{\partial \tilde{V}} (X \cdot n) \, ds$ für ein glattes Vektorfeld

X auf $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^2$, wobei n die äußere Einheitsnormale bezeichnet. Man erhält daraus die angegebene Formel, indem man $X = (P, Q)$ setzt, mittels $n = \frac{(\dot{v}, -\dot{u})}{\sqrt{\dot{u}^2 + \dot{v}^2}}$ und $ds = |\dot{\gamma}| \, dt = \sqrt{\dot{u}^2 + \dot{v}^2} \, dt$.

Beweis (Beweis von Satz III.5.2): Aus Satz III.5.3 und Proposition III.4.15 folgt

$$(III.2) \quad \int_a^b \kappa_g(t) dt + \int_V K d\text{vol} = 2\pi k$$

für ein $k \in \mathbb{Z}$. Es bleibt zu zeigen, dass $k = 1$ gilt. Dies zeigen wir mit einem Deformationargument. Dazu fassen wir K als Funktion auf \tilde{V} und γ als Parametrisierung von $\partial\tilde{V}$ auf. Die Formel (III.2) folgte aus den Formeln für K und κ_g mit Hilfe der Darstellung $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}$. Für $\tau \in [0, 1]$ sei $R_\tau = (1 - \tau)G + \tau$ und $g^\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_\tau^2 \end{pmatrix}$. Für jedes $\tau \in [0, 1]$ ist g^τ eine Riemannsche Metrik auf \tilde{U} , und es gilt $g^0 = g$, während g^1 die euklidische Metrik ist. (Hier verwenden wir, dass überall $R > 0$ ist, woraus $R_\tau > 0$ für alle τ folgt.) Das heißt, g^τ ist eine stetige Deformation von g in g^1 . Für jedes τ gilt eine Formel (III.2) für g^τ . Das heißt, wenn wir κ^τ und K^τ mittels g^τ berechnen, so ist $h(\tau) := \int_a^b \kappa_g^\tau(t) dt + \int_{\tilde{V}} K^\tau R_\tau dudv$ für jedes τ ein ganzzahliges Vielfaches von 2π . Da R_τ und damit κ^τ und K^τ stetig von τ abhängen, ist auch $h(\tau)$ stetig in τ , muss also konstant sein. Insbesondere gilt $h(0) = h(1)$. Für $\tau = 1$ (euklidische Metrik) ist $K^\tau = 0$, also $h(1) = 2\pi$ nach dem Hopfschen Umlaufsatz. Also folgt $k = h(0) = 2\pi$. \square

Wir brauchen noch eine Verallgemeinerung des lokalen Satzes von Gauß-Bonnet. Hierbei darf V "Ecken" haben, d.h. ∂V kann durch eine stückweise glatte Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ parametrisiert werden.

Sei also $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ stückweise glatt, bei n Ecken also $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ und $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ glatt und regulär für jedes $i = 1, \dots, n$. An jeder Ecke t_i hat man zwei Tangenten, $\dot{\gamma}(t_i-) := \lim_{t \rightarrow t_i^-} \dot{\gamma}(t)$ und $\dot{\gamma}(t_i+) := \lim_{t \rightarrow t_i^+} \dot{\gamma}(t)$. Der **Außenwinkel** θ_i bei $\gamma(t_i)$ ist der Winkel von $\dot{\gamma}(t_i-)$ nach $\dot{\gamma}(t_i+)$. Er sei so gewählt, dass $\theta_i \in (-\pi, \pi)$. (Man kann auch $\pm\pi$ zulassen, wenn man sich dann etwas über das Vorzeichen Gedanken macht.)

III.5.5 Satz (Lokale Version des Satzes von Gauß-Bonnet, stückweise glatter Fall)

Seien die Voraussetzungen wie in Satz III.5.2, außer dass ∂V stückweise glatt ist. Seien $\theta_1, \dots, \theta_n \in (-\pi, \pi)$ die Außenwinkel. Dann gilt

$$\int_{\partial V} \kappa_g ds + \int_V K d\text{vol} + \sum_{i=1}^n \theta_i = 2\pi$$

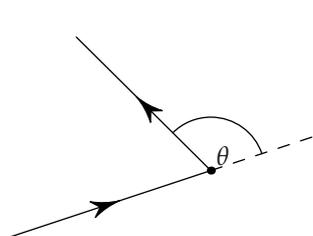
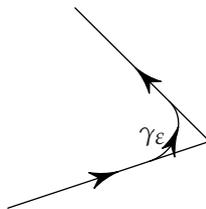
Der zusätzliche Term $\sum_{i=1}^n \theta_i$ lässt sich am Spezialfall des Hopfschen Umlaufsatzes ($M = \mathbb{R}^2, K = 0$) erklären: κ_g ist die momentane Änderungsgeschwindigkeit des Winkels von $\dot{\gamma}$ zur x -Achse, also ist $\int \kappa_g$ die Gesamtänderung dieses Winkels. Der Satz sagt dann, dass sich $\dot{\gamma}$ insgesamt genau einmal um 2π dreht. Damit dies auch mit Ecken stimmt, muss bei den Ecken die momentane Änderung dieses Winkels (also der Außenwinkel) hinzuaddiert werden.

Beweis (Skizze): Wir approximieren V durch Gebiete V_ϵ mit glattem Rand durch Glätten der Ecken: Der Einfachheit halber sei $n = 1$ (eine Ecke, sonst macht man folgende Konstruktion bei jeder Ecke separat). Die Kurve γ habe in t_0 eine Ecke. Für kleines $\epsilon > 0$ konstruieren wir V_ϵ so, dass ∂V_ϵ durch eine glatte Kurve γ_ϵ parametrisiert ist, die außerhalb von $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ gleich γ ist und auf ganz $[a, b]$ für $\epsilon \rightarrow 0$ gleichmäßig gegen γ konvergiert. Da K integrierbar ist, gilt

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{V_\epsilon} K d\text{vol} = \int_V K d\text{vol}.$$

Für die geodätische Krümmung $\kappa_{g,\epsilon}$ von γ_ϵ gilt

$$\int \kappa_{g,\epsilon}(t) dt = \int_{|t-t_0|>\epsilon} \kappa_g(t) dt + \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} \kappa_g(t) dt.$$

Abbildung III.3.: Außenwinkel θ einer EckeAbbildung III.4.: Approximation von γ durch γ_ϵ an einer Ecke

Für $\epsilon \rightarrow 0$ geht das erste Integral gegen $\int \kappa_g(t) dt$. Das zweite Integral ist gleich $\alpha(t_0 + \epsilon) - \alpha(t_0 - \epsilon)$ mit $\alpha(t) = \text{Winkel von } \dot{\gamma}(t) \text{ zu einem parallelen Vektorfeld } X_t$. Da X_t stetig ist, gilt $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \alpha(t_0 + \epsilon) - \alpha(t_0 - \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\text{Winkel von } \dot{\gamma}(t_i -) \text{ nach } \dot{\gamma}(t_i +)) = \theta$. Man überzeugt sich leicht, dass dabei $\theta \in (-\pi, \pi)$ herauskommt.

Damit folgt der Satz aus Satz III.5.2, angewendet auf V_ϵ , durch $\epsilon \rightarrow 0$. \square

Beispiele: Sei V ein geodätisches Polygon, d.h. ∂V ist Vereinigung endlich vieler Geodäten und seien $\alpha_i = \pi - \theta_i$ die Innenwinkel. Dann gilt $\int_V K \, d\text{vol} = 2\pi - \sum_{i=1}^n \theta_i = 2\pi - \sum_{i=1}^n (\pi - \alpha_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i - (n-2)\pi$.

- ▷ Bei einem Dreieck auf $M = \mathbb{R}^2$ folgt $0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi$, was bekannt sein dürfte. Bei einem n -Eck gilt $\sum_{i=1}^n \alpha_i = (n-2)\pi$.
- ▷ Wenn $M = S^2$ ist, ist $K = 1$, also $\int_V K \, d\text{vol} = \text{vol } V$. Damit folgt $\text{vol } V = \sum_{i=1}^n \alpha_i - (n-2)\pi$, also ist insbesondere bei einem Dreieck auf der Sphärenoberfläche $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi + \text{vol } V > \pi$. Die Fläche des Dreiecks ist also der Winkelüberschuss.
- ▷ Bei $K < 0$ ist $0 > \int_V K = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi$, also $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 < \pi$.

III.5.6 Korollar

Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche, $p \in M$. Dann ist

$$K(p) = \lim_{D \rightarrow p} \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi}{\text{vol } D},$$

wobei $D \subset M$ geodätische Dreiecke mit Innenwinkeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sind, die gegen p konvergieren, d.h. die in immer kleineren Umgebungen von D enthalten sind.

Bemerkung: Dies ist eine Charakterisierung von K , die vollständig mit Größen der inneren Geometrie auskommt! Zusätzlich ist sie im Unterschied zu den Formeln des früheren Beweises des Theorema Egregium sehr geometrisch.

Leider ist dies aber kein neuer Beweis des Theorema Egregium, da die für dieses hergeleiteten Formeln hier zum Beweis verwendet wurden.

Man kann Gauß-Bonnet aber auch anders beweisen, wie z.B. in den Büchern von C.Bär und D.Henderson.

Frage: Gilt der lokale Satz von Gauß-Bonnet auch für allgemeinere Teilmengen $V \subset M$ als bisher angenommen?

Für den lokalen Satz von Gauß-Bonnet wurden drei Bedingungen an V gestellt:

- (1) ∂V stückweise glatt

- (2) $V \subset U$ mit einem Koordinatengebiet U , für das eine Normalkoordinaten bzgl. einer Kurve existieren
- (3) V einfach zusammenhängend, d.h. $V = \varphi(\tilde{V})$, wobei $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^2$ ist und $\partial\tilde{V}$ zusammenhängend ist, also nur von einer Kurve parametrisiert ist.

Die Einschränkungen (2) und (3) wollen wir fallenlassen, allerdings muss dann die Aussage geändert werden. Dies führt zu interessanten neuen topologischen Elementen!

Beispiel: Die dritte Bedingung ist wichtig! Wenn sie nicht erfüllt ist, muss der Satz nicht stimmen: Wenn $M = \mathbb{R}^2$ ist und $V = \tilde{V}$ ein Ring, also ein Gebiet, das von zwei ineinanderliegenden Kreisen begrenzt wird, dann ist $\int_{\text{äußerer Kreis}} \kappa_g = 2\pi$ und $\int_{\text{innerer Kreis}} \kappa_g = -2\pi$, $K = 0$ und Außenwinkel existieren nicht. Also ergibt sich $\int_{\partial V} \kappa_g + \int_V K \, d\text{vol} = 0 \neq 2\pi$.

Wir werden weiter sehen:

- (1) wird überhaupt für die Formulierung (Außenwinkel etc.) benötigt.
- (2) ist unnötig (dann muss man in (3) den Begriff "einfach zusammenhängend" geeignet definieren).
- Frage: Was kommt allgemein heraus, wenn V die Bedingungen (2) und (3) nicht erfüllt?

Im Folgenden ist es einfacher und natürlicher, abgeschlossene Teilmengen von M zu verwenden. Sei also nun $R := \bar{V}$. Idee: Zerlege R in Teile, für die alle Bedingungen gelten!

III.5.7 Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche.

- a) Eine kompakte Teilmenge $R \subset M$ heißt **polygonal** (oder **Polygon**), wenn es ein konvexes Polygon $P \subset \mathbb{R}^2$ und einen Diffeomorphismus Φ von einer offenen Umgebung von P auf eine (in M) offene Umgebung von R gibt mit $\Phi(P) = R$. (Ein konvexes Polygon in \mathbb{R}^2 ist die konvexe Hülle endlich vieler Punkte.)
- b) Sei $R \subset M$ kompakt. Eine **polygonale Zerlegung** von R ist eine Menge polygonaler Teilmengen $R_j \subset M$, $j = 1, \dots, f$ für die gilt:
- $R = \bigcup_{j=1}^f R_j$
 - Für $i \neq j$ ist $R_i \cap R_j = \emptyset$ oder eine gemeinsame Ecke oder eine gemeinsame Kante.

Falls alle P_i Dreiecke sind, spricht man von einer Triangulierung von R .

Bemerkung: \triangleright Die Ecken bzw. Kanten einer polygonalen Menge $R = \Phi(P)$ sind per Definition die Bilder der Ecken bzw. Kanten von P . (Übung: Dies ist wohldefiniert, d.h. falls $R' = \Phi'(P')$ mit einem anderen Polygon P' und Diffeomorphismus Φ' ist, so definiert das die selben Ecken und Kanten von R . Dazu zeigt man: sind $P, P' \subset \mathbb{R}^2$ Polygone und Ψ ein Diffeomorphismus einer Umgebung von P auf eine Umgebung von P' mit $\Psi(P) = P'$, so bildet Ψ Ecken auf Ecken und Kanten auf Kanten ab.)

\triangleright Damit hat eine polygonale Zerlegung wohldefinierte Flächen, Kanten und Ecken.

Beispiele: \triangleright Sei $R \subset \mathbb{R}^2$ erneut der Kreisring. Wenn man ihn an mehreren Stellen durchschneidet (also eine Linie vom inneren zum äußeren Rand zieht), entstehen Teilstücke R_i , die diffeomorph zu Quadraten sind. Bei mindestens drei Schnitten erhält man eine polygonale Zerlegung von R .

\triangleright Die Sphäre kann trianguliert werden, indem man sich in ihrem Inneren eine kleine Pyramide vorstellt und diese nach Außen projiziert.

III.5.8 Satz (Globaler Satz von Gauß-Bonnet, allgemeine Form)

Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ orientierte Fläche, $R \subset M$ kompakt mit stückweise glattem Rand. Sei $\{R_1, \dots, R_f\}$ eine polygonale Zerlegung von R mit f Flächen, k Kanten und e Ecken. Seien θ_i wie vorher die Außenwinkel von R in den nicht glatten Punkten. Dann gilt

$$\int_{\partial R} \kappa_g ds + \int_R K d\text{vol} + \sum_{i=1}^n \theta_i = 2\pi \cdot (f - k + e).$$

Beweis: Wir nehmen zunächst an, dass die polygonale Zerlegung so fein ist, dass jedes R_j in einer Kartenumgebung enthalten ist, für die der lokale Satz von Gauß-Bonnet anwendbar ist. Seien θ_{ij} die Außenwinkel von R_j , $i = 1, \dots, n_j$. Dann gilt für $j = 1, \dots, f$

$$\int_{\partial R_j} \kappa_g ds + \int_{R_j} K d\text{vol} + \sum_{i=1}^{n_j} \theta_{ij} = 2\pi.$$

Über j summiert ergibt sich

$$\sum_{j=1}^f \int_{\partial R_j} \kappa_g ds + \sum_{j=1}^f \int_{R_j} K d\text{vol} + \sum_{j=1}^f \sum_{i=1}^{n_j} \theta_{ij} = 2\pi f.$$

Wir betrachten nun die drei Summanden einzeln:

- (1) $\sum_{j=1}^f \int_{\partial R_j} \kappa_g ds$: Schreibe jedes Integral als Summe über die Kanten von R_j . Für jede Kante gibt es zwei

Möglichkeiten:

- ▷ Entweder sie ist gemeinsame Kante zweier R_j . Dann wird sie in $\int_{\partial R_j}$ und $\int_{\partial R_{j'}}$ in unterschiedlicher Richtung durchlaufen und die beiden Integrale heben sich gegenseitig auf.
- ▷ Oder sie ist Kante von genau einem R_j . Dann ist sie Kante von R und alle Kanten von R kommen genau einmal vor. Da sie bzgl. der R_j positiv durchlaufen werden, so auch bzgl. R (wichtig für das Vorzeichen von κ_g).

Also folgt

$$\sum_{j=1}^f \int_{\partial R_j} \kappa_g ds = \int_{\partial R} \kappa_g ds.$$

- (2) $\sum_{j=1}^f \int_{R_j} K d\text{vol}$: Es gilt

$$\sum_{j=1}^f \int_{R_j} K d\text{vol} = \int_R K d\text{vol}$$

da $R = \bigcup_j R_j$ gilt und sich verschiedene R_j nur in Nullmengen überschneiden.

- (3) $\sum_{j=1}^f \sum_{i=1}^{n_j} \theta_{ij}$:

Vorüberlegung: Sei p eine Ecke der polygonalen Zerlegung und d ihr Grad, d.h. die Anzahl der Kanten, die in p ankommen. Dann treffen in p auch d Polygone zusammen. Bezeichne mit α^l , θ^l deren Innen- bzw. Außenwinkel bei p . Es ist $\alpha^l = \pi - \theta^l$ für $l = 1, \dots, d$.

1. Fall: p ist eine innere Ecke, d.h. $p \notin \partial R$.

Dann ist $\sum \alpha^l = 2\pi$, also

$$2\pi = \sum_{l=1}^d (\pi - \theta^l) = d\pi - \sum \theta^l,$$

also $\sum \theta^l = (d-2)\pi$.

2. Fall: p ist Randecke, d.h. $p \in \partial R$.

Sei θ der Außenwinkel von R bei p . Das Komplement von R ist nahe p ein Polygon und hat Außenwinkel $-\theta$ bei p . Wendet man den ersten Fall an, folgt $-\theta + \sum \theta^l = (d-2)\pi$, also $\sum \theta^l = (d-2)\pi + \theta$.

Seien nun p_1, \dots, p_e die Ecken der polygonalen Zerlegung, wobei p_1, \dots, p_n die Randecken sind, d_m der Grad von p_m , $m = 1, \dots, e$, sowie θ_m der Außenwinkel von R bei p_m für $m = 1, \dots, n$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^f \sum_{i=1}^{n_j} \theta_{ij} &= \sum_{m=1}^e \text{Summe der Außenwinkel der Polygone bei } p_m \\ &= \sum_{m=1}^e [(d_m - 2)\pi] + \sum_{m=1}^n \theta_m \\ &= \pi \sum_{m=1}^e d_m - 2\pi e + \sum_{m=1}^n \theta_m \end{aligned}$$

III.5.9 Lemma

Es gilt $\sum_{m=1}^e d_m = 2k$.

Beweis: Wir zählen die Paare $\{(p, V) : p \text{ Ecke, } V \text{ Kante mit } p \in V\} =: A$. Für jedes p_m gibt es d_m V 's, also gilt $|A| = \sum_{m=1}^e d_m$. Andersherum gibt es für jedes V genau zwei p 's, also $|A| = 2k$. \square

Also folgt

$$\sum_{j=1}^f \sum_{i=1}^{n_j} \theta_{ij} = 2\pi k - 2\pi e + \sum_{m=1}^n \theta_m.$$

Insgesamt ergibt sich nun

$$\begin{aligned} 2\pi f &= \sum_{j=1}^f \int_{\partial R_j} \kappa_g + \sum_{j=1}^f \int_{R_j} K \, d\text{vol} + \sum_{j=1}^f \sum_{i=1}^{n_j} \theta_{ij} \\ &= \int_{\partial R} \kappa_g + \int_R K \, d\text{vol} + 2\pi k - 2\pi e + \sum_{m=1}^n \theta_m \end{aligned}$$

und damit der Satz.

Es bleibt der Fall einer beliebigen polygonalen Zerlegung. Idee: Verfeinere, also unterteile eine gegebene Zerlegung so weit, bis auf jedes der Teile der lokale Satz von Gauß-Bonnet anwendbar ist. Dass dies möglich ist, folgt aus einem typischen Kompaktheitsargument.

Eine **Verfeinerung** einer polygonalen Zerlegung von R ist dabei eine weitere polygonale Zerlegung von R , die man durch wiederholtes Anwenden folgender Operationen erhält:

1. Füge eine neue Ecke auf einer Kante ein.
2. Füge eine neue Kante zwischen zwei Ecken ein.

Zum Beispiel kann man ein Dreieck in \mathbb{R}^2 in vier Dreiecke unterteilen, indem man jede Seite halbiert und diese Punkte geradlinig miteinander verbindet. Auf jedes dieser so erhaltenen Dreiecke kann dies wieder angewandt werden, etc. Bei jeder Unterteilung halbiert sich der Durchmesser der Dreiecke.

III.5.10 Lemma

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Dreieck und $\{\tilde{U}_j\}$ eine offene Überdeckung von D . Dann kann man den eben gezeigten Verfeinerungsprozess so lange durchführen (endlich oft), bis jedes der kleinen Dreiecke in einem der \tilde{U}_j liegt.

Beweis: Wenn nicht, so wähle in der ersten Unterteilung ein Dreieck D_1 , das in keinem \tilde{U}_j liegt, dann in der zweiten ein D_2 , in der dritten ein D_3 , und so weiter. Seien $q_i \in D_i$ beliebig. Da D kompakt ist, muss die Folge $\{q_i\}$ einen Häufungspunkt q in D haben. q liegt in einem \tilde{U}_{j_0} . Dies ist offen, also gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $K_\epsilon(q) \subset \tilde{U}_{j_0}$. Da der Durchmesser der D_i gegen Null und $q_i \rightarrow q$ für $i \rightarrow \infty$ geht, folgt, dass $D_i \subset K_\epsilon(q) \subset \tilde{U}_{j_0}$ für genügend große i gilt. Dies ist ein Widerspruch zur Wahl der D_i . \square

Ist $\{R_i\}$ eine Triangulierung von R , $R_i = \Phi_i(D_i)$ für Dreiecke $D_i \subset \mathbb{R}^2$, so kann man alle D_i und somit R_i simultan verfeinern. Die Verfeinerungen benachbarter R_i passen zusammen, wenn man oBdA annimmt, dass Φ_i auf jeder Dreiecksseite proportional zu einer Bogenlängeparametrisierung ist.

III.5.11 Lemma

Sei $\{R_i\}$ eine Triangulierung von R und $\{R'_i\}$ eine Verfeinerung. Dann ist $f - k + e$ für $\{R_i\}$ und $\{R'_i\}$ gleich.

Beweis: Hinzufügen einer Ecke erhöht k und e jeweils um eins, also bleibt $f - k + e$ gleich. Hinzufügen einer Kante erhöht f und k jeweils um eins, also bleibt $f - k + e$ wieder gleich. \square

Sei nun $\{R_i\}$ eine beliebige polygonale Zerlegung von R . Wir verfeinern R_i zunächst durch Hinzufügen von Kanten in eine Triangulierung $\{R'_j\}$.

Zu jedem $p \in M$ sei nun U_p eine Umgebung von p , auf der es Normalkoordinaten gibt. Ist $R'_j = \Phi(D_j)$ eines der Teile, wobei $D_j \subset \mathbb{R}^2$ ein Dreieck und $\Phi : D_j \rightarrow R'_j$ ein Diffeomorphismus ist, so ist $\{\tilde{U}_p\}$ mit $\tilde{U}_p := \Phi^{-1}(U_p)$ eine offene Überdeckung von D_j .

Nach Lemma III.5.10 hat jedes D_j eine Zerlegung, so dass jedes kleine Dreieck in ein \tilde{U}_p passt. Da wir nur endlich viele D_j haben, können wir alle D_j und damit auch alle R'_j simultan so zerlegen, dass in der so entstehenden Triangulierung jedes Teil in einem U_p enthalten ist.

Damit erhalten wir eine Triangulierung $\{R''_i\}$, auf die Teil 1 des Beweises anwendbar ist. Nach Lemma III.5.11 ist für diese Triangulierung der Wert $f - k + e$ der gleiche wie für die ursprüngliche Zerlegung $\{R_i\}$.

Damit ist der Beweis nun vollständig. \square

Beispiel: \triangleright Wenn man den Ring in drei Stücke teilt, erhält man neun Kanten und sechs Ecken. Es ergibt sich $f - k + e = 0$, wie wir auch im letzten Beispiel ausgerechnet hatten.

- \triangleright Bei der Sphäre erhielten wir im letzten Beispiel vier Flächen, sechs Kanten und vier Ecken, also $f - k + e = 2$.

Rechnerisch ergibt sich wegen $\partial R = \emptyset$ und $K = 1$ ebenfalls $\int_{S^2} 1 \, d\text{vol} = \text{vol}(S^2) = 4\pi = 2 \cdot 2\pi$.

III.5.12 Korollar

- ▷ Die Zahl $f - k + e$ ist unabhängig von der Wahl der polygonalen Zerlegung.
- ▷ Sei P ein konvexes Polyeder in \mathbb{R}^3 mit f Flächen, k Kanten und e Ecken. Dann gilt immer $f - k + e = 2$ (**Eulersche Polyederformel**).

Beweis: ▷ Da die linke Seite im Satz von Gauß-Bonnet unabhängig von der Zerlegung ist, ergibt sich sofort die erste Aussage.

- ▷ Für die zweite Aussage legen wir P so, dass sich die 0 im Inneren von P befindet und projizieren dann von 0 auf S^2 . Damit erhalten wir eine polygonale Zerlegung von S^2 und es gilt wie bereits gezeigt $f - k + e = 2$. □

Bemerkung: Das Korollar kann man auch direkt mittels vollständiger Induktion beweisen (hierzu ist es nützlich, die Aussage zunächst zu verallgemeinern, indem man statt polygonaler Zerlegungen Graphen betrachtet, die in M eingebettet sind; dann kann man Schritt für Schritt Kanten entfernen; für Details siehe Bücher über Graphentheorie, oder auch das Buch ‚Mathematisches Problemlösen und Beweisen‘ vom Autor dieses Skripts).

III.5.13 Definition

Die **Euler-Charakteristik** von R ist $\chi(R) = f - k + e$, wobei f , k und e mittels einer beliebigen polygonalen Zerlegung von R bestimmt werden.

Damit dies sinnvoll ist, müssen wir wissen, dass R eine polygonale Zerlegung besitzt. Dies scheint intuitiv klar zu sein, ein genauer Beweis ist aber erstaunlich aufwendig. Ein solcher Beweis ist im Buch ‚Elementare Differentialgeometrie‘ von C. Bär zu finden.

Beispiele: ▷ $\chi(\text{Ring}) = 0$

- ▷ $\chi(\text{Sphäre}) = 2$
- ▷ $\chi(\text{Torus}) = 0$
- ▷ $\chi(\text{Brezel mit } g \text{ Löchern}) = 2 - 2g$

III.5.14 Proposition

χ ist eine differential-topologische Invariante, d.h. sind R, R' diffeomorph, so ist $\chi(R) = \chi(R')$.

Beweis: Sei $F : R \rightarrow R'$ ein Diffeomorphismus, R_1, \dots, R_f eine polygonale Zerlegung von R . Dann ist mit $R'_i := F(R_i)$ auch $\{R'_1, \dots, R'_f\}$ eine polygonale Zerlegung von R' mit $f = f', k = k'$ und $e = e'$, also $\chi(R) = \chi(R')$. □

Bemerkung: Der Beweis zeigt, dass χ sogar eine topologische Invariante ist, dass also $\chi(R) = \chi(R')$ gilt, wenn R und R' bloß homöomorph sind. (Denn auf Differenzierbarkeit der Kanten kam es nirgends an.) Ein Dreieck und ein Kreis in der Ebene beispielsweise sind homöomorph, aber nicht diffeomorph.

III.5.15 Korollar

Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ kompakte Fläche. Dann ist

$$\int_M K \, \text{dvol} = 2\pi\chi(M).$$

Insbesondere hängt das Integral nur von $\chi(M)$ ab, nicht von der Art, wie M im Raum liegt.

Denn $\partial M = \emptyset$ und es gibt keine Außenwinkel.

Oft wird dieses Korollar als Satz von Gauß-Bonnet bezeichnet.

Zum Beispiel gilt für das Ellipsoid wie für die Sphäre $\int K \, d\text{vol} = 4\pi$. Dies weiß man, ohne eine Formel für die Gauß-Krümmung des Ellipsoids (die kompliziert ist und schwierig zu integrieren wäre) verwendet zu haben!

IV. Riemannsche Mannigfaltigkeiten

Bisher haben wir uns mit der sogenannten elementaren Differentialgeometrie beschäftigt. Ihre Objekte sind die Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n , und der Aufbau der Theorie erfolgte nach Kriterien der Zugänglichkeit und Anschaulichkeit: Erst eine Dimension (Kurven), dann zwei (Flächen); erst extrinsische Geometrie, dann intrinsische.

Wir wenden uns nun der höheren Differentialgeometrie zu. Ihre Objekte sind die abstrakten Mannigfaltigkeiten, und der Aufbau der Theorie erfolgt nach der Systematik der Konzepte, wie es im Aufbau der Mathematik üblich ist:

- ▷ Zunächst definieren wir den Begriff der Mannigfaltigkeit und beschäftigen uns mit Konzepten, die für Mannigfaltigkeiten definiert sind. Wichtig hierbei ist, dass es auf einer Mannigfaltigkeit zunächst keinen Abstandsbegriff gibt, daher müssen diese Konzepte ohne einen solchen Begriff auskommen. Dies sind der Tangentialraum, Vektorfelder und deren Flüsse, das Differential von Abbildungen, die Lie-Klammer von Vektorfeldern sowie Tensoren.

- ▷ Dann führen wir den Begriff der Riemannschen Metrik ein, der es erlaubt, von Abständen, Längen, Flächeninhalten etc. auf einer Mannigfaltigkeit zu sprechen. Weiterhin erlaubt er es, die Begriffe des Zusammenhangs (genauer des Levi-Civita-Zusammenhangs) und der Krümmung einzuführen.

Die Theorie der Mannigfaltigkeiten wird manchmal als Differentialtopologie bezeichnet. Erst wenn eine Metrik hinzukommt, spricht man von Geometrie. (Genauer gesagt: Erst wenn eine weitere Struktur hinzukommt. So gibt es z.B. komplexe Geometrie, Kähler-Geometrie, symplektische Geometrie, CR-Geometrie, affine Geometrie usw., und deren Objekte sind Mannigfaltigkeiten mit jeweils einer anderen zusätzlichen Struktur. Wir beschäftigen uns hier mit Riemannscher Geometrie.)

Das Vorgehen hier ähnelt dem in der linearen Algebra: Zunächst betrachtet man Vektorräume, deren Unterräume, linearen Abbildungen etc. Erst später führt man Skalarprodukte ein und Begriffe, die nur auf euklidischen Vektorräumen (Vektorräumen mit Skalarprodukt) definiert sind: Orthogonalität, Selbstadjungiertheit etc.

Da wir nun Mannigfaltigkeiten abstrakt, also ohne einen umgebenden Raum, betrachten, sind alle Begriffe intrinsisch. Die Betrachtungen im Kapitel über die innere Geometrie der Flächen sind hierfür wesentlich, da sie einen Wegweiser bilden, in welche Richtung man überhaupt gehen soll – z.B. wie man für abstrakte Riemannsche Mannigfaltigkeiten sinnvollerweise die Krümmung definieren sollte.

IV.1. Abstrakte Mannigfaltigkeiten

IV.1.1 Definition

Sei $n \geq 0$. Eine **n -dimensionale (C^∞)-Mannigfaltigkeit** ist eine Menge M zusammen mit einem Atlas, das heißt einer Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von M (I beliebige Indexmenge) und bijektiven Abbildungen

$$\varphi_i : \widetilde{U}_i \longrightarrow U_i, \quad \widetilde{U}_i \subset \mathbb{R}^n \text{ offen,}$$

so dass gilt:

(1) Für alle $i, j \in I$ ist $\varphi_i^{-1}(U_i \cap U_j)$ ($\subset \widetilde{U}_i$) offen und die »Kartenwechsel«

$$\kappa_{ij} := \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i : \varphi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j^{-1}(U_i \cap U_j)$$

sind Diffeomorphismen^a.

(2) M ist mit der hierdurch induzierten Topologie Hausdorff'sch. (Definition folgt)

^aD.h. glatt, bijektiv, mit glatter Umkehrabbildung. 'Glatt' bedeutet immer C^∞ , d.h. unendlich oft differenzierbar. Für viele Zwecke reicht auch endliche Differenzierbarkeit (oft einmal, manchmal aber auch zwei- oder dreimal). Wir fordern C^∞ , damit wir uns darum keine Gedanken machen müssen.

Zu (1) siehe Abb. II.3 auf Seite 25.

Bemerkung: Daten, die die Mannigfaltigkeit festlegen, sind $M, (\varphi_i, U_i, \widetilde{U}_i)_{i \in I}$. Siehe dazu aber auch die Bemerkung vor dem Abschnitt 'Rechnen in einer lokalen Karte' auf Seite 83.

Topologie auf M

IV.1.2 Definition

Eine Teilmenge $U \subset M$ heißt offen, falls $\varphi_i^{-1}(U \cap U_i) \subset \mathbb{R}^n$ für alle $i \in I$ offen ist.

Es ist nun leicht, mit Hilfe der Eigenschaft (1) in Definition IV.1.1 nachzuprüfen, dass die Menge der offenen Teilmengen von M die Axiome einer Topologie erfüllt, also M dadurch zu einem **topologischen Raum** wird.¹ Damit sind folgende Begriffe definiert und haben die 'üblichen' Eigenschaften (z.B. Komposition stetiger Abbildungen ist stetig etc.):

- (1) **Konvergenz von Folgen:** Gegeben $(p_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset M$ und $p \in M$. p_k konvergiert gegen p für $k \rightarrow \infty$, wenn es für alle offenen Mengen U mit $p \in U$ ein k_0 gibt, so dass $p_k \in U$ ist für alle $k \geq k_0$.
- (2) **Stetigkeit:** Ist f eine Funktion $M \rightarrow \mathbb{R}$ (oder $M \rightarrow \mathbb{C}$), so heißt f stetig, falls das Urbild jeder offenen Menge offen ist. (in Analysis 2 hatten wir gezeigt, dass im Kontext metrischer Räume dies äquivalent zur mittels Folgen definierten Stetigkeit ist)
- (3) **Abgeschlossene Mengen** sind per Definition Komplemente offener Mengen.
- (4) **Kompakte Mengen:** eine Menge $K \subset M$ heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung hat.

¹D.h.:

- ▷ Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.
- ▷ Der Schnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.
- ▷ M und \emptyset sind offen.

Mehr dazu in jedem einführenden Buch über Topologie.

Für Definition IV.1.1 fehlte noch

IV.1.3 Definition

Ein topologischer Raum M heißt **Hausdorff'sch**, wenn es für alle $p, q \in M, p \neq q$ offene Umgebungen $U \ni p$ und $V \ni q$ gibt, so dass $U \cap V = \emptyset$ ist.

Diese Eigenschaft wird für gewisse wichtige topologische Eigenschaften, z.B. die Eindeutigkeit des Grenzwerts, benötigt. Siehe das letzte Beispiel unten.

Bemerkung: Meist fordert man eine weitere topologische Eigenschaft in der Definition einer Mannigfaltigkeit: Dass sie parakompakt ist. In manchen Büchern wird die etwas stärkere Eigenschaft gefordert, dass Mannigfaltigkeiten das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllen.

Ich werde nicht genauer auf diese Details eingehen, aber der Vollständigkeit halber seien hier die Definitionen gegeben. Genaueres finden Sie in Büchern über mengentheoretische Topologie.

Ein topologischer Raum M heißt **parakompakt**, falls jede offene Überdeckung eine lokal endliche Verfeinerung besitzt. Das heißt: Wenn $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von M ist, so gibt es eine weitere Überdeckung $(V_j)_{j \in J}$ mit folgenden Eigenschaften:

- (1) Jedes V_j ist Teilmenge mindestens eines U_i . (Verfeinerung)
- (2) Zu jedem $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung $U \ni p$, die nur endlich viele V_j schneidet, das heißt $\#\{j \in J : V_j \cap U \neq \emptyset\} < \infty$. (lokal endlich)

Ein topologischer Raum M erfüllt das **zweite Abzählbarkeitsaxiom**, wenn es eine abzählbare Menge \mathcal{U} offener Mengen gibt, so dass jede beliebige offene Menge Vereinigung von Mengen in \mathcal{U} ist. Z.B. ist das für \mathbb{R}^n erfüllt, da man für \mathcal{U} die Quader nehmen kann, deren Eckpunkte sämtlich rationale Koordinaten haben.

Parakompaktheit wird zur Konstruktion einer Partition der Eins benötigt, welche wiederum verwendet werden kann, um zu zeigen, dass auf jeder Mannigfaltigkeit eine Riemannsche Metrik existiert. Sie wird auch bei der Integration verwendet.

Wir werden, wo benötigt, die Existenz einer Partition der Eins voraussetzen (Definition folgt später).

Die wichtigsten Tatsachen über die Hausdorff-Eigenschaft, Parakompaktheit und 2. AZA (zweites Abzählbarkeitsaxiom) sind:

- ▷ \mathbb{R}^n ist Hausdorff'sch, erfüllt 2. AZA und ist parakompakt.
- ▷ Ist X Hausdorff'sch (erfüllt 2. AZA) und $Y \subset X$, so ist Y Hausdorff'sch (erfüllt 2. AZA); wie immer bei Teilmengen sei dabei Y mit der **induzierten Topologie** versehen, d.h. $U \subset Y$ ist offen (als Teilmenge von Y) genau dann, wenn es ein offenes $U' \subset X$ gibt mit $U = U' \cap Y$.
Ist X parakompakt und $Y \subset X$ abgeschlossen, so ist Y parakompakt.
- ▷ Jeder metrische Raum ist Hausdorff'sch und parakompakt. Er erfüllt das 2. AZA genau dann, wenn er höchstens abzählbar viele Zusammenhangskomponenten hat.

Beispiele:

- ▷ Jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit mit einer Karte, nämlich $\varphi : U \rightarrow U, \varphi = \text{id}$.
- ▷ Untermannigfaltigkeiten $M \subset \mathbb{R}^N$ der Dimension n sind natürlich auch n -dimensionale Mannigfaltigkeiten. (Teil 1 der Definition war ein Satz) Beachte, dass für die bei Untermannigfaltigkeiten geforderte Bedingung, dass φ eine Immersion ist, für abstrakte Mannigfaltigkeiten keinen Sinn macht, da M bloß eine Menge ist. Sie sagt etwas darüber aus, wie M in \mathbb{R}^n liegt.
- ▷ Der abstrakte Kreis:
 $M := \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{x + \mathbb{Z} : x \in \mathbb{R}\}$
(die Quotientengruppe, d.h. die Menge der Äquivalenzklassen von Punkten in \mathbb{R} , wobei x äquivalent zu x' ist, falls $x - x' \in \mathbb{Z}$).

Sei $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $x \mapsto x + \mathbb{Z}$, die kanonische Projektion. Karten für M sind $\pi|_J$ mit offenen Intervallen $J \subset \mathbb{R}$ mit einer Länge kleiner als 1.

Vorstellung: Da jedes $x \in \mathbb{R}$ zu genau einem Punkt in $[0, 1)$ äquivalent ist und 0 äquivalent zu 1 ist, kann man sich M so vorstellen: Man nehme das Intervall $[0, 1]$ und verklebe die Punkte 0 und 1. Also wie ein Kreis!

- ▷ Der abstrakte Torus: Wir kennen den Torus als im \mathbb{R}^3 eingebettete 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Interessiert man sich aber nur für die intrinsischen Eigenschaften eines Torus, kann man ihn auch auf einfache Weise als abstrakte Mannigfaltigkeit definieren:

$$\begin{aligned} M &:= \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2 = \{(x, y) + \mathbb{Z}^2 : (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{die Äquivalenzklassen von Punkten im } \mathbb{R}^2 \text{ mit} \\ &\quad (x, y) \text{ äquivalent zu } (x', y') : \Leftrightarrow (x, y) - (x', y') \in \mathbb{Z}^2 \end{aligned}$$

Karten sind die eingeschränkten Restklassenabbildungen $\pi|_{\tilde{U}}$, wo $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^2$ eine beliebige offene Teilmenge eines beliebigen achsenparallelen Quadrates mit Kantenlänge 1 ist.

Vorstellung: Man nehme das Quadrat $[0, 1] \times [0, 1]$ und verklebe die linke mit der rechten Seite sowie die obere mit der unteren Seite.

- ▷ Analog: $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$, der n -dimensionale Torus

- ▷ Folgendes ist dagegen *keine* Mannigfaltigkeit: $M := \mathbb{R} \cup \{p\}$, $p \notin \mathbb{R}$ mit folgenden Karten:

$$\varphi_1 : \mathbb{R} \rightarrow M, u \mapsto u \quad \text{und} \quad \varphi_2 : \mathbb{R} \rightarrow M, u \mapsto \begin{cases} p, & \text{falls } u = 0 \\ u, & \text{falls } u \neq 0 \end{cases}$$

Teil 1 der Definition ist erfüllt. Aber M ist nicht Hausdorff'sch, denn es gibt keine zwei Umgebungen $U \ni 0$ und $V \ni p$ mit $U \cap V = \emptyset$. Beachte, dass die Folge $(\frac{1}{k})$ für $k \rightarrow \infty$ sowohl gegen 0 als auch gegen p konvergiert!

Nach all diesen Beispielen mag mancher Leser die Frage stellen, wozu der Begriff der abstrakten Mannigfaltigkeit überhaupt gut ist, wenn man alles auch als Untermannigfaltigkeit auffassen kann (dass dies geht, genauer gesagt dass sich jede (Riemannsche) Mannigfaltigkeit (isometrisch) in einen \mathbb{R}^n einbetten lässt, ist die Aussage des Einbettungssatzes von Whitney bzw. von Nash). Eine Antwort auf diese Frage ist in den Beispielen enthalten: Die Definition des Torus als Untermannigfaltigkeit erfordert vergleichsweise komplizierte Karten. Für die Definition als Mannigfaltigkeit genügen dagegen Restklassenabbildungen. Allgemeiner führen manche natürliche Konstruktionen (z.B. Quotienten, Verklebungen), mit denen aus gegebenen Mannigfaltigkeiten neue konstruiert werden, nicht natürlich auf eingebettete Mannigfaltigkeiten – selbst wenn sie auf eingebettete Mannigfaltigkeiten angewendet werden.

Außerdem ist der umgebende Raum von Untermannigfaltigkeiten oft überflüssig und lenkt vom Wesentlichen ab. So beschäftigen sich Physiker zum Beispiel mit der Frage, was für eine Mannigfaltigkeit der Raum ist, in dem wir leben (dies ist erwiesenermaßen nicht der \mathbb{R}^3 mit der euklidischen Metrik). Hier würde es einfach keinen Sinn machen, uns als in einer höherdimensionalen Welt eingebettet zu betrachten.

Bemerkung: In den meisten Büchern wird eine Mannigfaltigkeit etwas anders definiert: Als topologischer Raum, der die Bedingungen (1) und (2) von Definition IV.1.1 erfüllt, wobei die Karten φ_i zusätzlich Homöomorphismen sein sollen. Wie man sich leicht überzeugt, ist dies äquivalent zur gegebenen Definition.

Ich ziehe die hier gegebene Definition vor, da sie die Karten in den Vordergrund stellt, nicht die Topologie. Dies entspricht mehr dem Kern der Idee Mannigfaltigkeit.

Funktionen und Abbildungen

Viele Grundbegriffe der Analysis auf Mannigfaltigkeiten lassen sich mittels lokaler Karten leicht auf entsprechende Begriffe im \mathbb{R}^n zurückführen, zum Beispiel:²

IV.1.4 Definition

Seien M, N Mannigfaltigkeiten. Eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ heisst **glatt**

$:\Leftrightarrow$ für alle lokalen Karten φ ist $f \circ \varphi : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{C}$ glatt

Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ heißt **glatt**

$:\Leftrightarrow$ für alle lokalen Karten $\varphi : \tilde{U} \rightarrow U$ von M und $\psi : \tilde{V} \rightarrow V$ von N
ist $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ glatt

Möchte man »Glattheit« nachprüfen, muss man dies nicht für *alle* lokalen Karten zeigen, sondern es genügt, die Karten in einer Überdeckung von M bzw. N zu betrachten; denn sind $\varphi_1 : \tilde{U}_1 \rightarrow U_1$ und $\varphi_2 : \tilde{U}_2 \rightarrow U_2$ lokale Karten mit $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, so gilt (für eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{C}$):

$$f \circ \varphi_1 \text{ glatt (auf } \varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2)) \Leftrightarrow f \circ \varphi_2 \text{ glatt (auf } \varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2)),$$

denn $f \circ \varphi_1 = (f \circ \varphi_2) \circ (\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)$.

Kartenwechsel glatt per Definition

Analog für Abbildungen. Damit definieren wir weiter:

- \triangleright f **Diffeomorphismus** $:\Leftrightarrow$ f glatt, bijektiv und f^{-1} glatt
- \triangleright M, N **diffeomorph** $:\Leftrightarrow$ Es existiert ein Diffeomorphismus $f : M \rightarrow N$

Diffeomorphie ist der natürliche Begriff dafür, dass zwei Mannigfaltigkeiten im Wesentlichen gleich sind.

Beispiel: \mathbb{R}/\mathbb{Z} ist diffeomorph zu $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, denn $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow S^1, r + \mathbb{Z} \mapsto (\cos 2\pi r, \sin 2\pi r)$ ist ein Diffeomorphismus (Übung).

Bemerkung: Jede lokale Karte ist ein Diffeomorphismus $\tilde{U} \rightarrow U$.

Ist umgekehrt eine Mannigfaltigkeit mit einem Atlas gegeben, so kann ich zu dem Atlas jeden beliebigen weiteren Diffeomorphismus $\varphi : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow U \subset M$ (mit \tilde{U}, U offen) hinzufügen und erhalte wieder einen Atlas. Dies ist ein **maximaler Atlas** in dem Sinne, dass es keinen Atlas gibt, der diesen echt enthält. Man sieht auch sofort, dass M mit dem ursprünglichen Atlas diffeomorph ist zu M mit dem neuen, maximalen Atlas. Es ist nützlich, immer alle solchen φ als Karten zuzulassen.

Damit kann man folgende lästige Spitzfindigkeit ausräumen: Zwei verschiedene Atlanten auf einer Menge M können durchaus zu 'derselben' Mannigfaltigkeit führen, obwohl Definition (IV.1.1) eigentlich etwas anderes sagt. Was heißt 'dieselbe'? Dass dieselben Funktionen glatt sind. Äquivalent dazu ist, dass jede Karte des einen Atlas' glatt ist bzgl. des anderen Atlas'; oder dass die von den beiden Atlanten definierten maximalen Atlanten gleich sind.

Genaugenommen ist also eine Mannigfaltigkeit gegeben durch eine Menge M zusammen mit einem maximalen Atlas.

Z.B. ist die Sphäre S^2 mit dem durch die beiden stereographischen Projektionen gegebenen Atlas dieselbe Mannigfaltigkeit wie S^2 mit dem Atlas, der durch die Darstellungen der sechs offenen Halbsphären (oben, unten, vorne, hinten, links, rechts) als Graphen gegeben ist.

²Dies ist der Grund, dass wir im ersten Teil der Vorlesung – über Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n – viele Begriffe mittels lokaler Karten eingeführt haben: Sie sind damit direkt auch für abstrakte Mannigfaltigkeiten definiert.

Beispiel: \mathbb{R}^2 mit einer Karte $\text{id} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Andere Karte:

$$\begin{aligned} \varphi : (r, \theta) &\mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta), \\ \mathbb{R}_+ \times (0, 2\pi) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \text{ und } x \geq 0\} \end{aligned}$$

(Polarkoordinaten; genauer sind Polarkoordinaten die Umkehrabbildung φ^{-1} , siehe unten)

Rechnen in einer lokalen Karte

Um auf einer Mannigfaltigkeit zu rechnen, ist es oft (aber nicht immer!) nützlich, dies bzgl. einer lokalen Karte zu tun. Dies bedeutet Folgendes.

Gegeben eine lokale Karte $\varphi : \tilde{U} \rightarrow U$. Stattdessen können wir auch die Umkehrabbildung $x := \varphi^{-1} : U \rightarrow \tilde{U}$ betrachten. Diese hat folgende Bedeutung: Wegen $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ ist $x = (x^1, \dots, x^n)$ mit Komponentenfunktionen $x^j : U \rightarrow \mathbb{R}$. Diese nennen wir die durch φ definierten **lokalen Koordinaten** auf U und x ein **Koordinatensystem**.

Dies macht Sinn, da jedes $p \in U$ durch die n Zahlen $x^1(p), \dots, x^n(p)$ eindeutig charakterisiert wird. Ein Koordinatensystem ist also eine Kodierung von Punkten durch Zahlentupel.

Wir können die x^j auch wie folgt schreiben: Koordinaten in $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit u^1, \dots, u^n . Also ist $u^j : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$ für jedes j , z.B. $u^1(4, -1, 9) = 4$. Dann ist $x^j = u^j \circ \varphi^{-1}$.

Offenbar ist es egal, ob wir eine lokale Karte oder die zugehörigen lokalen Koordinaten angeben. Wir werden daher mal das eine und mal das andere tun und auf die Unterscheidung keinen großen Wert legen.

In lokalen Koordinaten können wir nun die partielle Ableitung einer glatten Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ definieren:

$$\frac{\partial f}{\partial x^j} := \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial u^j} \quad \text{genauer} \quad \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) = \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial u^j}(\varphi^{-1}(p))$$

Wir schreiben auch $\frac{\partial f}{\partial x^j}|_p = \frac{\partial f}{\partial x^j}(p)$, wenn dies übersichtlicher ist (wegen vieler Klammern). Wie im \mathbb{R}^n hat $\frac{\partial f}{\partial x^j}(p)$ die Bedeutung der Änderungsgeschwindigkeit des Funktionswertes $f(q)$, wenn sich q auf der Mannigfaltigkeit so bewegt, dass alle Koordinaten $x^k(q)$ mit $k \neq j$ konstant bleiben und sich $x^j(q)$ mit Geschwindigkeit 1 vergrößert; genauer gesagt, der momentanen Änderungsgeschwindigkeit im Zeitpunkt, wo q durch den Punkt p läuft.

Beispiel:

$$\frac{\partial x^j}{\partial x^j} = \frac{\partial(x^j \circ \varphi)}{\partial u^j} = \frac{\partial(u^j \circ \varphi^{-1} \circ \varphi)}{\partial u^j} = \frac{\partial u^j}{\partial u^j} = 1$$

Wichtig: Der Ausdruck $\frac{\partial f}{\partial x^j}$ ist nur bzgl. einer gegebenen Karte definiert. Wählt man eine andere Karte, so ändert sich der Wert dieses Ausdrucks.

IV.2. Der Tangentialraum

Der Tangentialraum in einem Punkt einer Mannigfaltigkeit ist die Menge aller Tangentialvektoren in diesem Punkt. Für Untermannigfaltigkeiten $M \subset \mathbb{R}^N$ haben wir Tangentialvektoren als die Ableitungen von Kurven definiert, die in M verlaufen und durch besagten Punkt gehen. Diese Ableitung ist ein Vektor im umgebenden Raum \mathbb{R}^N . Da hier kein umgebender Raum existiert und wir den Begriff 'Vektor' erst definieren wollen, gehen wir wie folgt vor.

IV.2.1 Definition

Sei M Mannigfaltigkeit, $p \in M$. Ein **Tangentialvektor** in p ist eine Äquivalenzklasse $[\gamma]$ von Kurven

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \text{ mit } \gamma(0) = p \text{ (für ein } \varepsilon > 0),$$

wobei zwei solche Kurven γ_1, γ_2 äquivalent heißen sollen, falls für eine lokale Karte $\varphi : \tilde{U} \rightarrow U$ mit $p \in U$ und mit $\tilde{\gamma}_i := \varphi^{-1} \circ \gamma_i$ gilt:

$$\tilde{\gamma}_1(0) = \tilde{\gamma}_2(0)$$

Offensichtlich ist dies eine Äquivalenzrelation. Weiter unten (unter ‚Kartenwechsel‘) werden wir sehen: Gilt dies bezüglich einer Karte, so gilt es bezüglich jeder Karte.

Wir stellen uns einen Tangentialvektor also als momentane Änderungsgeschwindigkeit eines bewegten Punktes vor, als ‚Momentangeschwindigkeit‘.

IV.2.2 Definition

Der **Tangentialraum** $T_p M$ an M im Punkt p ist die Menge aller Tangentialvektoren an M im Punkt p .

Das Hübsche an unsere Definition von Tangentialvektoren ist, dass man damit unmittelbar die Intuition für die Ableitung (Differential genannt) einer Abbildung in eine Definition verwandeln kann.

IV.2.3 Definition

Sei $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung und $p \in M$. Das **Differential** $dF|_p$ von F in p ist die Abbildung

$$\begin{aligned} dF|_p : T_p M &\rightarrow T_{F(p)} N \\ dF|_p([\gamma]) &= [F \circ \gamma] \end{aligned}$$

Die Definition ist formal sinnvoll, denn:

- ▷ Ist $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ eine Kurve mit $\gamma(0) = p$, so ist $F \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N$, das Bild von γ unter der Abbildung F , eine Kurve in N , und $(F \circ \gamma)(0) = F(p)$. Damit ist tatsächlich $[F \circ \gamma] \in T_{F(p)} N$.
- ▷ $dF|_p(v)$ ist wohldefiniert, d.h. $[\gamma_1] = [\gamma_2] \Rightarrow [F \circ \gamma_1] = [F \circ \gamma_2]$. (Übung)

$dF|_p$ beschreibt also die Änderungsrate von F , in folgendem Sinn: Sei $v \in T_p M$, und der Punkt q bewege sich mit Geschwindigkeit v von p fort (also $q = \gamma(t)$ für $v = [\gamma]$). Dann ist $dF|_p(v)$ die Geschwindigkeit, mit der sich $F(q)$ von $F(p)$ fortbewegt.

Es folgt unmittelbar:

IV.2.4 Satz (Kettenregel)

Seien M, N, K Mannigfaltigkeiten und $F : M \rightarrow N, G : N \rightarrow K$ glatt. Dann gilt Für $p \in M$

$$d(G \circ F)|_p = dG|_{F(p)} \circ dF|_p$$

Beweis: Sei $v \in T_p M, v = [\gamma]$. Dann ist

$$d(G \circ F)|_p([\gamma]) = [(G \circ F) \circ \gamma] = [G \circ (F \circ \gamma)] = dG|_{F(p)}([F \circ \gamma]) = dG|_{F(p)}(dF|_p([\gamma]))$$

Bei der dritten Gleichheit wurde verwendet, dass $(F \circ \gamma)(0) = F(\gamma(0)) = F(p)$. □

Aus der Kettenregel folgt sofort:

Ist $F : M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus, so ist $dF|_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ für alle $p \in M$ bijektiv und

$$(dF|_p)^{-1} = d(F^{-1})|_{F(p)}$$

(Setze $G = F^{-1}$ und wende die Kettenregel auf $G \circ F$ und $F \circ G$ an.)

Lineare Struktur

Definition IV.2.1 hat auch einen Nachteil: Es ist nicht unmittelbar klar, wie man zwei Tangentialvektoren addieren kann. Wir gehen so vor: Zuerst sehen wir uns den Spezialfall offener Teilmengen des \mathbb{R}^n an, dann übertragen wir die dort erhaltene Vektorraumstruktur (= lineare Struktur) des Tangentialraums mittels lokaler Karten und Definition IV.2.3 auf Mannigfaltigkeiten.

Beispiel: Die einfachsten n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten sind offene Mengen $U \subset \mathbb{R}^n$. Was ist $T_p U$ für $p \in U$?

Wir verwenden $\phi = \text{id}$ als lokale Karte. Nach Definition ist $[\gamma_1] = [\gamma_2] \iff \dot{\gamma}_1(0) = \dot{\gamma}_2(0)$. Damit ist die Abbildung

$$T_p U \rightarrow \mathbb{R}^n, [\gamma] \mapsto \dot{\gamma}(0)$$

wohldefiniert und injektiv. Sie ist auch surjektiv, da zu $\xi \in \mathbb{R}^n$ der Weg $\gamma(t) = p + t\xi$ genau $\dot{\gamma}(0) = \xi$ erfüllt. Also:

IV.2.5 Lemma

Für $U \subset \mathbb{R}^n$ offen können wir Tangentialvektoren in $T_p U$ als Vektoren im \mathbb{R}^n auffassen. Dabei entspricht der Äquivalenzklasse der Kurve γ mit $\gamma(0) = p$ der Vektor $\dot{\gamma}(0)$.

Damit können wir identifizieren

$$T_p U \equiv \mathbb{R}^n$$

Da \mathbb{R}^n ein Vektorraum ist (wir können Vektoren addieren und mit Skalaren multiplizieren), wird dadurch $T_p U$ zu einem Vektorraum.

Seien $M = U \subset \mathbb{R}^n$, $N = V \subset \mathbb{R}^m$ offen und $F : U \rightarrow V$ glatt. Dann stimmt das oben definierte Differential von F bei $p \in U$ mit dem ‚alten‘ (z.B. aus Analysis II bekannten) überein, wenn man $T_p U \equiv \mathbb{R}^n$ und $T_{F(p)} V \equiv \mathbb{R}^m$ identifiziert. Um dies nachzuprüfen, bezeichne das alte Differential mit $DF|_p$. Sei $v \in T_p U$, $v = [\gamma]$. Als Vektor im \mathbb{R}^n ist $v = \dot{\gamma}(0)$. Nach Definition ist $dF|_p([\gamma]) = [F \circ \gamma]$, und als Vektor im \mathbb{R}^m ist dies $(F \circ \gamma)'(0) = DF|_{\gamma(0)}(\dot{\gamma}(0)) = DF|_p(v)$ nach der Kettenregel für DF . Also folgt

$$dF|_p(v) = DF|_p(v)$$

wie behauptet.

Bemerkung: Die Identifizierung oben verallgemeinert sich auf Vektorräume wie folgt. Sei V ein n -dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum. Dann ist V eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit. Eine Karte erhält man mittels einer Basis (v_1, \dots, v_n) von V : $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow V$, $(x^1, \dots, x^n) \mapsto \sum_i x^i v_i$.

Damit ist jede offene Teilmenge $U \subset V$ eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit (mittels der Einschränkung von φ als Karte). Für $p \in U$ hat man eine natürliche Identifizierung

$$T_p U \equiv V,$$

wiederum definiert durch $[\gamma] \mapsto \dot{\gamma}(0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(h) - \gamma(0)}{h}$. ‚Natürlich‘ heißt, dass man hierzu keine Basis von V zu wählen braucht.

Sei M eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit, $p \in M$, $\varphi : \tilde{U} \rightarrow U, p \in U$ lokale Karte. Da φ ein Diffeomorphismus ist, ist mit $x_0 = \varphi^{-1}(p)$

$$d\varphi|_{x_0} : T_{x_0}\tilde{U} \rightarrow T_pM$$

bijektiv. (Verwende Definition IV.2.3 und die darauf folgenden Überlegungen für die Abbildung φ , wobei \tilde{U} und U als Mannigfaltigkeiten betrachtet werden; offenbar ist $T_pU = T_pM$.) Nach dem Beispiel ist $T_{x_0}\tilde{U} \cong \mathbb{R}^n$. Mittels $d\varphi|_{x_0}$ übertragen wir nun die Vektorraumstruktur von \mathbb{R}^n auf T_pM .

Etwas konkreter:

Wir nennen für $v \in T_pM$ den \mathbb{R}^n -Vektor $(d\varphi|_{x_0})^{-1}(v)$ die **Darstellung von v bzgl. der Karte φ** und schreiben dafür (für den Moment) v_φ . Für $u, v, w \in T_pM$ und $a \in \mathbb{R}$ definieren wir:

$$u + v = w \Leftrightarrow u_\varphi + v_\varphi = w_\varphi$$

$$u = av \Leftrightarrow u_\varphi = av_\varphi$$

In Worten: Wir addieren zwei Tangentialvektoren in T_pM , indem wir ihre Darstellungen bzgl. φ addieren und das Resultat wieder in einen Vektor in T_pM umwandeln. Analog für Multiplikation mit Skalaren. Damit wird φ per Definition zu einer linearen Abbildung.

IV.2.6 Satz

- (1) Die wie oben auf T_pM definierte Vektorraumstruktur ist unabhängig von der Karte φ . Damit wird T_pM zu einem n -dimensionalen reellen Vektorraum.
- (2) Ist $F : M \rightarrow N$ glatt und $p \in M$, so ist $dF|_p : T_pM \rightarrow T_{F(p)}N$ linear.

Beweis siehe unten.

Man muss hier genau hinsehen: Die Vektorraumstruktur ist unabhängig von der Karte, aber die konkrete Darstellung eines Tangentialvektors als n -Tupel reeller Zahlen hängt von der Wahl der Karte ab (siehe unten)!

Rechnen in einer lokalen Karte für Tangentialvektoren

Eine lokale Karte $\varphi : \tilde{U} \rightarrow U \subset M$ definiert eine Basis von T_pM für $p \in U$ wie folgt. Setze

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p := d\varphi|_{x_0}(e_i) \quad (i = 1, \dots, n).$$

Dies sind gerade die Vektoren, deren Darstellung bzgl. der Karte φ die Standardvektoren e_i im \mathbb{R}^n sind.

Explizit $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p = [t \rightarrow \varphi(\varphi^{-1}(p) + t \cdot e_i)]$.

Da die $e_i, i = 1, \dots, n$ eine Basis des \mathbb{R}^n bilden und $d\varphi|_{x_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow T_pM$ ein Vektorraumisomorphismus ist, bilden die $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p, i = 1, \dots, n$ eine Basis von T_pM .

Wegen der Linearität von $d\varphi|_p$ ist für $X^1, \dots, X^n \in \mathbb{R}$ wegen $(X^1, \dots, X^n) = \sum_i X^i e_i$

$$\sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p := d\varphi|_{x_0}(X^1, \dots, X^n)$$

Mit anderen Worten: Der Vektor $\sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p \in T_pM$ hat bzgl. φ die Darstellung (X^1, \dots, X^n) .

Bemerkung: Die Vektoren $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ hängen von der Wahl der Koordinaten, d.h. der Karte φ ab. Ein Vektor in T_pM existiert unabhängig von Koordinaten; dies zeigt jedoch noch einmal, dass seine Darstellung mittels eines n -Tupels reeller Zahlen von der Wahl eines Koordinatensystems abhängt. Möchte man in anderen Koordinaten weiterrechnen, so muss man den Vektor vorher entsprechend transformieren (s.u.).

Bemerkung: Ist $M \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit, $\varphi : \tilde{U} \rightarrow U \subset M \subset \mathbb{R}^N$ lokale Karte und $p = \varphi(u), u \in \tilde{U}$, so ist

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \frac{\partial \varphi}{\partial u^i} \Big|_{u'}$$

wenn der neue Tangentialraum mit dem alten (d.h. als Unterraum von \mathbb{R}^N) identifiziert wird.

Das Differential in lokalen Koordinaten

Wir hatten bereits das Differential einer glatten Abbildung $F : M \rightarrow N$ bei $p \in M$ definiert. Wie berechnet man $dF|_p$ in lokalen Koordinaten $x = \varphi^{-1}$ für M (nahe p) und $y = \psi^{-1}$ für N (nahe $F(p)$)?

Zunächst beweisen wir die Linearität von $dF|_p$ (Satz IV.2.6(2)). Sei $\tilde{F} = \psi^{-1} \circ F \circ \varphi$ die Darstellung von F bzgl. der Karten φ, ψ . Es ist $\tilde{F} : \tilde{U}' \rightarrow \tilde{V}'$ für gewisse offene Teilmengen $\tilde{U}' \subset \mathbb{R}^n, \tilde{V}' \subset \mathbb{R}^m$. Nach Annahme ist \tilde{F} glatt, also ist $d\tilde{F}|_{x_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linear, wobei $x_0 = \varphi^{-1}(p)$. Nach der Kettenregel ist wegen $F = \psi \circ \tilde{F} \circ \varphi^{-1}$

$$dF|_p = d\psi \circ d\tilde{F} \circ d\varphi^{-1}$$

(mit korrekt gewählten Fußpunkten \cdot), und $d\psi, d\varphi^{-1}$ sind per Definition linear. Daher ist auch $dF|_p$ linear³.

Wegen der Linearität von $dF|_p$ genügt es, seine Werte auf einer Basis anzugeben.

IV.2.7 Satz

Sei $F : M \rightarrow N$ glatt, $p \in M$, und seien lokale Koordinaten x für M nahe p und y für N nahe $F(p)$ gegeben. Bezüglich der Basen $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, i = 1, \dots, n$ von $T_p M$ und $\frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{F(p)}, j = 1, \dots, m$ von $T_{F(p)} N$ lässt sich dann $dF|_p$ wie folgt schreiben:

$$dF|_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(p) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{F(p)}$$

Dabei sind F^1, \dots, F^m die Komponenten von F in Koordinaten, d.h. $F^j = y^j \circ F$.

Beweis: Der Übersichtlichkeit halber lassen wir die Fußpunkte in den folgenden Rechnungen weg. Zunächst sei daran erinnert, dass $\frac{\partial F^j}{\partial x^i} := \frac{\partial \tilde{F}^j}{\partial u^i}$ (vgl. Seite 84), wobei $\tilde{F}^j = F^j \circ \varphi$ die Komponenten von $\tilde{F} = \psi^{-1} \circ F \circ \varphi$ sind, also $\tilde{F} = (\tilde{F}^1, \dots, \tilde{F}^m) = \sum_{j=1}^m \tilde{F}^j e_j$. Per Definition (der partiellen Ableitung) ist

$$d\tilde{F}^j(e_i) = \frac{\partial \tilde{F}^j}{\partial u^i} = \frac{\partial F^j}{\partial x^i}, \text{ also } d\tilde{F}(e_i) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial F^j}{\partial x^i} e_j. \text{ Aus der Kettenregel folgt mit } F \circ \varphi = \psi \circ \tilde{F}$$

$$dF\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = dF(d\varphi(e_i)) = d\psi(d\tilde{F}(e_i)) = d\psi\left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial F^j}{\partial x^i} e_j\right)$$

und daraus die Behauptung wegen Linearität von $d\psi$ und $d\psi(e_j) = \frac{\partial}{\partial y^j}$. \square

Wir betrachten drei wichtige Spezialfälle: $F = \text{id}_M$ führt auf die Koordinatenwechsel-Formel, $N = \mathbb{R}$ entspricht Funktionen auf M , und $M = \mathbb{R}$ entspricht Kurven in N .

³Da wir Teil (1) des Satzes noch nicht bewiesen haben, ist hier die Linearität bzgl. der mittels φ, ψ definierten Vektorraumstruktur gemeint.

Koordinatenwechsel für Tangentialvektoren

Seien φ, ψ zwei lokale Karten für M nahe p und $x = \varphi^{-1}, y = \psi^{-1}$ die zugehörigen lokalen Koordinaten. Wie berechnet man die $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ aus den $\frac{\partial}{\partial y^j}|_p$?

Wenden wir Satz IV.2.7 mit $M = N$ und $F = \text{id}_M$ an. Dann ist $\tilde{F} = \psi^{-1} \circ \varphi = \kappa$ der Kartenwechsel. Statt κ^j schreiben wir auch y^j , da $\kappa = y \circ x^{-1}$, also $y = \kappa \circ x$ oder⁴ $y = \kappa(x)$. Damit erhalten wir (Fußpunkte weggelassen)

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j}$$

Beispiel: Polarkoordinaten in \mathbb{R}^2 : Seien x, y Standard (kartesische) und r, θ Polarkoordinaten für \mathbb{R}^2 , d.h. $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$. Indem wir r, θ statt x^1, x^2 und x, y statt y^1, y^2 nehmen, erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial}{\partial y} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial y} = -r \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

Beachte, dass hier $\frac{\partial}{\partial x} = e_1$ und $\frac{\partial}{\partial y} = e_2$ ist.

Es ist eine lehrreiche Übung, sich geometrisch zu überlegen, was $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}$ sind, und daran die Formeln zu überprüfen. (Die Fußpunkte sind hier weggelassen.)

Dual können wir fragen: Wie kann man die Darstellung eines Tangentialvektors $v \in T_p M$ bzgl. der x -Koordinaten in die Darstellung von v bezüglich der y -Koordinaten umrechnen?

Sei also $v = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ und $v = \sum_{j=1}^n Y^j \frac{\partial}{\partial y^j}$. Da $\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^m}$ eine Basis ist, folgt durch Koeffizientenvergleich aus $\sum_{j=1}^n Y^j \frac{\partial}{\partial y^j} = v = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i,j=1}^n X^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j}$

$$Y^j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^i} X^i$$

Man kann dies auch kürzer schreiben als $Y = d\kappa(X)$ und sieht dann, dass dies auch direkt aus $X = (d\varphi)^{-1}(v), Y = (d\psi)^{-1}(v)$ und $\psi^{-1} = \kappa \circ \varphi^{-1}$ mit der Kettenregel folgt. Dasselbe Argument zeigt:

- ▷ Die Äquivalenzbedingung in Definition IV.2.1 ist unabhängig von der Karte. Denn für $\tilde{\gamma}_i := \psi^{-1} \circ \gamma_i$ ist $\tilde{\gamma}_i = \kappa \circ \tilde{\gamma}_i$ und daher $\tilde{\gamma}_i(0) = d\kappa_{x_0}(\dot{\tilde{\gamma}}_i(0))$ mit $x_0 = \phi^{-1}(p)$, d.h. aus $\tilde{\gamma}_1(0) = \tilde{\gamma}_2(0)$ folgt $\tilde{\gamma}_1(0) = \tilde{\gamma}_2(0)$.
- ▷ Beweis von Satz IV.2.6(1): Ist $v_\psi (= Y)$ die Darstellung von v bzgl. ψ , so ist nachzuprüfen, dass für beliebige $u, v, w \in T_p M$ gilt $u_\psi + v_\psi = w_\psi \Leftrightarrow u_\varphi + v_\varphi = w_\varphi$ und $u_\psi = av_\psi \Leftrightarrow u_\varphi = av_\varphi$. Dies folgt sofort aus $v_\psi = d\kappa_{x_0}(v_\varphi)$ und analog für u und w wegen der Linearität von $d\kappa|_{x_0}$.

Funktionen

Wir bezeichnen Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit kleinen Buchstaben. Wegen $T_{f(p)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ ist das Differential

$$\begin{aligned} df|_p : T_p M &\rightarrow \mathbb{R} \\ df|_p([\gamma]) &= (f \circ \gamma)'(0) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(\gamma(t)) \end{aligned}$$

⁴wenn immer bequem, betrachten wir x, y nicht als Funktionen, sondern als die Koordinaten eines Punktes von M bzgl. φ und bzw. ψ

Das heißt, für einen Tangentialvektor $v \in T_p M$ ist $df|_p(v)$ die Richtungsableitung von f in Richtung v , d.h. die Änderungsrate von $f(p)$, wenn p sich entlang γ bewegt (für $v = [\dot{\gamma}]$). Aus Satz IV.2.7 folgt

$$df|_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p$$

da bzgl. der trivialen Karte $\psi = \text{id} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Tangentialvektor $\frac{\partial}{\partial y}|_{f(p)} \in T_{f(p)}\mathbb{R}$ mit $1 \in \mathbb{R}$ identifiziert wird. Dies ist der Grund für die Bezeichnung $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ für die Basistangentialvektoren.

Kurven

Nehmen wir $M = I$, ein Intervall in \mathbb{R} , in Satz IV.2.7 und schreiben dann M statt N , so erhalten wir eine Kurve in M , meist mit γ statt F bezeichnet: $\gamma : I \rightarrow M$. Dann ist für $t \in I$

$$d\gamma|_t : T_t I \rightarrow T_{\gamma(t)} M.$$

Wegen $T_t I \cong \mathbb{R}$ ist diese lineare Abbildung durch ihren Wert bei $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 1$ festgelegt. Wir setzen

$$\dot{\gamma}(t) := d\gamma|_t \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \in T_{\gamma(t)} M.$$

$\dot{\gamma}(t)$ ist der Tangentialvektor an γ zum Zeitpunkt t , denn: Für $t = 0$ ist $\dot{\gamma}(0)$ genau der durch die Kurve γ repräsentierte Vektor in $T_{\gamma(0)} M$, da der Vektor $\frac{\partial}{\partial t} \in T_0 I$ durch die Kurve $\gamma_0 : t \mapsto t$ repräsentiert ist und daher $d\gamma|_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = [\gamma \circ \gamma_0] = [\gamma]$ ist. Analog ist für beliebige t_0 der Vektor $\dot{\gamma}(t_0)$ durch die zeitversetzte Kurve $t \mapsto \gamma(t - t_0)$ dargestellt.

In lokalen Koordinaten x^1, \dots, x^n auf M gibt dann Satz IV.2.7

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial t}(t) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

wenn die $x^i(t)$ die Koordinaten von $\gamma(t)$ sind, d.h. $x^i(t) := x^i(\gamma(t))$. Das ist die übliche Notation.

IV.3. Vektorfelder

Erinnerung: Ein Vektorfeld auf einer Untermannigfaltigkeit M des \mathbb{R}^N ist definiert als eine glatte Abbildung

$$X : M \rightarrow \bigcup_{p \in M} T_p M \text{ mit } X_p \in T_p M \text{ für alle } p \in M.$$

(Wir schreiben meist X_p statt $X(p)$, um die Anzahl der Klammern zu reduzieren.)

Würden wir nun versuchen, diese Definition unverändert auf Mannigfaltigkeiten zu übernehmen, so würden wir aber schnell auf folgendes Problem stoßen: $\bigcup_{p \in M} T_p M$ ist keine Teilmenge eines \mathbb{R}^N , was Grundlage für die Definition von »glatt« war. Wir müssen also »Glattheit« irgendwie anders definieren. Dazu zunächst eine

IV.3.1 Definition

$$TM := \dot{\bigcup}_{p \in M} T_p M := \{(p, v) : p \in M, v \in T_p M\} \text{ heißt } \mathbf{Tangentialbündel}.$$

$\dot{\bigcup}$ bedeutet disjunkte Vereinigung.

IV.3.2 Lemma

TM ist $2n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, wenn man die Karten wie folgt definiert:

$$\Phi : \tilde{U} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \underbrace{T_U M}_{:= \bigcup_{p \in U} T_p M}$$

für Karten $\varphi : \tilde{U} \rightarrow U \subset M$, wobei

$$\Phi(u, (X^1, \dots, X^n)) = \left(\varphi(u), \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(u)} \right).$$

Beweis:

▷ Φ ist offensichtlich bijektiv.

▷ Kartenwechsel

$$(u, X) \mapsto \Psi^{-1} \circ \Phi(u, X) = ((\psi^{-1} \circ \varphi)(u), d(\psi^{-1} \circ \varphi)|_u(X))$$

sind glatt.

▷ TM ist Hausdorff'sch (einfache Übung). □

Bemerkung: Die kanonische Projektion $\pi : TM \rightarrow M, (p, v) \mapsto p$ ist glatt, denn in Koordinaten (u, X) auf TM bzw. u auf M ist sie gegeben durch $(u, X) \mapsto u$.

Wenn wir jetzt ein Vektorfeld als eine Abbildung $M \rightarrow TM$ definieren, haben wir eine Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten. Hier ist Glattheit definiert.

IV.3.3 Definition

Eine glatte Abbildung $X : M \rightarrow TM, p \mapsto X_p$ mit $X_p \in T_p M$ für alle p heißt **Vektorfeld auf M** .

Hier und im Folgenden schreibt man für ein Element (p, v) von TM der Einfachheit halber oft bloß v .

Bemerkung: Glattheit lässt sich auch auf einfache Weise mittels lokaler Karten definieren. Ein Vektorfeld X ist glatt, genau dann wenn für alle lokalen Karten φ gilt:

Ist $X_p = \sum X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ mit $X^i : U \rightarrow \mathbb{R}$, so sind die X^i glatt.

Daher braucht man an dieser Stelle nicht unbedingt den Begriff des Tangentialbündels. Er wird aber später wichtig werden.

IV.3.4 Definition

Die Menge aller Vektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit M bezeichnen wir mit $\mathfrak{X}(M)$.

Vektorfelder tun im Wesentlichen zwei Dinge:

- ▷ Vektorfelder erzeugen Flüsse (Stichworte: Integralkurven, 1-Parametergruppen, Differentialgleichungen)
- ▷ Vektorfelder leiten andere Objekte ab (z.B. Funktionen, andere Vektorfelder, Tensoren etc.; Stichwort: Lie-Klammer und Lie-Ableitung)

Integrialkurven und Fluss eines Vektorfeldes

IV.3.5 Definition

Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$ Vektorfeld auf einer Mannigfaltigkeit M . Eine Kurve $\gamma : I \rightarrow M$ ($I \subset \mathbb{R}$ Intervall) heißt **Integrialkurve von X** , falls gilt:

$$\dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)} \text{ für alle } t \in I.$$

Eine Integrialkurve zu X zu bestimmen, bedeutet, ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung zu lösen.

Am einfachsten sieht man das im \mathbb{R}^n (d.h. $M \subset \mathbb{R}^n$ offen): $X = (X^1, \dots, X^n)$, $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t))$. $\dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)}$ ist hier äquivalent zu

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}^1(t) &= X^1(\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t)) \\ &\vdots \\ \dot{\gamma}^n(t) &= X^n(\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t)) \end{aligned}$$

Gibt man $\gamma(t_0)$ für ein t_0 vor, hat man ein Anfangswertproblem, das nach dem aus Analysis II bekannten Satz (Satz von Picard-Lindelöf) lokal eindeutig lösbar ist. Die Voraussetzungen des Satzes sind erfüllt, da die X^i glatt, also lokal Lipschitz-stetig sind.

Auf einer Mannigfaltigkeit läuft das genauso, zumindest lokal, denn:

Bestimmen einer Integrialkurve in lokalen Koordinaten: Sei $X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ in den Koordinaten x auf $U \subset M$. Um eine Integrialkurve $\gamma : I \rightarrow U$ mit $\gamma(t_0) = p \in U$ zu finden, gehen wir wie folgt vor:

Wir bestimmen die Koordinaten $x^i(p)$ des Startpunktes und lösen das oben angegebene System von Differentialgleichungen mit der Anfangsbedingung

$$\gamma^i(t_0) = x^i(p).$$

Dann sind $\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t)$ die Komponenten von $\gamma(t)$ in den Koordinaten x , d.h. $\gamma^i = x^i \circ \gamma$ oder äquivalent $\gamma = \phi \circ (\gamma^1, \dots, \gamma^n)$ für die Karte $\phi = x^{-1}$.

Denn aus $\gamma = \phi \circ (\gamma^1, \dots, \gamma^n)$ folgt $\dot{\gamma} = \sum \dot{\gamma}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, und dies ist genau dann gleich $X_{\gamma(t)} = \sum X^i(\gamma(t)) \frac{\partial}{\partial x^i}$, wenn das angegebene Gleichungssystem gilt.

Beachte: der zuerst angegebene Fall mit $M \subset \mathbb{R}^n$ offen ist der Spezialfall, wo x^1, \dots, x^n die Standard- (kartesischen) Koordinaten auf \mathbb{R}^n sind.

Notation: Es ist üblich, $x^i(t)$ statt $\gamma^i(t)$ zu schreiben. Wegen der mehrfachen Verwendung des Symbols x^i kann dies anfangs etwas verwirrend sein, doch ist das Einsparen von Buchstaben auch nützlich, und man gewöhnt sich schnell daran.

Beispiel: $X = x\partial_x + y\partial_y$ auf \mathbb{R}^2 . Die Integrialkurve $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ mit $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ ergibt sich als Lösung von

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y$$

(\dot{x} wird gleich dem Koeffizienten von ∂_x gesetzt, analog für \dot{y}) zu $x(t) = e^t x_0, y(t) = e^t y_0$.

Alternativ kann man das Vektorfeld in Polarkoordinaten r, θ umschreiben und dort die Integrialkurven bestimmen: Es ist $X = r\partial_r$. Die Integrialkurve $(r(t), \theta(t))$ mit $r(0) = r_0, \theta(0) = \theta_0$ ist also die Lösung von

$$\dot{r} = r, \quad \dot{\theta} = 0,$$

also $r(t) = e^t r_0, \theta(t) = \theta_0$.

Das Resultat ist dasselbe wie in kartesischen Koordinaten, denn

$$(r_0, \theta_0) \text{ Polarkoordinaten von } (x_0, y_0) \Rightarrow (e^t r_0, \theta_0) \text{ Polarkoordinaten von } (e^t x_0, e^t y_0).$$

Das muss auch so sein, da die Definition des Begriffs Integrialkurve koordinatenunabhängig war und Integrialkurven eindeutig durch den Anfangspunkt bestimmt sind!

Hier ist eine Version des Satzes von Picard-Lindelöf für allgemeine Mannigfaltigkeiten, die auch präzisiert, was 'lokal' bedeutet, und im kompakten Fall sogar eine globale Aussage macht:

IV.3.6 Satz (Globaler Satz von Picard-Lindelöf auf Mannigfaltigkeiten)

Sei M eine Mannigfaltigkeit, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $p \in M$. Dann gibt es genau eine maximale Integralkurve $\gamma : I \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = p$; ihr Definitionsbereich I ist ein offenes Intervall. Falls M kompakt ist, ist $I = \mathbb{R}$, d.h. γ ist für alle Zeiten definiert.

Maximal bedeutet hier Folgendes:

Wenn $\gamma_1 : I_1 \rightarrow M$ eine Integralkurve von X ist mit $\gamma_1(0) = p$, so ist $I_1 \subset I$ und $\gamma_1 = \gamma$ auf I_1 .

Beweis:

(1) Lokale Existenz:

Wie wir oben gezeigt haben, ist das gerade der lokale Satz von Picard-Lindelöf im \mathbb{R}^n .

(2) Eindeutigkeit auf einem beliebigen $I \subset \mathbb{R}, I = (a, b) \ni 0$:

Seien $\gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow M$ zwei Integralkurven mit $\gamma_1(0) = p = \gamma_2(0)$.

Behauptung: Auf dem Intervall I gilt $\gamma_1 = \gamma_2$.

Beweis: Sei $T = \sup\{t \in I : \gamma_1(t) = \gamma_2(t)\}$. Zeige, dass $T = b$ ist:

Wäre $T \neq b$, so wäre $T \in I$, also $\gamma_1(T) = \gamma_2(T)$ wegen Stetigkeit der γ_i . Mit dem Argument aus 1 folgt die Eindeutigkeit von γ_i in einer Umgebung von T , d.h. für $t \in (T - \varepsilon, T + \varepsilon)$ gilt: $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$. Dies ist ein Widerspruch zur Definition von T und daher ist $T = b$.

Analog zeigt man $\inf\{t \in I : \gamma_1(t) = \gamma_2(t)\} = a$, und daraus folgt die Behauptung. \square

(3) Existenz einer maximalen Integralkurve:

Sei $I_{\max} = \bigcup\{I \text{ offenes Intervall} : \text{Es gibt eine Integralkurve } \gamma_I : I \rightarrow M \text{ mit } \gamma_I(0) = p\}$. Für $t \in I_{\max}$ definiere $\gamma(t) = \gamma_I(t)$, für ein beliebiges Intervall I mit $t \in I$, für das γ_I existiert. Wegen der Eindeutigkeit hängt $\gamma(t)$ nicht von der Wahl von I ab, damit ist γ eine Lösung auf I_{\max} .

(4) Kompakter Fall:

Sei M kompakt. Zu zeigen ist $I_{\max} = \mathbb{R}$:

Sei $I_{\max} = (a, b)$. Zeige: $a = -\infty, b = \infty$:

Angenommen, $b < \infty$. Wir zeigen zunächst, dass der Grenzwert $\lim_{t \rightarrow b^-} \gamma(t)$ existiert, dass also γ stetig nach b fortgesetzt werden kann.

Sei $t_k = b - \frac{1}{k}$ und $q_k = \gamma(t_k)$. Wegen der Kompaktheit gibt es eine konvergente Teilfolge der q_k , sagen wir $q_{k'} \rightarrow q$. Um rechnen zu können, transportieren wir alles nach \mathbb{R}^n : Wähle eine Karte $\varphi : \tilde{U} \rightarrow U \ni q$ und setze $\tilde{\gamma} = \varphi^{-1} \circ \gamma$, $\tilde{X} = (\varphi^{-1})_*(X)$, $p_k = \varphi^{-1}(q_k)$ und $p = \varphi^{-1}(q)$. OBdA. ist $\|\tilde{X}\|$ auf \tilde{U} durch eine Schranke C beschränkt. Für einen ganz in U verlaufenden Abschnitt $\gamma([s, t])$ gilt dann:

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(t) - \tilde{\gamma}(s) &= \int_s^t \tilde{\gamma}'(\tau) d\tau \\ \Rightarrow \|\tilde{\gamma}(t) - \tilde{\gamma}(s)\| &\leq \int_s^t \|\tilde{\gamma}'(\tau)\| d\tau \leq |t - s| \cdot \|\tilde{\gamma}'(\tau)\| = |t - s| \cdot \|\tilde{X}_{\tilde{\gamma}(\tau)}\| \leq |t - s| \cdot C \end{aligned}$$

Ein einfaches Widerspruchsargument zeigt nun, dass, falls \tilde{U} eine ε -Kugel um $\tilde{\gamma}(s)$ enthält, die Kurve $\gamma(t)$ für $|t - s| < \frac{\varepsilon}{C}$ nicht die Menge U verlassen kann. Daraus folgt, dass für k' groß genug die Kurve $\gamma(t)$ für $t \in (t_{k'}, b)$ ganz in U verläuft und dort einer Cauchy-Bedingung genügt;

damit folgt $\gamma(t) \rightarrow q$ für $t \rightarrow b$. Also kann γ nach b stetig fortgesetzt werden. Wegen $\dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)}$ ist die Fortsetzung sogar differenzierbar.

Laut dem lokalen Existenzsatz gibt es nun in einer Umgebung von q eine Integralkurve $\gamma_1 : (b - \varepsilon, b + \varepsilon) \rightarrow M$ mit $\gamma_1(b) = q$. γ und γ_1 sind beides Integralkurven durch b und daher ist $\gamma(t) = \gamma_1(t)$ für alle $t \in (b - \varepsilon, b]$, γ kann also verlängert werden. Auf diese Weise führt $b < \infty$ zu einem Widerspruch. Analoges gilt für a . \square

Bemerkung: Kompaktheit von M ist eine hinreichende Bedingung für $I = \mathbb{R}$, keine notwendige. Zum Beispiel gilt für $X = \frac{\partial}{\partial x}$ auf \mathbb{R} und beliebigen Anfangspunkt, dass die Lösung auf ganz \mathbb{R} existiert. Allgemeiner gilt dies für Vektorfelder X auf \mathbb{R}^n , für die $\|X_p\|$ höchstens linear in $\|p\|$ wächst (wenn $\|p\| \rightarrow \infty$; das heißt, es gibt $C \in \mathbb{R}$ mit $\|X\| \leq C + C\|p\|$ für alle $p \in \mathbb{R}^n$).

Eine schwächere hinreichende Bedingung für Mannigfaltigkeiten ist, dass es eine kompakte Teilmenge $K \subset M$ gibt, so dass $V_p = 0$ für alle $p \notin K$ (selber Beweis wie oben).

Beispiel: $M = \mathbb{R}$, $X(x) = x^2 \frac{\partial}{\partial x}$
Schreibe $\gamma = x$. Dann gilt:

$$\dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)} \Leftrightarrow \dot{x} = x^2 \Leftrightarrow \frac{\dot{x}}{x^2} = 1 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{x}\right)' = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{x} = t + c \Leftrightarrow x(t) = -\frac{1}{t+c}$$

Die zweite Äquivalenz gilt nur, falls $x(t) \neq 0$. Die Anfangsbedingung sei $x(0) = p$. Für $p \neq 0$ bestimmt p die Konstante c . Wir erhalten die Lösungen:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\frac{1}{p} - t} && \text{auf } I = \left(-\infty, \frac{1}{p}\right), && \text{falls } p > 0 \\ x(t) &= \frac{1}{\frac{1}{p} - t} && \text{auf } I = \left(-\frac{1}{p}, \infty\right), && \text{falls } p < 0 \\ x(t) &= 0 && \text{auf } I = \mathbb{R}, && \text{falls } p = 0 \end{aligned}$$

(Der Definitionsbereich ergibt sich wie folgt: Er muss ein Intervall sein. Er muss $t = 0$ erhalten. Und er muss maximal mit diesen Eigenschaften sein.) Beachte: Falls $p \neq 0$, so ist $x(t)$ nicht für alle t definiert, denn die Lösung geht in endlicher Zeit gegen unendlich.

Zur besseren Unterscheidung bezeichnen wir im Folgenden die maximale Integralkurve, die durch einen Punkt p geht, auch mit γ_p und das Intervall, auf dem sie definiert ist, mit I_p .

Annahme: Im Folgenden werden wir der Einfachheit immer annehmen, dass $I_p = \mathbb{R}$ für alle p gilt.

IV.3.7 Satz (Zusatz zu IV.3.6)

(1) γ_p hängt glatt von p ab, das heißt

$$\begin{aligned} (p, t) &\mapsto \gamma_p(t) \\ M \times \mathbb{R} &\rightarrow M \end{aligned}$$

ist glatt.

(2) Der Satz und der Zusatz (1) gelten analog für zeitabhängige Vektorfelder $X(t)$. Dies sind per Definition Abbildungen $I \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, für die $(t, p) \mapsto X(t)_p$ glatt ist. Integralkurven sind definiert durch die Bedingung

$$\dot{\gamma}(t) = X(t)_{\gamma(t)}$$

Beweis:

- (1) Dies folgt direkt daraus, dass die Lösung einer Differentialgleichung glatt vom Anfangswert abhängt.
- (2) Vollkommen analog zum Beweis für zeitunabhängige Vektorfelder.

Alternative Idee: Dem zeitabhängigen Vektorfeld $X(t)$ ordnet man ein (zeitunabhängiges) Vektorfeld \tilde{X} auf der Mannigfaltigkeit $I \times M$ zu: $\tilde{X}_{(s,p)} = \frac{\partial}{\partial s} + X(s)_p$, wobei $T_{(s,p)}(\mathbb{R} \times M) = T_s\mathbb{R} \oplus T_pM$ identifiziert ist. Man prüft leicht nach, dass Integralkurven von $X(t)$ denen von \tilde{X} entsprechen (ist γ Integralkurve für $X(t)$, so ist $\tilde{\gamma}(t) = (t, \gamma(t))$ Integralkurve für \tilde{X}), und wendet dann das schon Bewiesene auf \tilde{X} an. Details als Übung. \square

Wir werden im Folgenden immer zeitunabhängige Vektorfelder betrachten.

IV.3.8 Definition

Der **Fluss** eines Vektorfeldes X ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : (p, t) &\mapsto \gamma_p(t) \\ M \times \mathbb{R} &\rightarrow M \end{aligned}$$

Wir werden meistens $\Phi_t(p)$ statt $\Phi(p, t)$ schreiben. Φ_t bildet einen Punkt in M auf einen Punkt in M ab. Φ enthält dieselbe Information wie alle Integralkurven γ_p zusammen, aber der Fokus ist ein anderer:

Man kann sich das so vorstellen, dass das Vektorfeld X die Strömung eines realen Flusses beschreibt. Genauer ist $X(p)$ die Geschwindigkeit des Flüssigkeitspartikels, das sich am Ort p befindet, und wir nehmen an, dass dies nicht von t abhängt (obwohl natürlich zu verschiedenen Zeitpunkten verschiedene Partikel bei p sein werden) – die Strömung heißt dann stationär. Ein Partikel, das sich zum Zeitpunkt 0 am Punkt p in diesem Fluss befindet, befindet sich zum Zeitpunkt t am Punkt $\Phi_t(p)$.

$\Phi_t : M \rightarrow M$ sagt also, wohin sämtliche Partikel von M in der Zeit t geflossen sind.

Beispiele: (1) Sei $M = \mathbb{R}^n$ und $X_p = v$ für alle p , für ein $v \in \mathbb{R}^n$ (ein konstantes Vektorfeld). Die Lösung von

$$\dot{\gamma}_p(t) = v, \quad \gamma_p(0) = p$$

ist $\gamma_p(t) = p + tv$, also ist $\Phi_t(p) = p + tv$.

Also ist z.B. $\Phi_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Translation um den Vektor v .

- (2) Sei $M = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, Koordinaten wie früher eingeführt, d.h. wir schreiben Punkte in M als Äquivalenzklassen $[x]$ von Zahlen $x \in \mathbb{R}$, und die Koordinate eines Punktes $[x]$ ist definiert als der Repräsentant x in einem fest gewählten offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ der Länge höchstens 1 (jedes solche I definiert ein Koordinatensystem).

Die Koordinaten eines Punktes $p \in M$ in verschiedenen solchen Koordinatensystemen unterscheiden sich um ganze Zahlen. Das Vektorfeld $\frac{\partial}{\partial x}$ ist jedoch auf ganz M wohldefiniert, unabhängig von der Wahl von I .

Eine Funktion auf M kann als 1-periodische Funktion auf \mathbb{R} aufgefasst werden. Ein Vektorfeld auf M hat die Form $X(x) = a(x) \frac{\partial}{\partial x}$, wobei a 1-periodisch ist.

Der Fluss von X wird folgendermaßen bestimmt:

- (a) Zu $p \in M$ wähle $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $[x_0] = p$.
Löse $\dot{x}(t) = a(x(t))$, $x(0) = x_0$
- (b) Setze $\Phi_t(p) = [x(t)]$ für dieses x .

Zum Beispiel für $X(x) = \frac{\partial}{\partial x}$ ergibt sich $\dot{x} = 1 \Rightarrow x(t) = x_0 + t$, also $\Phi_t(p) = p + t$ (Addition modulo 1). Interpretiert man \mathbb{R}/\mathbb{Z} als Kreis mit Umfang 1, so ist das eine Drehung um t , z.B. $\Phi_1 = \text{id}$.

Die »Integralkurveeigenschaft«, die der Fluss erfüllt, lässt sich auch so formulieren:

$$\frac{d}{dt}\Phi_t(p) = X_{\Phi_t(p)}$$

IV.3.9 Satz

Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$ und Φ der Fluss von X . Dann gilt:

- a) $\Phi_0 = \text{id}_M$
- b) $\Phi_{s+t} = \Phi_s \circ \Phi_t$
- c) $\Phi_t : M \rightarrow M$ ist ein Diffeomorphismus.

Beweis:

a) Per Definition ist $\Phi_0(p) = p$ für alle $p \in M$.

b) Überlegen Sie sich das zunächst anschaulich! Formaler Beweis:

Sei t fest und für $s \in \mathbb{R}$ sei $\gamma(s) = \Phi_s(\Phi_t(p))$ und $\tilde{\gamma}(s) = \Phi_{s+t}(p)$. Es gilt:

$$\triangleright \gamma(0) = \Phi_t(p) \text{ und } \dot{\gamma}(s) = \frac{d}{ds}\Phi_s(\Phi_t(p)) = X_{\Phi_s(\Phi_t(p))}, \text{ also } \dot{\gamma}(s) = X_{\gamma(s)}.$$

$$\triangleright \tilde{\gamma}(0) = \Phi_t(p) \text{ und } \dot{\tilde{\gamma}}(s) = \frac{d(s+t)}{ds} \cdot \frac{d}{d(s+t)}\Phi_{s+t}(p) = 1 \cdot X_{\Phi_{s+t}(p)}, \text{ also } \dot{\tilde{\gamma}}(s) = X_{\tilde{\gamma}(s)}.$$

γ und $\tilde{\gamma}$ haben also dieselbe Anfangsbedingung und erfüllen dieselbe Differentialgleichung. Wegen der Eindeutigkeit müssen sie folglich gleich sein.

c) $\triangleright \Phi_t$ ist glatt nach Satz IV.3.7.

\triangleright Es gilt $\Phi_t \circ \Phi_{-t} \stackrel{(b)}{=} \Phi_0(p) \stackrel{(a)}{=} \text{id}$ und $\Phi_{-t} \circ \Phi_t = \text{id}$, also ist Φ_{-t} Inverses zu Φ_t und Φ_t ist bijektiv.

$\triangleright (\Phi_t)^{-1} = \Phi_{-t}$ ist glatt. □

Bemerkung: Sei $\text{Diff}(M) := \{\text{Diffeomorphismen } M \rightarrow M\}$. $\text{Diff}(M)$ ist eine Gruppe bezüglich der Komposition. a) und b) sagen dann:

$$(\mathbb{R}, +) \rightarrow (\text{Diff}(M), \circ)$$

$$t \mapsto \Phi_t$$

ist ein Gruppenhomomorphismus. So einen Gruppenhomomorphismus nennt man auch **1-Parametergruppe** von Diffeomorphismen.

Wir haben also gesehen, dass jedes Vektorfeld eine 1-Parametergruppe von Diffeomorphismen definiert (die glatt ist in dem Sinn, dass die Abbildung $(t, x) \mapsto \Phi(t, x)$ glatt ist). Umgekehrt kann man zeigen, dass jede glatte 1-Parametergruppe von Diffeomorphismen auf diese Weise von einem Vektorfeld stammt (Übung). Wir haben also eine bijektive Relation

$$\text{Vektorfelder auf } M \longleftrightarrow \text{1-Parametergruppen von Diffeomorphismen von } M$$

Z.B. ist durch $\Phi_t(z) = e^{it}z$ eine 1-Parametergruppe von Diffeomorphismen von $\mathbb{C}(= \mathbb{R}^2)$ gegeben, mit zugehörigem Vektorfeld $V(z) = \left(\frac{d}{dt}\right)_{|t=0} \Phi_t(z) = iz$. Reell geschrieben ist das $V(x, y) = (-y, x)$.

Dies ist u.a. bei der Betrachtung von Symmetrien wichtig.

Der Raum der Vektorfelder

Es ist nützlich, sich einige elementare Eigenschaften des Raums $\mathcal{X}(M)$ klarzumachen.

IV.3.10 Proposition

Sei M eine Mannigfaltigkeit.

- (1) Die Menge $\mathcal{X}(M)$ ist ein \mathbb{R} -Vektorraum, wobei die Operationen in offensichtlicher Weise durch $(X, Y \in \mathcal{X}(M), a \in \mathbb{R})$

$$(X + Y)_p := X_p + Y_p$$

$$(aX)_p := aX_p$$

definiert sind.

- (2) $\mathcal{X}(M)$ ist ein $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -Modul, wobei für $g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ und $X \in \mathcal{X}(M)$ das Produkt von g mit X durch

$$(gX)_p := g(p)X_p$$

definiert ist.

Beweis als Übung. Die Eigenschaften folgen im Wesentlichen daraus, dass jedes $T_p M$ ein Vektorraum ist.

Der zweite Teil sagt aus, dass $(fg)X = f(gX)$ und dass die Operation $(g, X) \mapsto gX$ bilinear ist. Beides ist offensichtlich.

Der Punkt ist, dass man im ersten Teil das Vektorfeld nur mit einer Konstante multipliziert (alle Vektoren werden um denselben Faktor gestreckt oder gestaucht), während im zweiten Teil der Vektor X_p mit einer von p abhängigen Zahl gestreckt wird.

Ableiten einer Funktion in Richtung eines Vektorfelds

Die zweite ‚Funktion‘ von Vektorfeldern ist, dass man mit ihnen Funktionen ableiten kann.

IV.3.11 Definition

Sei $X \in \mathcal{X}(M)$ und $f \in C^\infty(M)$. Die Funktion $Xf \in C^\infty(M)$ sei definiert durch

$$(Xf)(p) = df|_p(X_p) \quad \forall p \in M.$$

Xf heißt die Ableitung von f in Richtung X .

Also eigentlich nichts Neues. Die neue Notation erleichtert aber oft das Leben, z.B. bei der Definition der Lie-Klammer weiter unten. In Koordinaten:

Für $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$, d.h. $X_p = \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ ist

$$df|_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \quad (\text{vgl. Seite 90})$$

Also

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i} f \right) (p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p).$$

Dies motiviert die Notation Xf und $\frac{\partial}{\partial x^i}$. Allgemein gilt für $X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$

$$Xf = \sum X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Bemerkung: Die Abbildung $(X, f) \mapsto Xf$ ist \mathbb{R} -bilinear. Es gilt die Produktregel

$$X(fg) = (Xf)g + fXg.$$

Die Lie-Klammer (Kommutator von Vektorfeldern)

IV.3.12 Definition (und Satz)

Seien $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Dann gibt es genau ein Vektorfeld $[X, Y]$, so dass gilt:

$$X(Yf) - Y(Xf) = [X, Y]f \quad \forall f \in C^\infty(M),$$

kurz

$$[X, Y] = XY - YX,$$

wobei X, Y und $[X, Y]$ als Operatoren $C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ aufgefasst werden. $[\cdot, \cdot]$ heißt **Lie-Klammer**.

Dies sieht zunächst etwas seltsam aus, ist aber eine der wichtigsten Operationen der »höheren« Mathematik überhaupt!

Beweis (und Koordinatenformel): Gegeben seien $X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ und $Y = \sum Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} X(Yf) &= \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sum_j Y^j \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) \\ &= \sum_{i,j} X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(Y^j \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) \\ &\stackrel{\text{Produktregel}}{=} \sum_{i,j} X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x^j} + \sum_{i,j} X^i Y^j \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} Y(Xf) &= \sum_{i,j} Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x^j} + \sum_{i,j} Y^i X^j \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \\ &= \sum_{i,j} Y^i X^j \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \\ \Rightarrow X(Yf) - Y(Xf) &= \sum_j \left(\underbrace{\sum_i \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right)}_{=: Z^j} \cdot \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) \\ &= \sum_j Z^j \cdot \frac{\partial f}{\partial x^j} = Zf \text{ mit } Z = \sum_j Z^j \cdot \frac{\partial}{\partial x^j} \quad \square \end{aligned}$$

Also ist in Koordinaten

$$\boxed{[X, Y] = \sum_j Z^j \cdot \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad Z^j = \sum_i \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right)}$$

mit Z^j wie oben.

Bemerkung: Im $U \subset \mathbb{R}^n$, wo Vektorfelder als Abbildungen $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ aufgefasst werden können, sagt diese Formel:

$$[X, Y]_p = \underbrace{dY|_p(X_p)}_{\text{hier wird } Y \text{ abgeleitet}} - \underbrace{dX|_p(Y_p)}_{\text{hier wird } X \text{ abgeleitet}}.$$

Der wesentliche Punkt ist, dass $f \mapsto X(Yf)$ und $f \mapsto Y(Xf)$ beides Differentialoperatoren zweiter Ordnung sind (f wird zweimal abgeleitet). Da aber bei beiden der Teil mit zweiter Ableitung gleich ist, ist $f \mapsto X(Yf) - Y(Xf)$ ein Differentialoperator *erster* Ordnung und nur deshalb durch ein Vektorfeld gegeben.

Bemerkung: Ist $D : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ ein Differentialoperator erster Ordnung, der auf Konstanten verschwindet, d.h. $D(c) = 0$ für alle $c \in \mathbb{R}$, so gibt es ein Vektorfeld X mit $D(f) = Xf$ für alle f .

Beweis: »Differentialoperator erster Ordnung« bedeutet, dass D in lokalen Koordinaten die Form $(Df)(x) = a(x)f(x) + \sum_i X^i(x) \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)$ für gewisse Funktionen a, X^i hat, und die Bedingung $D(c) = 0$ impliziert $a = 0$.

IV.3.13 Satz (Algebraische Eigenschaften der Lie-Klammer)

Die Lie-Klammer ist eine Abbildung $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ mit folgenden Eigenschaften:

- (1) $[\cdot, \cdot]$ ist \mathbb{R} -bilinear, d.h. für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ und analog für das zweite Argument.
- (2) $[\cdot, \cdot]$ ist antisymmetrisch, d.h. $[X, Y] = -[Y, X]$.
- (3) Es gilt die **Jacobi-Identität**

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Beweis durch einfaches Nachrechnen.

Bemerkung: Die Jacobi-Identität ist ein Ersatz für die Assoziativität, die *nicht* gilt: Im Allgemeinen ist $[X, [Y, Z]] \neq [[X, Y], Z]$. Genauer gesagt, gibt die Jacobi-Identität genau die Abweichung von der Assoziativität an, denn mittels (2) kann sie in $[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]]$ umgeschrieben werden (was allerdings viel unsymmetrischer aussieht).

IV.3.14 Definition

Ein \mathbb{R} - oder \mathbb{C} -Vektorraum V zusammen mit einer bilinearen Abbildung $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$, die (2) und (3) erfüllt, heißt **Lie-Algebra**.

Beispiel: Ist W ein Vektorraum und $V = \text{End}(W)$ die Menge der linearen Abbildungen $W \rightarrow W$, so ist V mit

$$[X, Y] := X \circ Y - Y \circ X, \quad X, Y \in \text{End}(W)$$

eine Lie-Algebra. Nachrechnen! (wie oben bei Vektorfeldern) Natürlich könnte man das auch mit $n \times n$ -Matrizen formulieren.

Bemerkung: Die Jacobi-Identität hat mehrere Umformulierungen, die jede für sich eine eigene Bedeutung entfalten:

- (1) Fixiere $X \in V$ und definiere die lineare Abbildung $A : V \rightarrow V$ durch $A(Y) = [X, Y]$. Dann ist die Jacobi-Identität äquivalent zu

$$A([Y, Z]) = [A(Y), Z] + [Y, A(Z)]$$

(nachrechnen!). Dies ist formal analog zur Produktregel (wobei A statt der Ableitung und $[\cdot, \cdot]$ statt dem Produkt zweier Funktionen steht). Eine lineare Abbildung A mit dieser Eigenschaft nennt man daher eine **Derivation** bzgl. dem Produkt $[\cdot, \cdot]$.

Dies führt zu einem anderen Beweis der Jacobi-Identität für Vektorfelder: Ist Φ der Fluss von X , so ist $A(Y) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \Phi_t^* Y$. Also folgt

$$\begin{aligned} A([Y, Z]) &= \frac{d}{dt}|_{t=0} \Phi_t^* [Y, Z] \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0} [\Phi_t^* Y, \Phi_t^* Z] = \left[\frac{d}{dt}|_{t=0} \Phi_t^* Y, Z \right] + \left[Y, \frac{d}{dt}|_{t=0} \Phi_t^* Z \right] \\ &= [A(Y), Z] + [Y, A(Z)] \end{aligned}$$

Hier sieht man, dass die Derivationseigenschaft tatsächlich von einer Art Produktregel kommt (das = in der zweiten Zeile, siehe auch Fußnote 9 beim Beweis von Proposition IV.3.17).

(2) Bezeichne die Abbildung A mit ad_X . Dann ist die Jacobi-Identität äquivalent zu

$$\text{ad}_{[X,Y]} = [\text{ad}_X, \text{ad}_Y]$$

(nachrechnen!). Die Klammer rechts ist dabei die zwischen Endomorphismen, wie im Beispiel.

Mit anderen Worten, $\text{ad} : V \rightarrow \text{End}(V)$ ist ein Algebra-Homomorphismus.

Beispiel: (\mathbb{R}^3, \times) ist eine Lie-Algebra, wobei \times das Kreuzprodukt ist.

Die Jacobi-Identität kann man direkt nachrechnen. Ein besserer Beweis geht ähnlich wie in Bemerkung (1) oben: Fixiere $u \in \mathbb{R}^3$, $u \neq 0$ (für $u = 0$ ist alles klar). Für $t \in \mathbb{R}$ sei $\Phi_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Rotation um den Winkel t mit Achse u entgegen dem Uhrzeigersinn (von der Spitze von u aus gesehen). Dann gilt

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Phi_t(v) = u \times v, \quad (\Phi_t u) \times (\Phi_t v) = \Phi_t(u \times v).$$

Dieselbe Rechnung wie oben (ohne die Sterne) zeigt dann, dass die lineare Abbildung $A(v) = u \times v$ eine Derivation bzgl. \times ist.

Bemerkung: Die Bilinearität gilt für Multiplikation mit Skalaren, aber nicht mit Funktionen: Ist $g \in C^\infty(M)$, so ist

$$\begin{aligned} [X, gY]f &= X(\underbrace{(gY)f}_{=g \cdot Yf}) - (gY)(Xf) \\ &= Xg \cdot Yf + g \cdot X(Yf) - (gY)(Xf) \\ &= Xg \cdot Yf + g \cdot [X, Y]f, \end{aligned}$$

also

$$[X, gY] = Xg \cdot Y + g \cdot [X, Y].$$

Das ist klar: In $[X, Y]$ wird Y (genauer gesagt dessen Koeffizienten) in Richtung X abgeleitet, daher muss hier die Produktregel zum Einsatz kommen.

Beispiel: In \mathbb{R}^2 bezeichne die Koordinaten mit (x, y) . Vektorfelder seien

$$\begin{aligned} X &= \frac{\partial}{\partial x} \\ Y &= x \cdot \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} [X, Y]f &= \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial f}{\partial y} \right) - \left(x \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial f}{\partial y} \right) - \left(x \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial f}{\partial x} \\ &= 1 \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + x \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - x \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ &= \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f, \end{aligned}$$

also

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, x \frac{\partial}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial y}$$

Beispiel: Die Lie-Klammer zweier Koordinatenvektorfelder $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$ und $Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$ ist $[X, Y] = 0$. Eine Art Umkehrung dieser Tatsache werden wir in Satz IV.3.23 kennenlernen.

Frage: Was ist die geometrische Bedeutung der Lie-Klammer?

Bevor wir dies beantworten, ist es sinnvoll, sich um ein paar Grundlagen zu kümmern.

Transformation geometrischer Objekte unter Abbildungen: Push-forward und Pull-back

Sei $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Wir wollen verstehen, wie verschiedene Arten geometrischer Objekte auf M und N mittels F in Beziehung gesetzt werden können. Dies ist aus zwei Gründen sinnvoll:

- (1) Im heutigen Verständnis der Wissenschaft Mathematik sind zentrale Gegenstände des Fachs einerseits die mathematischen Objekte/Strukturen (Mengen, Gruppen, Mannigfaltigkeiten etc.) und andererseits die (strukturerehaltenden) Abbildungen zwischen ihnen (z.B. Gruppenhomomorphismen, glatte Abbildungen etc.). Versteht man diese (was auch immer das im Einzelfall bedeuten mag), so versteht man schon sehr viel.
- (2) Konkreter (und Beispiel für (1)): Der Beweis von Satz IV.3.19 weiter unten wird sehr einfach.

Zunächst kann man mittels F gewissen Objekten auf M entsprechende Objekte auf N zuordnen:

Geometrisches Objekt auf M	Geometrisches Objekt auf N , das diesem bzgl. F entspricht
Punkt $p \in M$	$F(p) \in N$
Kurve $\gamma : I \rightarrow M$	$F \circ \gamma : I \rightarrow N$
Vektor $X_p \in T_p M$	$dF _p(X_p) \in T_{F(p)} N$

Wir nennen diese Operationen **push-forward**, da F Objekte von M nach N ‚vorwärtsschiebt‘. Beachten Sie, dass F nicht injektiv oder surjektiv sein muss.

Wie steht es mit Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{R}$? Um eine entsprechende Funktion $N \rightarrow \mathbb{R}$ zu finden, beginnen wir mit einem Punkt $q \in N$. Dazu wollen wir ein $p \in M$ finden, damit wir f anwenden können. Das p soll aus q mittels F gewonnen werden, also $p = F^{-1}(q)$, und wir erhalten $f \circ F^{-1} : N \rightarrow \mathbb{R}$.

Das geht aber nur, wenn F invertierbar ist! Geht es auch ohne diese Voraussetzung?

Was jedenfalls geht, ist der umgekehrte Weg: Starten wir mit einer Funktion $g : N \rightarrow \mathbb{R}$, so erhalten wir mit $g \circ F : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion auf M : $M \xrightarrow{F} N \xrightarrow{g} \mathbb{R}$. Das geht für beliebige F . Also:

IV.3.15 Definition

Sei $F : M \rightarrow N$ eine Abbildung und $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Der **pullback** von g unter F ist die Funktion $F^*g : M \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$F^*g = g \circ F, \quad \text{also } (F^*g)(p) = g(F(p)) \text{ für } p \in M$$

D.h. **man setzt einfach $F(p)$ in g ein.** (Beispiele siehe unten.) Wir setzen die Tabelle fort:

Funktion $g \circ F : M \rightarrow \mathbb{R}$	$g : N \rightarrow \mathbb{R}$
---	--------------------------------

Betrachten wir nun Vektorfelder $X \in \mathfrak{X}(M)$. Wie können wir X ein Vektorfeld auf N zuordnen? Zu $q \in N$ suchen wir einen Vektor in $T_q N$. Dazu finden wir zunächst $p \in M$ und nehmen dann $dF|_p(X_p)$. Welches p ? Wie bei Funktionen ist der einzige Kandidat für p , den man aus q mittels F erhält, $p = F^{-1}(q)$. Ausgeschrieben also $dF|_{F^{-1}(q)}(X_{F^{-1}(q)})$.

Da hier sowohl F als auch F^{-1} vorkommen, ist dies nur definiert, wenn F ein Diffeomorphismus ist – der Trick bei den Funktionen, mit N zu starten, nützt hier nichts. Dies ist der schon früher (Definition III.2.11) definierte Begriff des Push-forward eines Vektorfelds.

Schließlich betrachten wir noch Selbstabbildungen $\Psi : M \rightarrow M$. Wie bekommen wir daraus eine Abbildung $N \rightarrow N$? Indem wir vorne und hinten mit F bzw. F^{-1} komponieren. Wieder geht dies nur für Diffeomorphismen F . Also:

Für einen Diffeomorphismus $F : M \rightarrow N$ definieren wir:

Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$	$F_*(X) \in \mathfrak{X}(N)$
Abbildung $\Psi : M \rightarrow M$	$F \circ \Psi \circ F^{-1} : N \rightarrow N$

Wir fassen zusammen: Sei F glatt. Dann kann man mittels F Punkte, Kurven und Vektoren von M nach N vorwärtsschieben und Funktionen von N nach M zurückziehen. Ist F sogar ein Diffeomorphismus, so können wir Vektorfelder und Selbstabbildungen von M nach N vorwärtsschieben (und natürlich analog mittels F^{-1} von N nach M schieben).

Damit erhalten wir Abbildungen

$$F^* : C^\infty(N, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

und für Diffeomorphismen F

$$F_* : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(N), \quad F^* := (F^{-1})_* : \mathcal{X}(N) \rightarrow \mathcal{X}(M).$$

Man prüft leicht nach, dass diese Abbildungen linear sind. Die analogen Abbildungen zwischen $\text{Diff}(M)$ und $\text{Diff}(N)$ werden wir nicht brauchen.

Warum so und nicht anders? Diese Entsprechungen sind so gemacht, dass Relationen zwischen verschiedenen Typen von Objekten bestehen bleiben⁵, zum Beispiel:

$$(1) \quad X_p = [\gamma] \Rightarrow dF|_p(X_p) = [F \circ \gamma]$$

und für einen Diffeomorphismus F :

$$(2) \quad (\Phi_t)_{t \in \mathbb{R}} \text{ Fluss von } X \Rightarrow (F \circ \Phi_t \circ F^{-1})_{t \in \mathbb{R}} \text{ Fluss von } F_*(X)$$

$$(3) \quad \gamma \text{ Integralkurve von } X \text{ mit } \gamma(0) = p \Rightarrow F \circ \gamma \text{ Integralkurve von } F_*(X) \text{ mit } (F \circ \gamma)(0) = F(p)$$

$$(4) \quad Xf = h \Rightarrow (F^*X)(F^*f) = F^*h$$

$$(5) \quad [X, Y] = Z \Rightarrow [F_*X, F_*Y] = F_*Z$$

Man kann dies natürlich auch anders schreiben, z.B.

$$(F^*X)(F^*f) = F^*(Xf), \quad [F_*X, F_*Y] = F_*([X, Y])$$

für (4), (5). Diese Aussagen reflektieren die Tatsache, dass diese Konzepte (Differential dF , Fluss Φ und Integralkurve) koordinateninvariant definiert sind, man sagt auch **natürlich** sind. Diesen Zusammenhang kann man allgemein beweisen, es ist aber auch einfach, die entsprechenden Aussagen direkt zu beweisen. Alle eingeführten Konzepte werden in diesem Sinne natürlich sein.

Bemerkung: In vielen Büchern wird pushforward nicht für Funktionen und pullback nicht für Vektorfelder betrachtet. Wir tun es hier trotzdem, da es eine einheitliche Sicht der Dinge (z.B. sieht Formel (4) so sehr einfach aus) und ein einfaches Verständnis der Lie-Ableitung (siehe unten) erlaubt.

Beweis:

(1) gilt nach Definition.

(3) Übung.

(2) Nach (3) gilt:

$$\gamma \text{ Integralkurve von } X \text{ mit } \gamma(0) = p \Rightarrow F \circ \gamma \text{ Integralkurve von } F_*(X) \text{ mit } (F \circ \gamma)(0) = F(p).$$

Nach Definition ist $\Phi_t(p) = \gamma_p(t)$ und für den Fluss Ψ von $F_*(X)$ gilt $\Psi_t(F(p)) = F(\gamma_p(t))$, also $\Psi_t(F(p)) = F(\Phi_t(p))$, mit $q = F(p)$ also $\Psi_t(q) = F(\Phi_t(F^{-1}(q)))$.

⁵Gleichzeitig beantworten sie auch die Frage: Wie soll man's denn sonst machen?

(4),(5) Übung. □**Bemerkung:** Bei push-forward bleibt die Reihenfolge von M, N erhalten:

$$F : M \rightarrow N, \quad \text{dann } F_* : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(N).$$

Es gelten:

- ▷ Ist $F = \text{id} : M \rightarrow M$, so ist $\text{id}_*(X) = X$.
- ▷ Gegeben drei Mannigfaltigkeiten M, N und K sowie Diffeomorphismen $F : M \rightarrow N$ und $G : N \rightarrow K$, so gilt:

$$(G \circ F)_* = G_* \circ F_*$$

Eine Operation F_* mit diesen Eigenschaften nennt man **kovarianter Funktor**.⁶ F_* ist auch linear, d.h. $F_*(X + Y) = F_*X + F_*Y$, $F_*(aX) = aF_*X$ für Vektorfelder X, Y und $a \in \mathbb{R}$. Alle diese Eigenschaften sind direkt aus den Definitionen offensichtlich.

Dagegen dreht pull-back die Reihenfolge von M, N um:

$$F : M \rightarrow N, \quad \text{dann } F^* : C^\infty(N) \rightarrow C^\infty(M)$$

und es gelten:

- ▷ Ist $F = \text{id} : M \rightarrow M$, so ist $\text{id}^*(X) = X$.
- ▷ Gegeben drei Mannigfaltigkeiten M, N und K sowie Diffeomorphismen $F : M \rightarrow N$ und $G : N \rightarrow K$, so gilt:

$$(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$$

Beachte die umgekehrte Reihenfolge rechts!

Eine Operation F^* mit diesen Eigenschaften nennt man **kontravarianten Funktor**. Weiterhin ist F^* linear: $F^*(f + g) = F^*f + F^*g$ etc.

Zum Abschluss noch zwei Beispiele für pull-back:

- Beispiel:**
- ▷ Ist $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x$ die Projektion auf die x -Achse und $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion einer Variablen (also ‚eine Funktion von x ‘), so ist $(\pi^*f)(x, y) = f(x)$, d.h. π^*f ist die Funktion von (x, y) , die auf jeder vertikalen Geraden $\{x = x_0\}$ konstant ist und den Wert $f(x_0)$ hat.
 - ▷ $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F(x) = x + v$ Translation um den Vektor $v \in \mathbb{R}^n$:
 $(F^*f)(x) = f(x + v)$. Man erhält den Graphen von F^*f , indem man den Graphen von f um $-v$ (beachte Minuszeichen!) verschiebt.

Die Lie-Ableitung und die geometrische Bedeutung der Lie-Klammer

Die Lie-Ableitung ist eine Verallgemeinerung eines der grundlegendsten Konzepte der Analysis, der Ableitung. Sie wird uns helfen, die geometrische Bedeutung der Lie-Klammer zu verstehen.

IV.3.16 Definition

Sei M Mannigfaltigkeit und $X \in \mathcal{X}(M)$ ein Vektorfeld auf M . Für ein Objekt \mathcal{O} (Funktion, Vektorfeld, später auch Differentialform, Tensor) definiere die **Lie-Ableitung von \mathcal{O} in Richtung X** als

$$L_X \mathcal{O} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_t^* \mathcal{O}$$

wobei $(\Phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ der Fluss von X ist.

⁶Genauer besteht der Funktor darin, zu jeder Mannigfaltigkeit M den Raum $\mathcal{X}(M)$ und zu jedem Diffeomorphismus $F : M \rightarrow N$ die Abbildung $F_* : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(N)$ zuzuordnen. Für Einzelheiten schlagen Sie ‚Kategorientheorie‘ nach.

$L_X \mathcal{O}$ ist ein Objekt desselben Typs wie \mathcal{O} . Ausführlicher:

$$L_X \mathcal{O} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi_t^* \mathcal{O} - \mathcal{O}}{t}.$$

Wir betrachten hier nur Funktionen und Vektorfelder.⁷ Für diese reduziert sich das auf bekannte Operationen⁸:

IV.3.17 Proposition

- (1) Für $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ist $L_X f = Xf$.
- (2) Für $Y \in \mathcal{X}(M)$ ist $L_X Y = [X, Y]$.

Beweis: (1) Mit Kettenregel und Definitionen ist für $p \in M$

$$(L_X f)_p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\Phi_t^* f)(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\Phi_t(p)) = df|_{\Phi_0(p)} \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_t(p) \right) = df|_p (X_p) = (Xf)_p$$

- (2) Wir verwenden die Natürlichkeit der Operation $(Y, f) \mapsto Yf$ unter pullback, angewendet auf den Diffeomorphismus Φ_t :

$$\Phi_t^*(Yf) = (\Phi_t^* Y)(\Phi_t^* f)$$

für beliebige Funktionen f . Wir differenzieren beide Seiten nach t und setzen dann $t = 0$. Wegen $\Phi_0^* f = f$ und $\Phi_0^* Y = Y$ folgt⁹

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_t^*(Yf) = \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_t^* Y \right) f + Y \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_t^* f \right)$$

Wegen (1) und der Definition von $L_X Y$ also $X(Yf) = (L_X Y)f + Y(Xf)$. Damit folgt $(L_X Y)f = XYf - YXf = [X, Y]f$ für alle f , also die Behauptung. \square

Bemerkung (Geometrisches Verständnis der Lie-Ableitung):

Funktionen: Betrachte zunächst eine Funktion einer Variablen, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Wir können die Ableitung $f'(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p+t) - f(p)}{t}$ auf zwei Weisen verstehen:

- (a) Ich bewege mich entlang der Kurve $t \mapsto p + t$ (nach rechts, wenn t zunimmt) und betrachte dabei die Momentanänderung der Funktionswerte.
- (b) Ich bleibe beim Punkt p stehen und lasse die Funktion f (genauer ihren Graphen) nach links an mir vorbeiziehen. Dabei betrachte ich die Momentanänderung der Funktionswerte bei p .

Dies ist der Spezialfall $X = \frac{\partial}{\partial x}$, mit $\Phi_t(p) = p + t$. Da $\Phi_t^* f$ die um t nach links (für $t > 0$) verschobene Funktion f ist, beschreibt (b) genau die Formel

$$f'(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\Phi_t^* f)(p) - f(p)}{t} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\Phi_t^* f)(p).$$

Dasselbe gilt für Funktionen auf einer Mannigfaltigkeit M und ein Vektorfeld X auf M : (a) beschreibt $df|_p (X_p)$, und (b) beschreibt $(L_X f)(p)$ (wobei der Graph entgegen dem Fluss von X verschoben wird), und beides ist gleich.

Vektorfelder: Wollen wir ein Vektorfeld Y in Richtung des Vektorfelds X ableiten, so gehen wir wie in (b) vor: Für jedes t betrachten wir $\Phi_t^* Y$, dann bilden wir $(L_X Y)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\Phi_t^* Y)_p - Y_p}{t}$.

Bedeutung von $\Phi_t^* Y = (\Phi_{-t})_* Y$: Der Fluss von X „nimmt das Vektorfeld Y mit“ (und verzerrt es dabei). Da der Fluss von X zur Zeit $-t$ gleich dem Fluss von $-X$ zur Zeit t ist, folgt:

⁷Beachte, dass die Definition nur sinnvoll ist, wenn die ‚Objekte‘ einen Vektorraum bilden und wenn für sie pull-back unter Diffeomorphismen definiert ist. Dies ist für Funktionen und Vektorfelder erfüllt. Genau genommen braucht man noch topologische Eigenschaften für die Betrachtung der Grenzwerte, dieser sind hier unproblematisch.

⁸Die neue Notation ist aber durch die vereinheitlichte Sicht über verschiedene Objekttypen gerechtfertigt.

⁹Verwende folgende Tatsache aus Analysis II: Ist $(s, t) \mapsto h(s, t)$ eine nach s, t differenzierbare Funktion, so ist $\frac{d}{dt}(h(t, t)) = (\partial_s h)(t, t) + (\partial_t h)(t, t)$. Beweis mit Kettenregel. Hier $h(s, t) = (\Phi_s^* Y)(\Phi_t^* f)$.

$(L_X Y)_p$ ist die Momentanänderung des Vektors bei p , den wir beobachten, wenn wir im Punkt p sitzen und beobachten, wie Y von dem Fluss von $-X$ ‚mitgenommen‘ wird.

Die Lie Ableitung wird daher manchmal auch **fisherman's derivative** (Angler-Ableitung) genannt: Der Angler sitzt im Punkt p und beobachtet, wie der Fluss und alles, was in ihm treibt, an ihm vorüberzieht.

Beachte: Beschreibung (a) steht uns für Vektorfelder Y nicht zur Verfügung. Denn dazu müssten wir die Differenz $Y_{\Phi_t(p)} - Y_p$ bilden. Es ist aber $Y_{\Phi_t(p)} \in T_{\Phi_t(p)}M$, $Y_p \in T_pM$, und es macht keinen Sinn, die Differenz zwischen Vektoren in unterschiedlichen Vektorräumen zu bilden.¹⁰ Bei Beschreibung (b) passiert die Differenzbildung in T_pM .

Bemerkung: Es gibt einen wichtigen strukturellen (rechnerischen) Unterschied zwischen der Lie-Ableitung $L_X f$ von Funktionen f und der Lie-Ableitung $L_X Y$ von Vektorfeldern Y , in der Art der Abhängigkeit von $X \in \mathcal{X}(M)$. Am einfachsten sieht man dies in Koordinaten. Sei daher $X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

▷ Für eine Funktion f auf M ist

$$L_X f = Xf = \sum X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

▷ Für ein Vektorfeld $Y = \sum Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ist

$$L_X Y = [X, Y] = \sum_j Z^j \cdot \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad Z^j = \sum_i \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right)$$

wie vorher berechnet.

Beachte, dass bei $L_X Y$ Ableitungen von X auftreten, bei $L_X f$ aber nicht. Man sagt, $L_X Y$ ist bzgl. X nicht tensoriell ($L_X f$ aber schon). Mehr dazu später.

Eine der wichtigsten Anwendungen der Lie-Ableitung ist folgende **infinitesimale Charakterisierung der Invarianz** unter einem Fluss. Sie überträgt die Beziehung zwischen Vektorfeldern und 1-Parametergruppen auf die Lie-Ableitung.

IV.3.18 Satz

Sei X ein Vektorfeld auf M mit Fluss $(\Phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$. Für ein Objekt (Funktion, Vektorfeld, Tensor etc.) \mathcal{O} auf M sind äquivalent:

- (1) \mathcal{O} ist unter dem Fluss invariant, d.h. $\Phi_t^* \mathcal{O} = \mathcal{O}$ für alle t .
- (2) $L_X \mathcal{O} = 0$.

Dies ist das höhere Analogon zum Satz, dass eine Funktion auf \mathbb{R} genau dann konstant ist, wenn ihre Ableitung überall verschwindet.

Beweis: (1) \Rightarrow (2): Da $\Phi_t^* \mathcal{O}$ unabhängig von t ist, ist $L_X \mathcal{O} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \Phi_t^* \mathcal{O} = 0$.

(2) \Rightarrow (1): Sei $\mathcal{O}(t) = \Phi_t^* \mathcal{O}$. Dann ist für beliebige t

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{O}(t)}{dt} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi_{t+h}^* \mathcal{O} - \Phi_t^* \mathcal{O}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi_t^* (\Phi_h^* \mathcal{O} - \mathcal{O})}{h} \\ &= \Phi_t^* \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi_h^* \mathcal{O} - \mathcal{O}}{h} \right) \\ &= \Phi_t^* (L_X \mathcal{O}) = \Phi_t^* 0 = 0 \end{aligned}$$

¹⁰Sie könnten einwenden, dass man mit Hilfe einer lokalen Karte beide Tangentialräume $T_{\Phi_t(p)}, T_pM$ mit \mathbb{R}^n identifizieren und dann die Differenz bilden könnte. Das Ergebnis würde aber von der Wahl der Karte abhängen, wie man leicht nachrechnen kann. Wir wollen aber ein invariantes (koordinatenunabhängiges) Resultat – das macht die Geometrie aus.

unter Verwendung der Eigenschaften des pullback. Also ist $\mathcal{O}(t)$ konstant in t , d.h. $\mathcal{O}(t) = \mathcal{O}(0) = \mathcal{O}$ für alle t . \square

Erste geometrische Bedeutung der Lie-Klammer

Proposition IV.3.17(2) liefert die erste geometrische Bedeutung der Lie-Klammer. Wegen ihrer Bedeutung schreiben wir sie nochmals auf.

IV.3.19 Satz

Seien $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und sei Φ der Fluss von X . Dann gilt

$$[X, Y] = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\Phi_{-t})_* Y = \underbrace{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\Phi_{-t})_* Y - Y}{t}}_{\text{»Lie-Ableitung«}},$$

das heißt $[X, Y]$ ist die Änderungsgeschwindigkeit von Y unter dem Fluss von X .

Am Ende des Abschnitts ist ein direkter Beweis, ohne Verwendung der Lie-Ableitung, gegeben. Er ist viel länger. Das zeigt, wofür die Betrachtung von pull-back nützlich war. Denn nur pull-back erlaubte die Definition der Lie-Ableitung und damit den einfachen Beweis.

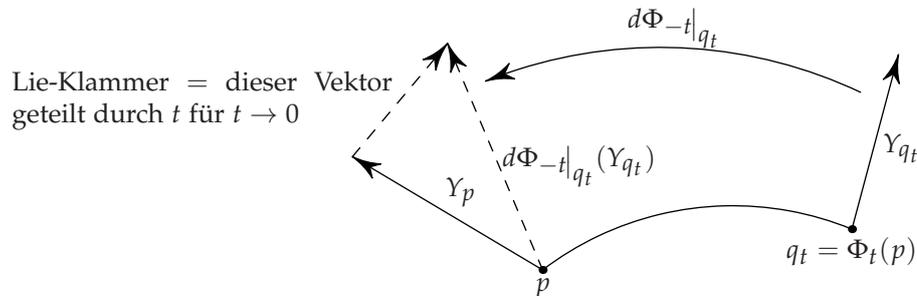


Abbildung IV.1.: $((\Phi_{-t})_* Y)_p = d\Phi_{-t}|_{q_t}(Y_{q_t})$

Zweite geometrische Bedeutung der Lie-Klammer

Mit Hilfe der Lie-Klammer lassen sich zwei Fragen beantworten:

- (1) Seien Φ, Ψ die Flüsse zweier Vektorfelder X, Y auf M . Gilt dann $\Phi_s \circ \Psi_t = \Psi_t \circ \Phi_s$ für $s, t \in \mathbb{R}$?
D.h.: Läuft es auf dasselbe hinaus, ob wir erst in Richtung (des Flusses von) Y laufen, dann in Richtung X oder umgekehrt?
- (2) Gegeben Vektorfelder X_1, \dots, X_n auf M , $\dim M = n$, gibt es dann Koordinaten x^1, \dots, x^n , so dass auf der Koordinatenumgebung $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ für alle i ist?

Die Antwort auf beide Fragen ist 'Im Allgemeinen Nein'. Mit der Lie-Klammer lässt sich eine äquivalente Bedingung formulieren, wann die Antwort Ja ist.

Die erste Frage beantwortet folgender Satz.

IV.3.20 Satz

Seien $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, Φ der Fluss von X und Ψ der Fluss von Y , so sind äquivalent:

- (i) $[X, Y] \equiv 0$
- (ii) $\forall s, t: \Phi_s \circ \Psi_t = \Psi_t \circ \Phi_s$ (man sagt, die Flüsse kommutieren)

Beispiel: Gegeben $M = \mathbb{R}^2$, $X = \frac{\partial}{\partial x}$, $Y = x \frac{\partial}{\partial y}$ mit den Flüssen

$$\Phi_s(x, y) = (x + s, y) \text{ und}$$

$$\Psi_t(x, y) = (x, y + tx).$$

Dann ist z.B.

$$\begin{aligned} \Phi_s(0, 0) = (s, 0) &\Rightarrow \Psi_t(\Phi_s(0, 0)) = (s, ts) \text{ und} \\ &\quad \updownarrow \text{ungleich} \\ \Psi_t(0, 0) = (0, 0) &\Rightarrow \Phi_s(\Psi_t(0, 0)) = (s, 0), \end{aligned}$$

anders gesagt: $\Psi_{-t}\Phi_{-s}\Psi_t\Phi_s(p) \neq p$ für $p = 0$ (falls $s, t \neq 0$).

Zum Beweis brauchen wir ein

IV.3.21 Lemma

Sei $F : M \rightarrow M$ ein Diffeomorphismus und $X \in \mathfrak{X}(M)$ mit Fluss Φ . Dann sind äquivalent:

- (1) $F_*(X) = X$
- (2) $F \circ \Phi_t = \Phi_t \circ F$ für alle $t \in \mathbb{R}$

Beweis: Nach (2) auf Seite 102 hat $F_*(X)$ den Fluss $F \circ \Phi_t \circ F^{-1}$. Ist also $F_*(X) = X$, so folgt $F \circ \Phi_t \circ F^{-1} = \Phi_t$. Umgekehrt bestimmt der Fluss das Vektorfeld, also gilt auch die andere Richtung. \square

Beweis (von Satz IV.3.20): Mit Satz IV.3.18 folgt:

$$[X, Y] = 0 \iff L_X Y = 0 \iff \Phi_t^* Y = Y \forall t$$

Nach dem Lemma (mit X ersetzt durch Y , also Φ_t ersetzt durch Ψ_s , und mit F ersetzt durch Φ_{-t}) ist dies äquivalent zu $\Phi_{-t} \circ \Psi_s = \Psi_s \circ \Phi_{-t}$ für alle s, t . \square

Satz IV.3.20 zeigt die geometrische Bedeutung der Bedingung $[X, Y] = 0$. Hat die Lie-Klammer auch im Allgemeinen eine geometrische Bedeutung?

Ja, am einfachsten lässt sich das im \mathbb{R}^n formulieren:

IV.3.22 Satz

Gegeben $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ und $p \in U$. Seien Φ, Ψ die Flüsse von X, Y . Dann gilt:

$$[X, Y]_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Psi_{-t}\Phi_{-t}\Psi_t\Phi_t(p) - p}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Psi_t\Phi_t(p) - \Phi_t\Psi_t(p)}{t^2}$$

Beweis: Übung \square

Wir beantworten nun die zweite eingangs gestellte Frage.

IV.3.23 Satz (Koordinatenvektorfelder)

Sei $p \in M$ und seien X_1, \dots, X_n Vektorfelder, die auf einer Umgebung von p definiert sind. Dabei sei $n = \dim M$. Dann sind äquivalent:

- (1) Es gibt lokale Koordinaten x nahe p mit $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ für $i = 1, \dots, n$ nahe p .
- (2) Für alle i, j ist $[X_i, X_j] \equiv 0$ nahe p , und X_{1p}, \dots, X_{np} sind linear unabhängig.

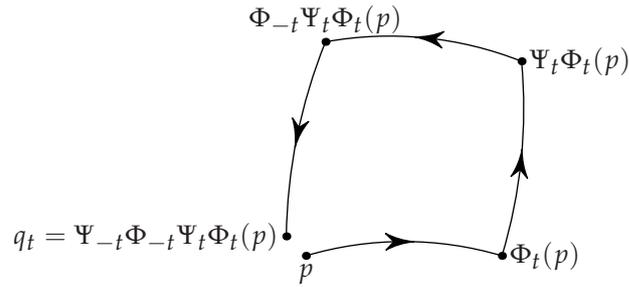


Abbildung IV.2.: So könnte in Satz IV.3.22 die Verschiebung von p entlang der Flüsse aussehen, wenn X nach rechts gerichtet ist und Y nach oben. Es gilt: $q_t = p + t^2[X, Y]_p + O(t^3)$

Beweis: (1) \Rightarrow (2) gilt, da

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} = 0$$

für alle f und da $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ in jedem Punkt linear unabhängig sind.

(2) \Rightarrow (1): Sei Φ^k der Fluss von X_k . Nach Satz IV.3.20 kommutieren alle Φ_t^k nahe p für t nahe 0. Für t_1, \dots, t_n nahe 0 definiere

$$\varphi(t_1, \dots, t_n) := (\Phi_{t_1}^1 \circ \Phi_{t_2}^2 \circ \dots \circ \Phi_{t_n}^n)(p).$$

Dann gilt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t) = X_{\varphi(t)}^1 \quad (\text{mit } t = (t_1, \dots, t_n)).$$

Da die Φ^k kommutieren, gilt auch

$$\varphi(t_1, \dots, t_n) = (\Phi_{t_k}^k \circ \Phi_{t_1}^1 \circ \dots)(p)$$

und damit

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_k}(t) = X_{\varphi(t)}^k.$$

Daher sind $\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(0), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_n}(0)$ linear unabhängig (nach Voraussetzung), also ist φ ein Diffeomorphismus $\tilde{U} \rightarrow U$ für eine Umgebung \tilde{U} von 0 im \mathbb{R}^n und eine Umgebung U von p in M (Satz über die Umkehrabbildung). Außerdem ist in diesen Koordinaten gerade

$$X^k = \frac{\partial}{\partial t_k} \quad (\text{da } \frac{\partial}{\partial t_k} = \frac{\partial \varphi}{\partial t_k}) \quad \square$$

Zum Abschluss geben wir hier einen Beweis von Satz IV.3.19 ‚zu Fuß‘.

Beweis (Zweiter Beweis von Satz IV.3.19): Wir rechnen dies zunächst im \mathbb{R}^n nach. Am übersichtlichsten geht das, wenn man alle Funktionen von t um $t = 0$ Taylor-entwickelt (zu erster Ordnung). Zum Beispiel gilt für Kurven γ

$$\gamma(t) = \gamma(0) + t\dot{\gamma}(0) + \underbrace{t^2 \cdot \text{glatte Funktion}}_{=O(t^2)}$$

also mit $\gamma(t) = \Phi_t(p)$

$$\begin{aligned} \Phi_t(p) &= \Phi_0(p) + t \underbrace{\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \Phi_t(p)}_{=X_{\Phi_0(p)}} + O(t^2) \\ &= p + tX_p + O(t^2). \end{aligned}$$

Mit einer Taylor-Entwicklung und der Kettenregel erhalten wir außerdem für Abbildungen $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\underbrace{F(p + tX_p + O(t^2))}_{g(t)} = \underbrace{F(p)}_{g(0)} + t \cdot \underbrace{df|_p(X_p)}_{g'(0)} + O(t^2),$$

also (mit $F = Y$)

$$Y_{\Phi_t(p)} = Y_{p+tX_p+O(t^2)} = Y_p + tdY|_p(X_p) + O(t^2).$$

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} \Phi_{-t}(p) &= p - tX_p + O(t^2) \\ \Rightarrow \Phi_{-t} &= \text{id} - tX + O(t^2) \\ \xrightarrow{q:=\Phi_t(p)} d\Phi_{-t}|_q &= d\text{id}|_q - tdX|_q + O(t^2) \\ &= \text{id} - tdX|_{p+tX_p+O(t^2)} + O(t^2) \\ \Rightarrow d\Phi_{-t}|_{\Phi_t(p)} &= \text{id} - t \cdot \left(dX|_p + t \cdot (\dots) \right) + O(t^2) \\ &= \text{id} - t \cdot dX|_p + O(t^2). \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} d\Phi_{-t}|_{\Phi_t(p)}(Y_{\Phi_t(p)}) &= Y_{\Phi_t(p)} - tdX|_p(Y_{\Phi_t(p)}) + O(t^2) \\ &= Y_p + tdY|_p(X_p) - tdX|_p(Y_p + tdY|_p(X_p) + O(t^2)) + O(t^2) \\ &= Y_p + t \left(dY|_p(X_p) - dX|_p(Y_p) \right) + O(t^2). \end{aligned}$$

Die t -Ableitung davon bei $t = 0$ ist

$$dY|_p(X_p) - dX|_p(Y_p) = [X, Y]_p,$$

was zu zeigen war.

Zur Übertragung von $U \subset \mathbb{R}^n$ auf beliebige Mannigfaltigkeiten verwendet man, dass die Lie-Klammer sich bzgl. Diffeomorphismen natürlich verhält, d.h. wenn $F : M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus ist, dann gilt

$$[F_*X, F_*Y] = F_*[X, Y], \quad \square$$

und dass sich der Fluss natürlich verhält, siehe (2) und (5) auf Seite 102.

IV.4. 1-Formen und Tensoren

Wir werfen nun einen systematischen Blick auf gewisse Objekte, die uns schon oft begegnet sind.

1-Formen

Erinnerung: Für $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ist für jedes $p \in M$ $df|_p$ eine lineare Abbildung $T_pM \rightarrow \mathbb{R}$. Dies ist ein Beispiel einer 1-Form. Wir fixieren zunächst p und schreiben V statt T_pM .

Etwas lineare Algebra: Dualraum

V sei ein \mathbb{R} -Vektorraum der Dimension n .

IV.4.1 Definition

Eine **Linearform** auf V ist eine lineare Abbildung $V \rightarrow \mathbb{R}$. Der **Dualraum** von V ist der Vektorraum

$$V^* = \{\text{Linearformen auf } V\}.$$

Offenbar ist V^* ein Vektorraum, z.B. ist Addition »punktweise« definiert: Gegeben $\alpha, \beta \in V^*$, dann ist $\alpha + \beta \in V^*$ definiert durch

$$(\alpha + \beta)(v) := \alpha(v) + \beta(v) \quad \text{für alle } v \in V$$

Für die späteren Rechnungen in Koordinaten brauchen wir den Begriff der dualen Basis:

IV.4.2 Satz (und Definition)

Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis von V . Definiere $e^i \in V^*$ für $i = 1, \dots, n$ durch

$$(*) \quad e^i(v) := \text{Koeffizient von } e_i \text{ in der Darstellung von } v \in V \text{ in der Basis } \{e_1, \dots, e_n\}.$$

Dann ist $\{e^1, \dots, e^n\}$ eine Basis von V^* , die sogenannte **duale Basis** zu $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Die Darstellung von $\alpha \in V^*$ in der Basis $\{e^1, \dots, e^n\}$ ist

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^i, \quad \alpha_i = \alpha(e_i).$$

Bemerkung: (*) sagt

$$e^i \left(\sum_{j=1}^n v^j e_j \right) = v^i \quad (v^1, \dots, v^n \in \mathbb{R})$$

Offenbar ist dies wirklich eine Linearform. Es gilt

$$e^i(e_j) = \delta_j^i := \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dies definiert e^i schon eindeutig, da lineare Abbildungen bereits durch ihre Werte auf einer Basis (hier $\{e_1, \dots, e_n\}$) festgelegt sind.

Beweis: Wir zeigen zunächst die Formel für α . Sie zeigt, dass $\{e^1, \dots, e^n\}$ ein Erzeugendensystem von V^* ist. Hierzu sei $v \in V$ beliebig, $v = \sum_i v^i e_i$. Dann ist

$$\begin{aligned} \alpha(v) &= \sum_i v^i \alpha(e_i) && (\alpha \text{ linear}) \\ &= \sum_i v^i \alpha_i && (\text{Definition von } \alpha_i) \\ &= \sum_i \alpha_i e^i(v) && (v^i = e^i(v)) \end{aligned}$$

Da dies für alle v gilt, folgt $\alpha = \sum_i \alpha_i e^i$.

Lineare Unabhängigkeit von e^1, \dots, e^n : Sei $\sum \alpha_i e^i = 0$. Setze e_{i_0} ein mit i_0 beliebig. Dann folgt $\alpha_{i_0} = 0$, also $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. \square

Wir halten noch fest (**Anwenden einer Linearform auf einen Vektor in Koordinaten**):

$$v = \sum_i v^i e_i, \quad \alpha = \sum_i \alpha_i e^i, \quad \text{dann } \alpha(v) = \sum_i \alpha_i v^i$$

Bemerkung (Identifizierungen, kanonische Isomorphismen und Koordinateninvarianz): Aus dem Satz folgt $\dim V = \dim V^*$. Daher sind V und V^* isomorph zueinander, wir könnten sie also miteinander identifizieren. Das tun wir jedoch nicht, aus guten Gründen:

Es gibt viele Isomorphismen $V \rightarrow V^*$. Um einen davon zu wählen, muss man zusätzliche Daten angeben. Man sagt auch, es gebe keinen *kanonischen* Isomorphismus.

Wählt man z.B. eine Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ von V und die dazu duale Basis $\{e^1, \dots, e^n\}$ von V^* , so definiert $e_i \mapsto e^i$ für $i = 1, \dots, n$ (und lineare Fortsetzung) einen Isomorphismus $V \rightarrow V^*$. Allerdings wird man bei

Wahl einer anderen Basis meistens einen anderen Isomorphismus erhalten.

Im Kontext von Mannigfaltigkeiten entspricht der Wahl einer Basis die Wahl lokaler Koordinaten.¹¹ Soll ein Begriff auf einer Mannigfaltigkeit geometrische Bedeutung haben, sollte er unabhängig von der Wahl lokaler Koordinaten sein.

Daher ist es sinnvoll, isomorphe Objekte zu unterscheiden, außer wenn es einen kanonischen Isomorphismus zwischen ihnen gibt. Daher werden wir V und V^* unterscheiden, und analog später Vektorfelder und 1-Formen etc.

Später werden wir Skalarprodukte auf V betrachten. Mit Hilfe eines Skalarprodukts wird ein Isomorphismus $V \rightarrow V^*$ festgelegt (ausgezeichnet). Dann können wir Vektorfelder und 1-Formen miteinander identifizieren. Aber auch das ist nur manchmal sinnvoll. Wenn immer möglich, sollten wir es nicht tun. Das erleichtert Verständnis und Rechnungen.

Ein Beispiel eines kanonischen Isomorphismus ist die Abbildung $V \rightarrow (V^*)^*$, die einem Vektor $v \in V$ die lineare Abbildung $V^* \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha \mapsto \alpha(v)$ zuordnet. Wie man sieht, ist es für die Definition dieser Abbildung nicht nötig, eine Basis zu wählen.

Sei nun M eine Mannigfaltigkeit. Eine 1-Form auf M ist eine »Linearform an jedem Punkt«, genauer:

IV.4.3 Definition

Eine **1-Form** α auf M ist eine Zuordnung $p \mapsto \alpha_p$, die jedem $p \in M$ ein $\alpha_p \in T_p^*M$ zuordnet, so dass α_p glatt von p abhängt. Hierbei heißt $T_p^*M := (T_pM)^*$ der **Kotangentenraum**. Was »glatt von p abhängt« bedeutet, sehen wir gleich.

Beispiel: Ist $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, so ist df eine 1-Form auf M (aber nicht jede 1-Form kann so geschrieben werden).

1-Formen in Koordinaten

Sei $x : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Koordinatensystem und $p \in U$. Dies definiert die Basis $\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p$ von T_pM . Was ist die duale Basis?

IV.4.4 Lemma

Die zu $\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p$ duale Basis von T_p^*M ist $dx^1|_p, \dots, dx^n|_p$.

Hierbei sind $x^i : U \rightarrow \mathbb{R}$ die Koordinatenfunktionen, also ist $dx^i|_p$ linear, also $dx^i|_p \in T_p^*M$. Damit ist die Aussage zumindest sinnvoll.

Beweis: Wegen der Bemerkung nach Satz IV.4.2 folgt dies aus

$$dx^i|_p \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j}(p) = \delta_j^i \quad \square$$

Damit lässt sich jede 1-Form schreiben als $\alpha_p = \sum_{i=1}^n \alpha_i(p) dx^i|_p$ mit $\alpha_i(p) = \alpha_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right)$, wobei $\alpha_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen sind. α heißt **glatt**, falls die α_i glatte Funktionen sind. Wir schreiben kurz

$$\alpha = \sum_i \alpha_i dx^i, \quad \alpha_i = \alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)$$

Beispiel: Sei $\alpha = df$ für $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Wegen $df|_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = \frac{\partial f}{\partial x^i}$ ist

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

¹¹Hier $V = T_pM$ und $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$, siehe unten.

Koordinatentransformation für 1-Formen und Vektorfelder

Genau genommen ist die »Definition« von Glattheit nicht korrekt, da sie von der Wahl der Koordinaten abhängt. Daher (und aus vielen anderen Gründen) ist es nützlich, sich zu überlegen, wie sich 1-Formen unter Koordinatenwechseln transformieren. Genauer:

Seien $x : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $y : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei Koordinatensysteme mit $U = U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Sei α eine 1-Form auf M . Auf U_1 schreibe

$$\alpha = \sum_i \alpha_i dx^i$$

und auf U_2 schreibe

$$\alpha = \sum_j \beta_j dy^j.$$

Frage: Wie berechnet man die α_i aus den β_j (auf U) oder umgekehrt?

Antwort: Die y^j sind Funktionen auf U . Man kann sie also als Funktionen von x^1, \dots, x^n auffassen. Wir schreiben diese als

$$y^j = y^j(x^1, \dots, x^n).$$

(Diese Scheibweise ist zwar etwas zweideutig, da das Symbol y^j in zwei Bedeutungen vorkommt – als Funktion auf $U \subset M$ und als Funktion auf $x(U) \subset \mathbb{R}^n$ – aber sie ist sehr nützlich!)

Durch Anwenden der Formel für df (Seite 111) auf $f = y^j$ erhalten wir

$$dy^j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^i} dx^i,$$

also

$$\sum_j \beta_j dy^j = \sum_{j,i} \beta_j \frac{\partial y^j}{\partial x^i} dx^i = \sum_i \left(\sum_j \beta_j \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right) dx^i.$$

Da dies gleich $\sum \alpha_i dx^i$ ist und da dx^1, \dots, dx^n eine Basis ist, folgt:

IV.4.5 Lemma (Transformationsregel für (die Koeffizienten von) 1-Formen)

Falls $\sum \alpha_i dx^i = \sum \beta_j dy^j$ ist, so ist

$$(*) \quad \alpha_i = \sum_j \beta_j \frac{\partial y^j}{\partial x^i}.$$

Wiederum sollte man sich eher die Herleitung als die Formel merken. (insbesondere folgt: sind die β_j glatt, so auch die α_i ; damit ist Glattheit von 1-Formen wohldefiniert; beachte, dass dies funktioniert, da die Koordinatenwechselfunktion $x \mapsto y(x)$ (früher κ genannt) glatt ist, daher ist das die zentrale Bedingung in der Definition von Mannigfaltigkeiten)

Man vergleiche dies mit

IV.4.6 Lemma (Transformationsformel für (die Koeffizienten von) Vektorfeldern)

Falls $\sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum b^j \frac{\partial}{\partial y^j}$ ist, so ist

$$(**) \quad b^j = \sum_i a^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}.$$

Beweis: Zunächst gilt $\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j}$, denn: Ist $v \in T_p M$ beliebig, $v = \sum v^j \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p$, so erhält man durch Anwenden von dy^k

$$dy^k(v) = v^k.$$

Also $v^j = dy^j(v)$. Man wende dies mit $v = \frac{\partial}{\partial x^i}$ an und verwende $dy^j(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}$.

Also ist

$$\sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i,j} a^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j} = \sum_j \left(\sum_i a^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial y^j}.$$

Mit Koeffizientenvergleich folgt die Behauptung. \square

Bemerkung: Durch Vertauschen der Rollen von x, y (oder mittels des Satzes über die Umkehrabbildung) kann man (*) umschreiben in:

$$(*) \quad \beta_j = \sum_i \alpha_i \frac{\partial x^i}{\partial y^j}$$

(wobei jetzt natürlich jedes x^i als Funktion $x^i(y^1, \dots, y^n)$ aufgefasst wird).

Vergleiche mit (**):

$$b^j = \sum_i a^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}$$

Das ist ähnlich zu (*), aber doch verschieden! Man nennt (*) die **kovariante** und (**) die

kontravariante Transformationsregel. (das hat wenig mit der kovarianten Ableitung zu tun – leider)

In einem Großteil der physikalischen Literatur und in (vor allem) der älteren mathematischen Literatur sagt man (ich lasse mal das Argument $p \in M$ weg):

Ein Tangentialvektor an M in p ist dadurch gegeben, dass man zu jedem Koordinatensystem $x = (x^1, \dots, x^n)$ einen Vektor (a^1, \dots, a^n) reeller Zahlen angibt, derart, dass bei Übergang zu einem anderen Koordinatensystem $y = (y^1, \dots, y^n)$ sich der Vektor in (b^1, \dots, b^n) , bestimmt durch (**), transformiert.

(In moderner mathematischer Sprache würde man das so ausdrücken: Ein Tangentialvektor an M in p ist eine Abbildung, die jedem Koordinatensystem um p einen Vektor in \mathbb{R}^n zuordnet und dabei folgende Eigenschaft hat: Sind x, y zwei Koordinatensysteme und $(a^1, \dots, a^n), (b^1, \dots, b^n)$ die zugeordneten Vektoren, so gilt für diese die Beziehung (**).

Da ist doch unsere invariante Definition eines Tangentialvektors handlicher!

Analog für 1-Formen mit (*).

Man schreibt in dieser Literatur nie $\sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, sondern einfach (a^i) (oder a^i).

Vorteil: kürzere Notation

Nachteil: Man muss die Transformationsformeln auswendig wissen. (bei der Notation $\sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ergeben sie sich fast automatisch, s. oben)

Entsprechend nennt man in der Physik eine Linearform oder 1-Form einen kovarianten Vektor und einen Vektor oder ein Vektorfeld einen kontravarianten Vektor (wobei jeweils statt Vektor auch Tensor gesagt wird; es gibt aber auch allgemeinere Tensoren, s. unten). Merke:

Linearform:	kovariant	untere Indizes
Vektor:	kontravariant	obere Indizes

(gemeint sind immer die Indizes der Koeffizientenfunktionen; bei den Basiselementen ist es umgekehrt)

Die Stellung der Indizes ist leicht zu merken, wenn man bei den Koordinaten x^i die Indizes immer oben schreibt und die Einsteinsche Konvention beachtet. Z.B. hat dx^i einen oberen Index, also muss der Koeffizient einen unteren haben.

Tensoren

Im Laufe der Vorlesung sind uns verschiedene Konzepte begegnet, die jedem $p \in M$ ein »Objekt bei p « zuordnen:

▷ Vektorfeld: $X_p \in T_p M$

- ▷ Differential einer Funktion $f \in C^\infty(M, \mathbb{R}) : df|_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$
- ▷ 1. Fundamentalform: $g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ bilinear
- ▷ Weingartenabbildung: $W_p : T_p M \rightarrow T_p M$ linear

Wir wollen diese Art von Objekten systematisch betrachten. Sie heißen »Tensoren«. Zunächst halten wir p fest und schreiben V statt $T_p M$.

Etwas (multi-)lineare Algebra

Sei V ein n -dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum und W ein \mathbb{R} -Vektorraum.

IV.4.7 Definition

Eine Abbildung $A : V^s = V \times \dots \times V \rightarrow W$ heißt \mathbb{R} -multilinear, falls sie linear in jedem Argument serparat ist, d.h. für $v_1, \dots, v_s, v'_1 \in V, a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$A(v_1 + v'_1, v_2, \dots, v_s) = A(v_1, v_2, \dots, v_s) + A(v'_1, v_2, \dots, v_s)$$

und

$$A(a \cdot v_1, v_2, \dots, v_s) = a \cdot A(v_1, v_2, \dots, v_s)$$

und beides jeweils analog an der i . statt der 1. Stelle. A heißt auch **Multilinearform**.

Wir werden nur $W = \mathbb{R}$ und $W = V$ betrachten.

Eine lineare Abbildung $V \rightarrow \mathbb{R}$ heißt auch **Linearform** (wie vorher). Sind α, β Linearformen, so definiere die Bilinearform $\alpha \otimes \beta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ durch:

$$(\alpha \otimes \beta)(v, w) := \alpha(v) \cdot \beta(w)$$

(sprich α tensor β). $\alpha \otimes \beta$ heißt **Tensorprodukt** von α, β . Offenbar ist $\alpha \otimes \beta$ wirklich bilinear.

Allgemeiner für Linearformen $\alpha_1, \dots, \alpha_s$:

$$(\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_s)(v_1, \dots, v_s) = \alpha_1(v_1) \cdot \dots \cdot \alpha_s(v_s) \quad (v_1, \dots, v_s \in V)$$

definiert die Multilinearform

$$\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_s : V^s \rightarrow \mathbb{R}.$$

Auf diese Weise erhält man nicht alle Multilinearformen, aber zumindest eine Basis. Dies zeigen wir nun. Zunächst ist die Menge

$$(V^*)^{\otimes s} = V^* \otimes \dots \otimes V^* := \{\text{Multilinearformen } V^s \rightarrow \mathbb{R}\}$$

offenbar ein Vektorraum. Eine andere gängige Notation für $(V^*)^{\otimes s}$ ist \mathcal{T}_s^0 .

Darstellung von Multilinearformen bezüglich einer Basis

Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis von V und $\{e^1, \dots, e^n\}$ die duale Basis von V^* .

IV.4.8 Satz

$\{e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_s} : i_1, \dots, i_s \in \{1, \dots, n\}\}$ ist eine Basis von $(V^*)^{\otimes s}$. Für eine Multilinearform A ist

$$A = \sum_{i_1, \dots, i_s} A_{i_1 \dots i_s} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_s}$$

mit $A_{i_1 \dots i_s} = A(e_{i_1}, \dots, e_{i_s})$.

Beweis (Für $n = 2$ – der Einfachheit halber): Seien $v, w \in V$, $v = \sum v^i e_i$, $w = \sum w^j e_j$ (also $v^i = e^i(v)$ und $w^j = e^j(w)$). Dann ist

$$A(v, w) = A \left(\sum_i v^i e_i, \sum_j w^j e_j \right) \stackrel{A \text{ bilinear}}{=} \sum_{i,j} v^i w^j A(e_i, e_j).$$

Nun ist $v^i w^j = e^i(v) e^j(w) = (e^i \otimes e^j)(v, w)$ und $A(e_i, e_j) = A_{ij}$, also

$$A(v, w) = \sum_{i,j} A_{ij} (e^i \otimes e^j)(v, w).$$

Dies gilt für alle v, w , d.h.

$$A = \sum_{i,j} A_{ij} e^i \otimes e^j.$$

Dies zeigt, dass $\{e^i \otimes e^j : i, j = 1, \dots, n\}$ ein Erzeugendensystem für $(V^*)^{\otimes 2}$ ist. Dass diese Menge linear unabhängig ist, sieht man so:

Sei $\sum A_{i_0 j_0} e^{i_0} \otimes e^{j_0} = 0$. Setze (e_{i_0}, e_{j_0}) ein, dann folgt

$$\underbrace{\sum A_{i_0 j_0} e^{i_0} e^{j_0}}_{=A_{i_0 j_0}} = 0.$$

Also gilt $A_{i_0 j_0} = 0$ für alle (i_0, j_0) . (also alles analog wie für Linearformen!) □

Im Fall $W = V$ (statt $W = \mathbb{R}$) schreibt man analog z.B. für

$s = 1$: α Linearform, $v \in V$, dann

$$\alpha \otimes v : V \rightarrow V, w \mapsto \alpha(w) \cdot v$$

$s = 2$: $\alpha, \beta \in V^*$, $v \in V$, dann

$$\alpha \otimes \beta \otimes v : V^2 \rightarrow V, w_1, w_2 \mapsto \alpha(w_1) \cdot \beta(w_2) \cdot v$$

etc. ...

Dann gilt analog zu IV.4.8:

$$A : V^s \rightarrow V \text{ multilinear} \Rightarrow A = \sum_{i_1, \dots, i_s, j=1}^n A_{i_1 \dots i_s}^j \underbrace{e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_s} \otimes e_j}_{\text{Basis von } (V^*)^{\otimes s} \otimes V}$$

mit $A_{i_1 \dots i_s}^j$ bestimmt durch

$$\sum_j A_{i_1 \dots i_s}^j e_j = A(e_{i_1}, \dots, e_{i_s})$$

Bemerkung: Für Bilinearformen ist $(A_{ij})_{i,j=1, \dots, n}$ die altbekannte Darstellung bezüglich der Basis, ebenso für lineare Abbildungen $V \rightarrow V$ ist $(A_i^j)_{i,j=1, \dots, n}$ deren Matrix bezüglich der Basis.

Sie nun M eine Mannigfaltigkeit.

IV.4.9 Definition

- a) Sei $s \in \mathbb{N}$. Ein **(0, s)-Tensor** (oder Tensor vom Typ $(0, s)$ oder **s-fach kovarianter Tensor**) ist eine Zuordnung A , die jedem Punkt $p \in M$ ein $A_p \in (T_p^* M)^{\otimes s}$ zuordnet, d.h.

$$A_p : \underbrace{T_p^* M \times \dots \times T_p^* M}_s \text{ Faktoren} \rightarrow \mathbb{R} \text{ multilinear}$$

und so, dass A_p glatt von p abhängt.

- b) Ein **(1, s)-Tensor** (oder s-fach kovarianter und 1-fach kontravarianter Tensor) ordnet jedem $p \in M$ eine multilineare, in p glatte Abbildung

$$A_p : \underbrace{T_p M \times \dots \times T_p M}_s \text{ Faktoren} \rightarrow T_p M$$

zu.

Bemerkung: Der Einfachheit halber kann man auch $s = 0$ zulassen; was heißt das? Zunächst für einen Vektorraum V : Per Definition ist $V^0 = \mathbb{R}$. Eine »0-Linearform« ist also eine lineare Abbildung

$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Jedes solche α ist von der Form $\alpha(t) = c \cdot t$ für ein $c \in \mathbb{R}$ ($c = \alpha(1)$). Also kann man 0-Linearformen mit Zahlen in \mathbb{R} identifizieren.

Analog ist jede lineare Abbildung

$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow V$$

von der Form $\alpha(t) = t \cdot v$ für ein $v \in V$ ($v = \alpha(1)$). Die Menge dieser linearen Abbildungen kann man also mit V identifizieren.

Also ist es sinnvoll, die Definition so zu ergänzen:

IV.4.10 Definition

c) Ein $(0,0)$ -Tensor ist eine glatte Funktion

$$M \rightarrow \mathbb{R}.$$

d) Ein $(1,0)$ -Tensor ist ein Vektorfeld auf M .

Bemerkung: Es gibt auch (r,s) -Tensoren mit $r \geq 2$. Diese kommen aber seltener vor (in dieser Vorlesung gar nicht). Wer nun glaubt, dies müssten dann multilineare Abbildungen $V^s \rightarrow V^r$ sein, irrt sich!! (Korrekte Antwort: (r,s) -Tensor = Multilinearform $(V^*)^r \times V^s \rightarrow \mathbb{R}$, siehe z.B. Kühnel)

Tensoren in lokalen Koordinaten

Nach all den Vorbereitungen ist das jetzt einfach:

▷ Ist A ein $(0,s)$ -Tensor, so gilt

$$A = \sum_{i_1, \dots, i_s=1}^n A_{i_1 \dots i_s} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_s}$$

$$\text{mit } A_{i_1 \dots i_s} = A\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_s}}\right).$$

▷ Ist A ein $(1,s)$ -Tensor, so gilt

$$A = \sum_{i_1, \dots, i_s, j=1}^n A_{i_1 \dots i_s}^j dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_s} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}$$

$$\text{mit } \sum A_{i_1 \dots i_s}^j \frac{\partial}{\partial x^j} = A\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_s}}\right).$$

Hierbei sind $A_{i_1 \dots i_s} : U \rightarrow \mathbb{R}$ und $A_{i_1 \dots i_s}^j : U \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, und Glattheit des Tensors bedeutet Glattheit dieser Funktionen.

Beispiele:

- ▷ Eine 1-Form ist ein $(0,1)$ -Tensor.
- ▷ Die Weingartenabbildung einer Hyperfläche $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist ein $(1,1)$ -Tensor.
- ▷ Erste und zweite Fundamentalform sind $(0,2)$ -Tensoren.
- ▷ Der Riemannsche Krümmungstensor (s.unten) ist ein $(1,3)$ -Tensor.

Tensoren und Vektorfelder

Wir betrachten hier nur $(0, s)$ -Tensoren. Der Fall von $(1, s)$ -Tensoren ist vollkommen analog.

Sei A ein $(0, s)$ -Tensor auf M . Statt einzelner Vektoren können wir auch Vektorfelder einsetzen:

$$A(X_1, \dots, X_s) \text{ für } X_1, \dots, X_s \in \mathfrak{X}(M).$$

Dies ist eine Funktion auf M (bzw. ein Vektorfeld für $(1, s)$ -Tensoren A):

$$(*) \quad (A(X_1, \dots, X_s))(p) = A_p(X_{1p}, \dots, X_{sp})$$

Damit definiert A eine Abbildung, wieder mit A bezeichnet:

$$A : \underbrace{\mathfrak{X}(M), \dots, \mathfrak{X}(M)}_{s \text{ Faktoren}} \rightarrow C^\infty(M).$$

Diese ist \mathbb{R} -multilinear, d.h. für alle $X_1, \dots, X_s, X'_1 \in \mathfrak{X}(M)$ gilt:

$$A(X_1 + X'_1, X_2, \dots, X_s) = A(X_1, X_2, \dots, X_s) + A(X'_1, X_2, \dots, X_s)$$

und

$$A(aX_1, X_2, \dots, X_s) = aA(X_1, X_2, \dots, X_s) \text{ für } a \in \mathbb{R}$$

(und analog an den Stellen $2, \dots, s$). Sie ist sogar $C^\infty(M)$ -multilinear, d.h.

$$A(gX_1, X_2, \dots, X_s) = gA(X_1, X_2, \dots, X_s) \text{ für } g \in C^\infty(M),$$

denn:

$$\begin{aligned} A(gX_1, X_2, \dots, X_s)(p) &= A_p(g(p)X_{1p}, X_{2p}, \dots, X_{sp}) \\ &\stackrel{A_p \text{ multilinear}}{=} g(p)A_p(X_{1p}, X_{2p}, \dots, X_{sp}) \\ &= (gA(X_1, X_2, \dots, X_s))(p) \end{aligned}$$

Analog $\mathfrak{X}(M)^s \rightarrow \mathfrak{X}(M)$. Erinnerung: $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{X}(M)^2 \rightarrow \mathfrak{X}(M)$. Ist das ein Tensor? Nein! Denn es gilt umgekehrt:

IV.4.11 Satz

Eine \mathbb{R} -multilineare Abbildung

$$A : \mathfrak{X}(M)^s \rightarrow C^\infty(M) \quad (\text{bzw. } \rightarrow \mathfrak{X}(M))$$

ist genau dann durch einen Tensor gegeben, wenn sie sogar $C^\infty(M)$ -multilinear ist (d.h. wenn man »Funktionen rausziehen« darf).

Beispiel: Die Lie-Klammer $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ ist \mathbb{R} -bilinear, aber nicht $C^\infty(M)$ -bilinear, also kein Tensor.

Wozu ist das gut?

Manche Tensoren lassen sich am einfachsten dadurch definieren, dass man sie auf Vektorfelder anwendet, nicht auf Vektoren. Man rechnet dann nach, dass die so definierte Abbildung $C^\infty(M)$ -linear ist. Ein wichtiges Beispiel hierfür ist der Krümmungstensor.

Bemerkung: Dass A »durch einen Tensor gegeben« ist, bedeutet insbesondere: Um $A(X_1, \dots, X_s)$ bei $p \in M$ auszuwerten, braucht man nur die Werte von X_1, \dots, X_s , bei p zu kennen. (Also z.B. nicht die Werte nahebei, oder Ableitungen bei p , wie dies z.B. bei $[X, Y]$ der Fall war. Daher ist $[\cdot, \cdot]$ kein Tensor.)

Denn es soll ja (*) (Seite 117) gelten.

Beweis (von Satz IV.4.11): (der Einfachheit halber für $s = 1$)

„ \Rightarrow “: hatten wir vor dem Satz gezeigt.

„ \Leftarrow “: Sei $A : \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$ $C^\infty(M)$ -multilinear. Sei $p \in M$. Sei $v \in T_p M$ gegeben. Wähle ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ mit $X_p = v$ und setze

$$A_p(v) := (A(X))(p).$$

Wenn wir zeigen können, dass die rechte Seite von der Wahl von X unabhängig ist, sind wir fertig. Bleibt zu zeigen: Falls $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ mit $X_p = Y_p$, so folgt $(A(X))(p) = (A(Y))(p)$.

Setze $Z = X - Y$. Bleibt zu zeigen:

$$Z_p = 0 \stackrel{!}{\Rightarrow} (A(Z))(p) = 0$$

Beweis hiervon:

Wähle lokale Koordinaten nahe p und schreibe

$$Z = \sum Z^i \frac{\partial}{\partial x^i} \text{ auf } U.$$

Dann gilt $Z_p = 0 \Rightarrow \forall i : Z^i(p) = 0$. Idee: Da A $C^\infty(M)$ -linear ist, gilt $A(Z) = A(\sum Z^i \frac{\partial}{\partial x^i}) = \sum Z^i A(\frac{\partial}{\partial x^i})$, also

$$(A(Z))(p) = \sum Z^i(p) A(\frac{\partial}{\partial x^i})(p) = 0$$

Ein Schönheitsfehler hierbei ist, dass die Z^i und $\frac{\partial}{\partial x^i}$ nur auf U und nicht auf ganz M definiert sind (also ist z.B. $A(\frac{\partial}{\partial x^i})$ nicht definiert). Reparatur: Wähle $\rho \in C_0^\infty(U)$ mit $\rho(p) = 1$. Dann:

$$\rho^2 A(Z) = A(\rho^2 Z) = A\left(\sum \rho Z^i \cdot \rho \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \sum \rho Z^i \cdot A\left(\rho \frac{\partial}{\partial x^i}\right)$$

Werte bei p aus, \Rightarrow ok. (Trick: ρZ^i ist auf ganz M definiert und glatt, wenn man es außerhalb von U gleich 0 setzt. Dasselbe gilt für $\rho \frac{\partial}{\partial x^i}$) \square

IV.5. Riemannsche Mannigfaltigkeiten

Auf Mannigfaltigkeiten gibt es keinen Abstands begriff. Um Entfernungen auf einer Mannigfaltigkeit M messen zu können, müssen wir eine Metrik auf M einführen. Riemann hat erkannt, dass die meisten 'real existierenden' Metriken auf Mannigfaltigkeiten sich gewissermaßen durch Integration von infinitesimalen Abstands begriffen erhalten lassen. Ihm zu Ehren nennt man heute das mathematische Konstrukt, das die Idee des 'infinitesimalen Abstands begriffs' widerspiegelt, eine Riemannsche Metrik.

IV.5.1 Definition

Sei M eine Mannigfaltigkeit. Eine **Riemannsche Metrik** auf M ist ein $(0,2)$ -Tensor g , für den

$$g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

für jedes $p \in M$ symmetrisch und positiv definit ist. (M, g) heißt **Riemannsche Mannigfaltigkeit**.

g ist also für jedes p ein Skalarprodukt g_p auf $T_p M$.

Schreibweise in lokalen Koordinaten:

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

Zum Beispiel ist für $n = 2$ $g = g_{11}dx^1 \otimes dx^1 + g_{12}dx^1 \otimes dx^2 + g_{21}dx^2 \otimes dx^1 + g_{22}dx^2 \otimes dx^2$. Wegen $g_{12} = g_{21}$ kann man dies einfacher schreiben.

Notation:

$$\alpha\beta := \frac{\alpha \otimes \beta + \beta \otimes \alpha}{2} \quad (\text{Symmetrisches Produkt der Linearformen } \alpha, \beta)$$

$$\alpha^2 := \alpha\alpha$$

Damit ist $g = g_{11}(dx^1)^2 + 2g_{12}dx^1dx^2 + g_{22}(dx^2)^2$.

Beispiele:

- ▷ \mathbb{R}^n mit euklidischer Metrik

$$g_{\text{eukl}} = (dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2$$

- ▷ $M \subset \mathbb{R}^N$ Untermannigfaltigkeit,

$$g_p(v, w) = \langle v, w \rangle \quad (\text{Skalarprodukt in } \mathbb{R}^N) \quad (\text{1. Fundamentalform})$$

g ist Riemannsche Metrik auf M . (»induzierte Metrik«)

Bemerkung: Allgemeiner kann man zu einer Mannigfaltigkeit K der Dimension N den Begriff »Untermannigfaltigkeit M von K « definieren. Ist dann g^K eine Riemannsche Metrik auf K , so definiert diese durch Einschränkung eine Riemannsche Metrik g^M auf M (die **induzierte R. Metrik**): Für $p \in M$ setze

$$g_p^M(v, w) := g_p^K(v, w) \quad \forall v, w \in T_pM \subset T_pK$$

- ▷ Hyperbolische Metrik auf $\mathbb{H} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$:

$$g_{(x,y)} := \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} \quad \left(:= \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{y^2} \right)$$

Diese hat interessante Eigenschaften und ist besonders in Zusammenhang mit Algebra und Zahlentheorie interessant. In der Physik wird sie auch im Bereich »Quantenchaos« viel verwendet.

- ▷ Flache Metrik auf dem Torus $T^n := \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$:

$$g = \sum (dx^i)^2$$

Diese ist verschieden von der Metrik, die man erhält, wenn man zum Beispiel T^2 im \mathbb{R}^3 einbettet und die induzierte Metrik nimmt! g ist flach, d.h. hat Krümmung 0, da die euklidische Metrik im \mathbb{R}^n flach ist und (T^n, g) lokal isometrisch zu $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$ ist.

Bemerkung: Allgemeinerer Begriff:

- ▷ **Pseudoriemannsche Metrik:** g_p symmetrisch und nicht ausgeartet (aber nicht notwendigerweise positiv definit). Nicht ausgeartet bedeutet, dass die Matrix $(g_{ij}(p))_{i,j=1,\dots,n}$ für jedes p invertierbar ist.

- ▷ **Signatur** von g ist (a, b) mit

$$a = \text{Anzahl positiver Eigenwerte von } (g_{ij}(p))_{i,j=1,\dots,n}$$

$$b = \text{Anzahl negativer Eigenwerte}$$

Bemerkung:

- a, b sind unabhängig von der Wahl der Koordinaten. (Trägheitssatz von Sylvester)

– Da g_p stetig von p abhängt, sind a, b unabhängig von p (sofern M zusammenhängend ist).

Beispiel: Nach Einstein ist

$$M = \text{Ereignisse in der Welt}$$

als 4-dimensionale Mannigfaltigkeit mit einer pseudoriemannschen Metrik der Signatur $(3, 1)$ zu betrachten.

Lokale Koordinaten sind durch (x, y, z, t) gegeben, wobei x, y, z die Ortskoordinaten eines Punktes und t der Zeitpunkt des »Ereignisses« ist. Die Metrik ist $g = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2$, falls x, y, z bezüglich eines »Inertialsystems« gemessen werden und kein Gravitationsfeld vorhanden ist. Mehr hierzu: Siehe O'Neill: Semi-Riemannian geometry. With applications to relativity.

Auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit sind nun alle Begriffe definiert, die wir im ersten Teil der Vorlesung als intrinsisch bezeichnet haben, z.B. (mit Definitionen wie dort):

- ▷ Länge einer Kurve
- ▷ Abstand zwischen zwei Punkten
- ▷ Winkel zwischen zwei Kurven in einem Punkt, wo sie sich schneiden
- ▷ Volumen, Integration von Funktionen

Bemerkung: Wie ist zu verstehen, dass eine Riemannsche Metrik ein 'infinitesimaler' Abstands begriff ist? Am einfachsten lässt sich das vielleicht anhand der Formel für die Länge einer Kurve $\gamma : [0, T] \rightarrow M$,

$$L[\gamma] = \int_0^T \|\dot{\gamma}(t)\|_{\gamma(t)} dt$$

sehen: Der Geschwindigkeitsvektor $\dot{\gamma}(t)$ wird in der Norm $\|\cdot\|_{\gamma(t)}$ gemessen, die auf dem Tangentialraum im Punkt $\gamma(t)$ gegeben ist (mittels $g_{\gamma(t)}$). Approximiert man $L[\gamma]$ durch seine Riemannschen Summen, etwa $\sum_{i=1}^N \|\dot{\gamma}(t_i)\|_{\gamma(t_i)} (t_i - t_{i-1})$ für eine Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$, so kann man jeden Summanden als Länge eines kurzen Teilstücks des Weges, gemessen in der an einem Ende des Teilstücks gegebenen Norm, interpretieren (Länge = Geschwindigkeit mal Zeit). Lässt man die Feinheit der Unterteilung gegen Null gehen, hat man lauter 'infinitesimale' Teilstücke, deren Länge jeweils in der an ihrem Ort gegebenen Norm gemessen wird.

Übrigens legt das die Frage nahe, warum die infinitesimalen Normen $\|\cdot\|_p$, $p \in M$, von einem Skalarprodukt herkommen müssen, und ob man hier nicht beliebige Normen auf $T_p M$ zulassen sollte. In der Tat kommen solche allgemeineren Metriken vor, man nennt sie Finsler-Metriken. Wie wir im Kapitel über Untermannigfaltigkeiten gesehen haben, werden deren metrischen Eigenschaften aber durch eine Riemannsche Metrik (die erste Fundamentalform) beschrieben.

IV.6. Kovariante Ableitungen

Für Untermannigfaltigkeiten $M \subset \mathbb{R}^N$ hatten wir gesehen, dass zentrale geometrische Begriffe wie Parallelität, Geodäten, Krümmung mit Hilfe der kovarianten Ableitung ∇ beschrieben werden können.

∇ war zunächst extrinsisch definiert, aber dann als intrinsische Größe identifiziert worden. Wir wollen nun ∇ gleich intrinsisch einführen. Ein Weg hierzu wäre, die Formel für die Christoffel-Symbole (mittels der g_{ij}) zu verwenden. Das wäre eine Definition von ∇ mittels lokaler Koordinaten. Man müsste dann nachprüfen, dass dies unabhängig von der Wahl der Koordinaten ist.

Stattdessen verfolgen wir einen anderen Weg. Dieser ist *invariant*, d.h. verwendet keine lokalen Koordinaten. Dies macht die Sache übersichtlicher (obwohl das auch eine Geschmacksfrage ist). Zunächst führen wir einen allgemeinen Begriff ein, indem wir einige wichtige Eigenschaften als »Axiome« nehmen.

IV.6.1 Definition

Sei M eine Mannigfaltigkeit. Eine **kovariante Ableitung auf M** (oder ein **(affiner) Zusammenhang auf M**) ist eine Abbildung

$$\begin{aligned}\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y\end{aligned}$$

mit folgenden Eigenschaften:

- (1) ∇ ist $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -linear bezüglich des ersten Arguments, d.h.

$$\begin{aligned}\nabla_{X_1+X_2} Y &= \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y \\ \nabla_{hX} Y &= h \nabla_X Y \quad (X, Y, X_i \in \mathfrak{X}(M), h \in C^\infty(M, \mathbb{R}))\end{aligned}$$

- (2) ∇ ist \mathbb{R} -linear bezüglich des zweiten Arguments, d.h.

$$\begin{aligned}\nabla_X (Y_1 + Y_2) &= \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2 \\ \nabla_X (cY) &= c \nabla_X Y \quad (c \in \mathbb{R})\end{aligned}$$

- (3) Für $h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ gilt:

$$\nabla_X (hY) = h \nabla_X Y + (Xh) \cdot Y$$

Also verhält sich $\nabla_X Y$ bezüglich X wie ein Tensor. Insbesondere hängt $(\nabla_X Y)_p$ nur von X_p (und von Y) ab, nicht von X an anderen Punkten als p . Aber: ∇ ist *nicht* tensoriell bezüglich Y . Um $(\nabla_X Y)_p$ zu bestimmen, genügt es *nicht*, $(X$ und) Y_p zu kennen.

Wichtig: Es gibt viele kovariante Ableitungen. (Einfache Übung: Sei A ein $(1,2)$ -Tensor und ∇ eine kovariante Ableitung. Dann ist ∇' , definiert durch

$$\nabla'_X Y = \nabla_X Y + A(X, Y)$$

eine kovariante Ableitung. Jede kovariante Ableitung entsteht aus einer gegebenen kovarianten Ableitung ∇ auf diese Art.)

Eine kovariante Ableitung gibt einem eine Vorschrift, wie man ein Vektorfeld Y in Richtung eines Vektorfelds X_p »ableitet«. Dass man dafür eine extra-Vorschrift braucht, sieht man schon daran, dass Y_q für verschiedene q in verschiedenen Räumen $T_q M$ liegt. Diese haben zunächst keine Beziehung zueinander (außer der Mannigfaltigkeitsstruktur auf TM). Zum Beispiel macht es keinen Sinn, von Gleichheit eines Vektors in $T_q M$ mit einem Vektor in $T_{q'} M$ mit $q \neq q'$ zu sprechen. Eine Wahl eines ∇ stellt eine solche Beziehung her. Man nennt eine kovariante Ableitung daher auch einen (affinen) **Zusammenhang** auf M . Affin bedeutet, dass diese Beziehung nicht beliebig ist, sondern mit der linearen Struktur des Tangentialraums harmoniert (die Bedingungen (1) und (2) in der Definition).

Der natürliche Rahmen für den Begriff der kovarianten Ableitung ist etwas allgemeiner als oben angegeben: Das Tangentialbündel ist dabei durch ein beliebiges Vektorbündel E über M ersetzt und das Vektorfeld Y durch einen Schnitt von E . Dann ist $\nabla_X Y$ wieder ein Schnitt von E . Die 'Richtung' der Ableitung, X , ist weiterhin ein Vektorfeld auf M .

Die *geometrische Bedeutung* von Zusammenhängen wird auf Seite 126 diskutiert.

Beachte, dass der Begriff »kovariante Ableitung« keinen Bezug auf eine Riemannsche Metrik nimmt. Dieser wird durch den folgenden Satz hergestellt.

IV.6.2 Satz (Fundamentallemma der Riemannschen Geometrie)

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Es gibt genau eine kovariante Ableitung, die (zusätzlich zu (1) - (3)) folgende Bedingungen erfüllt.

$$(4) \quad X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \text{ d.h. } \nabla \text{ ist mit } g \text{ verträglich, oder } \nabla \text{ ist metrisch.}$$

$$(5) \quad \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \text{ d.h. } \nabla \text{ ist torsionsfrei.}$$

Bemerkung: Was (5) mit Torsion (Verwindung) im üblichen Sinn (z.B. für Kurven) zu tun hat, wird in den meisten Differentialgeometrie-Büchern nicht erklärt¹². Man kann zeigen, dass die Bedingung äquivalent ist zur Aussage 'parallelograms close up to first non-trivial order'. Damit ist folgendes gemeint:

Ein beliebiger Zusammenhang ∇ definiert die Begriffe Paralleltransport und Geodätische. Sei $p \in M$ und $X, Y \in T_p M$. Sei $s \mapsto \gamma_1(s)$ die Geodätische, die für $s = 0$ bei p in Richtung X startet. Sei $Y(s)$ die Parallelverschiebung von Y entlang γ_1 . Schließlich sei $t \mapsto c_{X,Y}(s, t)$ die Geodätische, die bei $\gamma_1(s)$ in Richtung $Y(s)$ startet.

Konstruiere $c_{Y,X}(t, s)$ analog, durch Vertauschen von X, s mit Y, t .

Im \mathbb{R}^n mit dem Standard-Zusammenhang ist offenbar $c_{X,Y}(s, t) = c_{Y,X}(t, s)$ für alle s, t . Man zeigt relativ leicht, dass für einen beliebigen Zusammenhang immer $\text{dist}(c_{X,Y}(s, t), c_{Y,X}(t, s)) = O(|(s, t)|)$ (für $s, t \rightarrow 0$) gilt. Nun gilt: Ein Zusammenhang ist torsionsfrei genau dann, wenn sogar

$$\text{dist}(c_{X,Y}(s, t), c_{Y,X}(t, s)) = O(|(s, t)|^3)$$

gilt.

Für eine andere Erklärung des Begriffs 'torsionsfrei' siehe z.B. die englische Wikipedia-Seite unter »Torsion tensor«.

Beachte, dass (5) impliziert (und sogar äquivalent dazu ist), dass (in beliebigen Koordinaten) gilt:

$$(IV.1) \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \forall i, j,$$

denn $[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0$. Es ist nicht schwer zu zeigen, dass umgekehrt diese Gleichheit (5) impliziert.

Die Christoffel-Symbole eines Zusammenhangs (bezüglich eines Koordinatensystems) werden wie früher mittels

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

definiert. (IV.1) bedeutet dann die Symmetrie in i, j :

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$$

(Vorsicht: Trotz der parallelen Schreibweise mit oberen und unteren Indizes sind die Γ_{ij}^k nicht die Komponenten eines Tensors, denn $\nabla_X Y$ ist bezüglich Y nicht tensoriell.)

Beweis (von Satz IV.6.2): Der Satz lässt sich entweder mit Koordinaten beweisen (dann mit den Erklärungen oben und den Rechnungen von früher), oder indem man die alten Rechnungen in der neuen invarianten Weise wiederholt.

Für beliebige X, Y, Z schreibe (4) dreimal hin, wobei X, Y, Z zyklisch permutiert werden, also

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

$$Y(g(Z, X)) = g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X)$$

$$Z(g(X, Y)) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$$

¹² Spivak schreibt in seinem berühmten Klassiker (Band II des 5-bändigen Werks zur Differentialgeometrie): »no one seems to have a good explanation«

Addiere die ersten beiden Gleichungen und subtrahiere die dritte Gleichung. Mit Hilfe von (5) fallen alle ∇ -Terme weg, außer $\nabla_X Y$ und Auflösen danach liefert

$$(IV.2) \quad g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2} [Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y])]$$

Da dies für alle Z gilt, ist $\nabla_X Y$ eindeutig bestimmt. Umgekehrt definiert dies $\nabla_X Y$. Dazu muss man nachrechnen, dass sich $(X, Y, Z) \mapsto$ »die rechte Seite von (IV.2)« bezüglich X und Z tensoriell verhält und Y das richtige (in (3) vorgeschriebene) Verhalten hat sowie die Eigenschaften (4) und (5) hat. Dies ist eine einfache Rechnung mittels der Regel für $[X, hY] = \dots$ \square

(IV.2) heißt Koszul-Formel.

IV.6.3 Definition

Der durch g wie im Satz festgelegte Zusammenhang heißt **Levi-Civita-Zusammenhang**. (manchmal schreibt man hierfür ∇^{LC})

Bemerkung: Die früher für Untermannigfaltigkeiten $M \subset \mathbb{R}^N$ definierte kovariante Ableitung ist genau der Levi-Civita-Zusammenhang bezüglich der vom \mathbb{R}^N induzierten Metrik g . Denn das folgt aus der Eindeutigkeit, da er (1) - (5) erfüllt, siehe Lemma III.2.7 für (1)-(4) und die Bemerkung III.2.9 für (5).

Bemerkung: In lokalen Koordinaten gilt dieselbe Formel für Γ_{ij}^k wie für Untermannigfaltigkeiten, siehe Satz III.2.10, da in deren Herleitung nur (1) - (5) verwendet wurden. Man erhält diese Formel auch durch Einsetzen der Koordinatenvektorfelder in die Koszul-Formel.

Sei ∇ eine kovariante Ableitung (zunächst beliebig). Man hat dann, wie früher eingeführt, folgende Begriffe:

- ▷ **kovariante Ableitung** eines Vektorfelds X **entlang einer Kurve** γ

$$\frac{\nabla}{dt} X := \nabla_{\dot{\gamma}} X$$

- ▷ **Parallelität** eines Vektorfelds X entlang einer Kurve γ :

$$\frac{\nabla}{dt} X \equiv 0$$

- ▷ **Parallelverschiebung:** Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ eine Kurve, dann ist die Parallelverschiebung

$$P_\gamma : T_{\gamma(a)} M \rightarrow T_{\gamma(b)} M$$

definiert mittels paralleler Vektorfelder entlang γ . P_γ ist immer linear und bijektiv. Zusätzlich gilt:

$$\nabla \text{ ist mit } g \text{ verträglich} \Leftrightarrow P_\gamma \text{ ist orthogonal für alle } \gamma.$$

Die Implikation \Rightarrow folgt wie im Beweis der Bemerkung nach Lemma III.4.4¹³, die umgekehrte Implikation ist eine Übung.

- ▷ **Geodäte** $\gamma : \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$

Es gilt:

$$\nabla \text{ mit } g \text{ verträglich und torsionsfrei} \Rightarrow \text{kürzeste Linien sind Geodäten}$$

(siehe den Beweis von Satz III.4.8; hierbei wurde

$$\nabla_{\frac{\partial \gamma}{\partial s}} \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \nabla_{\frac{\partial \gamma}{\partial t}} \frac{\partial \gamma}{\partial s}$$

verwendet, was genau die Bedingung »torsionsfrei« ist)

- ▷ **Geodätische Krümmung** (siehe Definition III.4.13; hier benötigt man, dass $(\nabla$ mit g verträglich ist, wie aus der Bemerkung nach der Definition klar wird), für orientierte Flächen mit Vorzeichen: $\kappa_g \in \mathbb{R}$, sonst ohne: $\kappa_g \geq 0$ ($\kappa_g = \|\frac{\nabla}{dt} \dot{\gamma}\|$))

- ▷ **Der Krümmungstensor**, siehe unten

¹³Beachte hierfür, dass $\frac{d}{dt} g(X_t, Y_t)$ die Ableitung der entlang γ definierten Funktion $g(X, Y)$ in Richtung $\dot{\gamma}$ ist.

IV.7. Der Riemannsche Krümmungstensor

Wir haben im ersten Teil festgestellt, dass die Gausskrümmung einer Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$ eine intrinsische Größe ist, die sich mittels des Riemannschen Krümmungstensors berechnen lässt. Wir werden nun dieses Konzept auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten übertragen.

Erinnerung: Für Hyperflächen $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ haben wir den Krümmungstensor in Koordinaten mittels

$$(IV.3) \quad \sum_k R_{lij}^k \partial_k = \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} \partial_l - \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_i} \partial_l$$

definiert, siehe die vierte Bemerkung nach Satz III.3.5. ($\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$, was dort als $\frac{\partial \varphi}{\partial u^i}$ geschrieben wurde.) Hier wird also den drei Vektorfeldern $\partial_i, \partial_j, \partial_l$ das Vektorfeld auf der rechten Seite von (IV.3) zugeordnet. Wie lässt sich das invariant, d.h. ohne lokale Koordinaten ausdrücken?

IV.7.1 Satz (und Definition)

Sei M Mannigfaltigkeit und ∇ eine kovariante Ableitung auf M . Die Abbildung $\mathfrak{X}(M)^3 \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, die drei Vektorfeldern X, Y, Z das Vektorfeld

$$R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

zuordnet, ist ein Tensor: der **Krümmungstensor von ∇** .

Ist (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\nabla = \nabla^{LC}$, so heißt R **Riemannscher Krümmungstensor**.

Beweis: Offenbar ist R \mathbb{R} -multilinear. Wir müssen nur zeigen, dass man Funktionen »rausziehen« kann, aus jedem der drei Argumente X, Y, Z . Wir tun das exemplarisch für Y und lassen Z der Kürze halber in der Notation weg:

$$\begin{aligned} R(X, hY) &= \nabla_X \nabla_{hY} - \nabla_{hY} \nabla_X - \nabla_{[X, hY]} \\ &= \nabla_X h \nabla_Y - h \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{h[X, Y] + (Xh)Y} \\ &= h \nabla_X \nabla_Y + (Xh) \nabla_Y - h \nabla_Y \nabla_X - h \nabla_{[X, Y]} - (Xh) \nabla_Y \\ &= h \cdot (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}) \\ &= h \cdot R(X, Y) \end{aligned}$$

Für X geht's analog. Für Z :

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y hZ &= \nabla_X ((Yh)Z + h \nabla_Y Z) \\ &= (XYh)Z + (Yh) \nabla_X Z + (Xh) \nabla_Y Z + h \nabla_X \nabla_Y Z \end{aligned}$$

Vertausche X, Y :

$$\nabla_Y \nabla_X hZ = (YXh)Z + (Xh) \nabla_Y Z + (Yh) \nabla_X Z + h \nabla_Y \nabla_X Z$$

Die Differenz ist

$$\nabla_X \nabla_Y hZ - \nabla_Y \nabla_X hZ = ([X, Y]h)Z + h(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z).$$

Außerdem ist

$$\nabla_{[X, Y]} hZ = ([X, Y]h)Z + h \nabla_{[X, Y]} Z$$

Die erneute Differenz ergibt nun genau

$$R(X, Y)hZ = h \cdot R(X, Y)Z \quad \square$$

Bemerkung:

- ▷ Der Term $\nabla_{[X,Y]}Z$ fehlt in (IV.3), da $[\partial_i, \partial_j] = 0$ ist. Für beliebige Vektorfelder muss er da sein, damit in der Rechnung oben die Terme mit h -Ableitungen (z.B. Xh, Yh) herausfallen.

(man hätte aus (IV.3) die Formel für $R(X,Y)Z$ erraten können, wie folgt: Schreibe $X = \sum X^i \partial_i$, $Y = \sum Y^j \partial_j$, dann muss, damit R ein Tensor wird,

$$R(X,Y) = \sum X^i Y^j R(\partial_i, \partial_j)$$

gelten. Andererseits ist

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y &= \sum X^i \nabla_{\partial_i} (\sum Y^j \nabla_{\partial_j}) \\ &= \sum X^i Y^j \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} + \sum X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \nabla_{\partial_j} \end{aligned}$$

und analog

$$\nabla_Y \nabla_X = \sum Y^j X^i \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_i} + \sum Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \nabla_{\partial_i},$$

also

$$\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X = R(X,Y) + \sum \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right) \nabla_{\partial_j}$$

Die letzte Summe ist aber gerade $\nabla_{[X,Y]}$, siehe die lokale Formel für $[X,Y]$ auf Seite 98. Selbst nach dieser Rechnung hätte man nachprüfen müssen, dass $R(X,Y)Z$ bezüglich Z tensoriell ist.)

- ▷ Dass R bezüglich X, Y und Z tensoriell ist, ist eigentlich sehr überraschend. Immerhin wird Z zweimal abgeleitet, z.B. in $\nabla_X \nabla_Y Z$! Die Aussage ist, dass sich alle Ableitungen von Z in der Gesamtsumme wegheben. Ebenso für X, Y . Damit hängt $(R(X,Y)Z)_p$ nur von X_p, Y_p und Z_p ab.

Die Bedeutung des Krümmungstensors liegt darin, dass er die Antwort auf folgende Frage gibt: Gegeben eine Riemannsche Metrik g auf einer Mannigfaltigkeit M , wie sehe ich g an, ob es lokal isometrisch zur euklidischen Metrik ist, d.h. ob es Koordinaten x^1, \dots, x^n gibt mit

$$g = (dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2 \quad (\text{lokal}) \quad ?$$

IV.7.2 Satz

g ist (nahe $p \in M$) lokal isometrisch zur euklidischen Metrik, genau dann wenn

$$R \equiv 0$$

in einer Umgebung von p gilt.

Da man R effektiv aus g berechnen kann, beantwortet dies die Frage oben.

Dies ist der Hauptsatz über den Riemannschen Krümmungstensor! Zum Beweis werden wir vieles von dem verwenden, was wir uns z.B. über kommutierende Vektorfelder erarbeitet haben.

Beweis:

„ \Leftarrow “ ist klar, denn $R \equiv 0$ für die euklidische Metrik

„ \Rightarrow “ OBDa. sei $M = \mathbb{R}^n$, $p = 0$ mit Standardkoordinaten y^1, \dots, y^n .

1. Schritt: Wegen $[\partial_{y^i}, \partial_{y^j}] = 0$ folgt aus $R \equiv 0$, dass

$$\nabla_{\partial_{y^i}} \nabla_{\partial_{y^j}} Z = \nabla_{\partial_{y^j}} \nabla_{\partial_{y^i}} Z \quad \forall i, j, Z$$

Wir zeigen nun, dass man zu beliebigem Z_0 ein Vektorfeld Z finden kann, das im Punkt 0 gerade Z_0 ist und

$$\nabla_{\partial_{y^i}} Z = 0 \quad \forall i$$

erfüllt. Der Einfachheit halber für $n = 2$: Verschiebe zunächst Z_0 parallel entlang der y^1 -Achse. Erhalte $Z_{(y^1,0)}$. Für jedes y^1 verschiebe nun $Z_{(y^1,0)}$ parallel entlang der y^2 -Geraden durch $(y^1, 0)$ (vertikal). Dies definiert $Z_{(y^1,y^2)}$ für alle y^1, y^2 . Wir haben nun per Definition

- (1) $\nabla_{\partial_{y^2}} Z = 0$ überall
 (2) $\nabla_{\partial_{y^1}} Z = 0$ bei allen Punkten $(y^1, 0)$.

Nun gilt nach Annahme

$$\nabla_{\partial_{y^2}} \nabla_{\partial_{y^1}} Z = \nabla_{\partial_{y^1}} \nabla_{\partial_{y^2}} Z \text{ überall.}$$

Die rechte Seite ist konstant 0 wegen (1). Also ist $\nabla_{\partial_{y^2}} (\nabla_{\partial_{y^1}} Z) = 0$, das heißt $\nabla_{\partial_{y^1}} Z$ ist parallel entlang den vertikalen Geraden. Wegen $(\nabla_{\partial_{y^1}} Z)_{y^1,0} = 0$ folgt also $\nabla_{\partial_{y^1}} Z = 0$ entlang der ganzen Geraden $y^2 \mapsto (y^1, y^2)$. Also gilt auch $\nabla_{\partial_{y^1}} Z = 0$ überall. Der Beweis für beliebiges n verläuft analog. Also gilt $\nabla_{\partial_{y^i}} Z = 0$ für alle i und daher $\nabla_Y Z = 0$ für alle Y .

2. Schritt: Wähle nun Vektorfelder Z_1, \dots, Z_n wie im ersten Schritt so, dass $(Z_1)_0, \dots, (Z_n)_0$ eine orthonormale Basis bilden. Da ∇ torsionsfrei ist, gilt für alle i, j

$$[Z_i, Z_j] = \nabla_{Z_i} Z_j - \nabla_{Z_j} Z_i = 0 - 0 = 0.$$

Die Vektorfelder Z_1, \dots, Z_n kommutieren also, und nach Satz IV.3.23 gibt es Koordinaten x^1, \dots, x^n (nahe 0) mit

$$Z_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \forall i \text{ nahe } 0$$

3. Schritt: Da die Z_i im Punkt 0 orthonormal sind und parallel entlang jeder Kurve sind, sind sie in jedem Punkt orthonormal. Also ist $\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p$ in jedem Punkt eine Orthonormalbasis, d.h. die Metrik hat in diesen Koordinaten die Form

$$g = (dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2. \quad \square$$

Zur geometrischen Interpretation von ∇ und R

Oben wurden ∇ und R formal als Rechenobjekte eingeführt. Das ist praktisch, wenn man wirklich etwas rechnen will, aber natürlich nur die halbe Wahrheit, da wir ja Geometrie machen wollen.

∇ : Der Levi-Civita-Zusammenhang kann so motiviert werden: Im Fall von Untermannigfaltigkeiten $M \subset \mathbb{R}^N$ ist das der alte Begriff von » ∇ «, der ja (extrinsisch) geometrisch motiviert war. ($\nabla_X Y =$ tangentialer Anteil von $\nabla_X^{\mathbb{R}^N} Y = dY(X)$)

Aber was ist ein allgemeiner Zusammenhang?

Eine Antwort:

Ein Zusammenhang ∇ definiert einen Begriff »Parallelverschiebung«, P^∇ . Umgekehrt legt ein Begriff von Parallelverschiebung P einen Zusammenhang ∇ eindeutig fest, derart dass dann $P = P^\nabla$ ist. Dabei ist, per Definition, (ein Begriff von) Parallelverschiebung eine Zuordnung $\gamma \mapsto P_\gamma$, die jedem Weg $\gamma : I \rightarrow M$ und zu allen $s, t \in I$ einen Vektorraumhomomorphismus

$$P_{\gamma, s \rightarrow t} : T_{\gamma(s)} M \rightarrow T_{\gamma(t)} M$$

zuordnet, derart, dass gilt:

- (1) $P_{\gamma, s \rightarrow s} =$ Identität auf $T_{\gamma(s)} M$ für alle s, γ .

(2) $P_{\gamma,s \rightarrow t} \circ P_{\gamma,r \rightarrow s} = P_{\gamma,r \rightarrow t}$ für alle γ und $r, s, t \in I$.

(3) $P_{\gamma,s \rightarrow t}$ hängt glatt von γ, s, t ab.

(Dabei ist es nicht ganz einfach, zu sagen, was (3) genau bedeuten soll. Unter anderem wird es implizieren, dass der unten definierte Zusammenhang $\nabla_X Y$ linear von X abhängt)

Offenbar hat die durch einen Zusammenhang ∇ definierte Parallelverschiebung $P = P^\nabla$ diese Eigenschaften. Umgekehrt: Gegeben P , definiere

$$(\nabla_X Y)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_{\gamma,t \rightarrow 0}(Y_{\gamma(t)}) - Y_{\gamma(0)}}{t},$$

wobei $\gamma: [0, \varepsilon] \rightarrow M$ eine Kurve mit $\gamma(0) = p$ und $\dot{\gamma}(0) = X$ sei.

(Übung: Ist ∇ ein Zusammenhang und $P = P^\nabla$, so gilt die Formel.)

Bemerkung: Für $\nabla = \nabla^{\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}}}$ ist das einfach die Definition der Ableitung.

Fazit: »Zusammenhang« und »Parallelverschiebung« sind äquivalente Begriffe, aber Parallelverschiebung ist wohl leichter geometrisch vorstellbar (aber schwieriger zum Rechnen)

Bemerkung: Andere Zusammenhänge als ∇^{LC} können durchaus von Interesse sein. Zum Beispiel der »Seefahrer-Zusammenhang« auf der Kugel (genauer: auf $S^2 \setminus \{\text{Nordpol}, \text{Südpol}\}$). Für Seefahrer bedeutet »geradeaus fahren«, dass der Winkel zum Breitengrad konstant bleibt. Definiere also P mittels Konstanz dieses Winkels. Der so definierte Zusammenhang ∇ hat keine Holonomie, also keine Krümmung (s. unten), aber er hat Torsion (d.h. $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \neq 0$). Die Geodäten von ∇ sind die »Seefahrer-Geodäten«.

Auch in der Relativitätstheorie gibt es Ansätze, andere Zusammenhänge als ∇^{LC} zu verwenden. (Einstein-Cartan Theorie)

Krümmungstensor und Parallelverschiebung

Wir leiten eine Interpretation von R mittels der Parallelverschiebung her, mit einer Rechnung in Koordinaten.

Vorüberlegung: Kovariante Ableitung in Koordinaten:

Schreibe $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$. Sei $Z = \sum Z^j \partial_j$ ein Vektorfeld. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_i} \left(\sum_j Z^j \partial_j \right) &= \sum_j \frac{\partial Z^j}{\partial x^i} \partial_j + \sum_{j,k} Z^j \Gamma_{ij}^k \partial_k \\ &= \sum_j \left(\frac{\partial}{\partial x^i} Z^j + \sum_k Z^k \Gamma_{ik}^j \right) \partial_j \end{aligned}$$

Zur Abkürzung schreiben wir $Z = \begin{pmatrix} Z^1 \\ \vdots \\ Z^n \end{pmatrix}$ und $\Gamma_i = (\Gamma_{ik}^j)_{k,j=1,\dots,n}$. Dann ist das

$$\nabla_{\partial_j} Z = \partial_j Z + \Gamma_j Z.$$

(als Gleichung zwischen Vektorfeldern $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Gamma_j Z = \text{Matrix} \cdot \text{Spaltenvektor}$.)

Bemerkung: \triangleright Diese Formel ist zum Rechnen äußerst nützlich.

\triangleright Sie zeigt, dass die Γ_i (also die Γ_{ij}^k) die Abweichung von ∇_{∂_i} von der »euklidischen« kovarianten Ableitung ∂_i ($= \nabla^{\text{LC}}$ bzgl. $g_{\text{eukl}} = \nabla^{\mathbb{R}^n}$ in Notation von früher) angeben. ($\Gamma_i = 0$ für $g = g_{\text{eukl}}$)

Parallelverschiebung in Koordinaten

Wir wissen, dass folgende Aussagen über ein Vektorfeld Z äquivalent sind:

- (1) Z ist parallel entlang einer zur x^i -Achse parallelen Geraden.
- (2) $\nabla_{\partial_i} Z = 0$
- (3) $(\partial_i + \Gamma_i)Z = 0$

Wir betrachten hier (mittels der lokalen Karte) Z als Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^n . Schreiben wir kurz $Z(t) := Z_{p+te^i}$, so folgt

$$(IV.4) \quad \dot{Z} + \Gamma_i Z = 0$$

(das ist das lineare DGL-System für Parallelverschiebung)

Um die Verbindung zur Krümmung herzustellen, wählen wir zwei Koordinatenrichtungen $i \neq j$ und betrachten den Weg, der von p in der i -Richtung nach $q = p + te^i$ und von dort in der j -Richtung nach $r = q + te^j$ führt, und verschieben einen Vektor $Z_p \in T_p \mathbb{R}^n$ parallel.

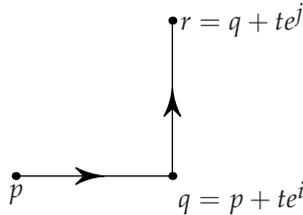


Abbildung IV.3.: Parallelverschiebung in Koordinatenrichtungen

Wir betrachten die Taylorentwicklung bezüglich $t \rightarrow 0$ zu 2. Ordnung:

$$Z_q = Z_p + t\dot{Z}_p + \frac{t^2}{2}\ddot{Z}_p + O(t^3)$$

Aus (IV.4) folgt $\dot{Z}_p = -\Gamma_i Z_p$ und durch Ableiten (wegen $\dot{\Gamma}_i = \partial_i \Gamma_i$)

$$\begin{aligned} \ddot{Z} + (\partial_i \Gamma_i)Z + \Gamma_i \dot{Z} &= 0 \\ \Rightarrow \ddot{Z} + (\partial_i \Gamma_i - \Gamma_i^2)Z &= 0 \\ \Rightarrow \ddot{Z} &= (\Gamma_i^2 - \partial_i \Gamma_i)Z \end{aligned}$$

Also

$$Z_q = Z_p - t\Gamma_i Z_p + \frac{t^2}{2}(\Gamma_i^2 - \partial_i \Gamma_i)Z_p + O(t^3)$$

(alle Γ_i bei p ausgewertet)

Nun verschieben wir Z_q parallel nach Z_r , und es folgt analog

$$Z_r = Z_q - t\Gamma_j(q)Z_q + \frac{t^2}{2}(\Gamma_j(q)^2 - \partial_j \Gamma_j(q))Z_q + O(t^3)$$

Beachte, dass alles bei q ausgewertet wird. Wir drücken das nun durch die Werte bei p aus:

$$\Gamma_j(q) = \Gamma_j(p) + t\partial_i \Gamma_j(p) + O(t^2)$$

Damit (und mit der Formel für Z_q) folgt (wieder alle Γ bei p ausgewertet):

$$\begin{aligned} Z_r &= Z_p - t\Gamma_i Z_p + \frac{t^2}{2}(\Gamma_i^2 - \partial_i \Gamma_i)Z_p - t(\Gamma_j + t\partial_i \Gamma_j)(Z_p - t\Gamma_i Z_p) + \frac{t^2}{2}(\Gamma_j^2 - \partial_j \Gamma_j)Z_p + O(t^3) \\ &= Z_p - t(\Gamma_i + \Gamma_j)Z_p + \frac{t^2}{2} \left((\Gamma_i^2 - \partial_i \Gamma_i) - 2(\partial_i \Gamma_j - \Gamma_j \Gamma_i) + (\Gamma_j^2 - \partial_j \Gamma_j) \right) Z_p + O(t^3) \end{aligned}$$

Man kann nun von p aus auch erst in der j -Richtung und dann in der i -Richtung laufen, und kommt auch bei r heraus.

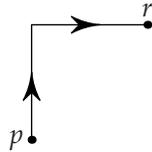


Abbildung IV.4.: Parallelverschiebung in Koordinatenrichtungen (2)

Verschiebt man Z_p entlang diesem Weg parallel, erhält man

$$Z'_r = (\text{dieselbe Formel wie } Z_r, \text{ aber mit } i, j \text{ vertauscht})$$

Also folgt

$$Z'_r - Z_r = t^2(\partial_i \Gamma_j - \partial_j \Gamma_i + \Gamma_i \Gamma_j - \Gamma_j \Gamma_i) + O(t^3).$$

Man vergleiche dies mit der Formel für R (Seite ??)

$$R_{ij} = \partial_i \Gamma_j - \partial_j \Gamma_i + \Gamma_i \Gamma_j - \Gamma_j \Gamma_i.$$

Hierbei ist R_{ij} die Matrix $(R_{ij}^k)_{k,l=1,\dots,n}$, wobei k die Zeilen und l die Spalten nummeriert, wie bei $\Gamma_i = (\Gamma_{ij}^k)_{j,l=1,\dots,n}$, so dass $R_{ij}^k Z^l$ Produkt einer Matrix mit einem Spaltenvektor ist.

Wir haben also erhalten:

$$Z'_r - Z_r = t^2(R_{ij}Z_p) + O(t^3)$$

Etwas hübscher wird das, wenn wir beide Seiten dieser Gleichung entlang dem zuletzt betrachteten Weg zurück (also von r in die negative i - und dann in die negative j -Richtung nach p) parallel verschieben.

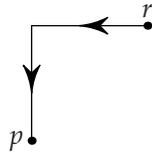


Abbildung IV.5.: Parallelverschiebung in Koordinatenrichtungen (3)

Aus Z'_r wird dann Z_p und aus $R_{ij}Z_p$ wird $R_{ij}Z_p + O(t)$, d.h. hier wird der Fehler in $O(t^3)$ absorbiert, und es folgt:

IV.7.3 Satz

Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$. Seien $X_p, Y_p, Z_p \in T_p M$ mit X_p, Y_p linear unabhängig. Für $t > 0$ sei

$$Z_{p,t} = \left(\begin{array}{l} \text{der Vektor in } T_p M, \text{ den man aus } Z_p \text{ durch Parallelverschiebung entlang} \\ \text{dem Rand des von } tX_p, tY_p \text{ aufgespannten »Parallelogramms« } P_t \text{ erhält} \end{array} \right)$$

Dann ist

$$R(X_p, Y_p)Z_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Z_p - Z_{p,t}}{t^2}.$$

»Aufgespanntes Parallelogramm« bedeutet: Wähle Koordinaten mit $x(p) = 0$, $X_p = \partial_1$, $Y_p = \partial_2$. Dann ist P_t das Bild (unter der Karte) des Quadrats $[0, t] \times [0, t] \times \{0\}^{n-2}$, und der Rand wird in der Reihenfolge 1, 2, 1, 2 durchlaufen.

Das heißt:

Der Krümmungstensor misst, wie sehr ein Vektor bei Parallelverschiebung entlang eines geschlossenen Weges γ bei Rückkehr zum Ausgangspunkt »verändert« wird. Diese Änderung, genauer die Abbildung $T_p M \rightarrow T_p M$, $Z \mapsto P_\gamma Z$, heißt auch **Holonomie** von g entlang γ .

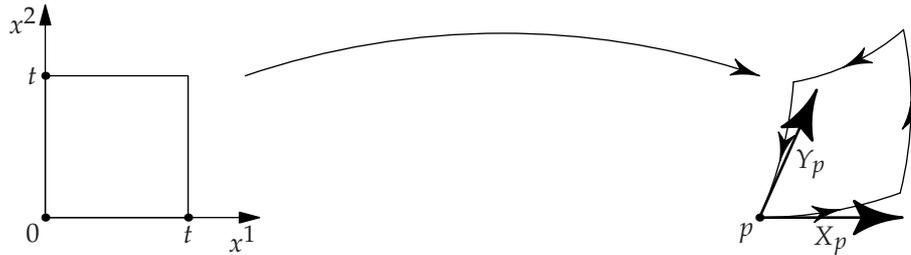
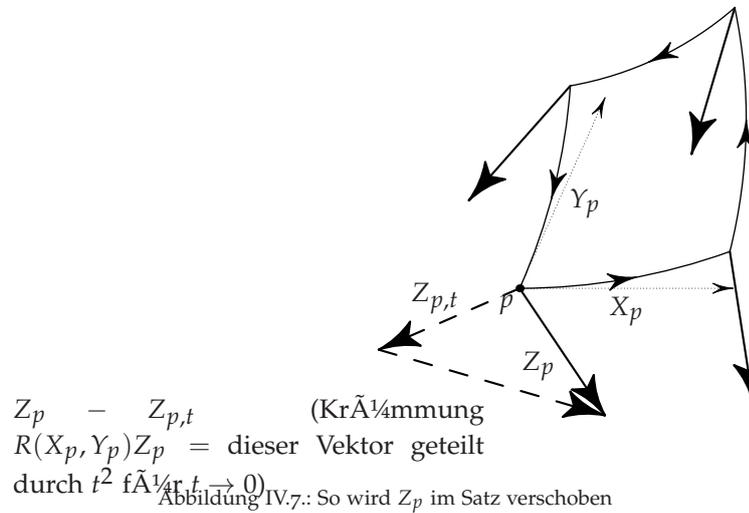


Abbildung IV.6.: Parallelverschiebung entlang Parallelogramm

(Vgl. der Beweis von Satz IV.7.2: Falls $R \equiv 0$, so gibt es eine Basis von Vektorfeldern, die entlang beliebiger Kurven parallel sind; insbesondere kommt man bei Rückkehr zu p wieder bei dem selben Vektor Z_p an!)

Dabei geben X_p, Y_p an, in welcher Ebene dieser geschlossene Weg (nahe p) gewählt sein soll.

Abbildung IV.7.: So wird Z_p im Satz verschoben

Bemerkung: Offenbar ist $R(X, Y) = R(Y, X)$ (nach Definition von R). Daraus folgt $R(X_p, Y_p) = 0$, falls X_p, Y_p linear abhängig sind.

Weitere Krümmungsbegriffe

Der Riemannsche Krümmungstensor ist manchmal etwas unhandlich und schwer zu »überblicken«¹⁴. Man kann sich auf verschiedene Arten behelfen.

- ▷ Man fasse $R(X_p, Y_p)$ als lineare Abbildung $T_p M \rightarrow T_p M$ auf (»lokale Holonomie«, vgl. S. 127 - 130)
- ▷ Betrachte die »Schnittkrümmung«. Diese enthält dieselbe Information wie R , ist aber etwas anschaulicher.
- ▷ Man nimmt Mittelwerte (genauer: Spuren) über »Teile« von R und erhält somit
 - Ric (Ricci-Tensor, ein $(0,2)$ -Tensor)
 - S (Skalarkrümmung, eine Funktion auf M)

Ric enthält weniger Informationen als R , S noch weniger.

¹⁴Michael Gromov, einer der berühmtesten Geometer, schrieb 1991: »The curvature tensor is a little monster of multilinear algebra whose full geometric meaning remains obscure.« (Artikel: »Sign and geometric meaning of curvature«)

Schnittkrümmung

Erinnerung: Für Flächen $M \subset \mathbb{R}^3$ ist $K = \frac{R_{1212}}{\det(g_{ij})}$, wobei $R_{kl ij} = \sum_m g_{km} R_{lij}^m$ (siehe S. 56), das heißt $R_{kl ij}$ sind die Komponenten des $(0,4)$ -Tensors

$$(X, Y, Z, W) \mapsto g(R(X, Y)Z, W)$$

$$i \quad j \quad l \quad k$$

Insbesondere, falls X_p, Y_p eine Orthonormalbasis von $T_p M$ ist, so gilt

$$(IV.5) \quad K = g(R(X, Y)Y, X) \quad (\text{alles bei } p),$$

denn man kann Koordinaten wählen mit $X = \partial_1, Y = \partial_2$ bei p .

Falls X_p, Y_p beliebig sind – nicht notwendig orthogonal – so ist für die Koordinaten

$$g_{11} = g(\partial_1, \partial_1) = g(X, X)$$

$$g_{12} = \quad \quad = g(X, Y)$$

$$g_{22} = \quad \quad = g(Y, Y),$$

also

$$(IV.6) \quad g(R(X, Y)Y, X) = K \cdot (g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2)$$

(dies gilt für jedes p , also allgemein).

Dies gilt für Flächen $M \subset \mathbb{R}^3$. Für eine abstrakte zweidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit nehmen wir daher (IV.5) (oder äquivalent (IV.6)), um die Gausskrümmung K zu definieren.

Bemerkung: Die Definition hängt scheinbar von der Wahl der X, Y ab, in Wirklichkeit aber nicht. (Übung)

Analog in höheren Dimensionen:

IV.7.4 Definition

(M, g) sei Riemannsche Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Für jeden 2-dimensionalen Unterraum $\sigma \subset T_p M$ sei

$$K_\sigma = g(R(X, Y)Y, X)$$

für eine Orthonormalbasis X, Y von σ . K_σ heißt **Schnittkrümmung** von g bei p bezüglich σ .

Bemerkung: Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der X, Y .

Bemerkung: Geometrische Bedeutung der Schnittkrümmung: Sei

$M_\sigma =$ Vereinigung der Geodäten (der Länge $< \varepsilon$), die von p in Richtungen tangential an σ starten.

Dann ist M_σ Fläche mit Gausskrümmung K_σ bei p .

IV.7.5 Satz

R ist durch $\{K_\sigma\}$ für alle σ eindeutig bestimmt.

Vergleiche mit dem Satz, dass eine symmetrische Bilinearform durch die zugeordnete quadratische Form eindeutig bestimmt ist. Der Beweis geht ähnlich.

Der Ricci-Tensor**IV.7.6 Definition**

$\text{Ric}(X, Y) := \sum_i g(R(e_i, X)Y, e_i)$, wobei $\{e_i\}$ eine Orthonormalbasis sei. Ric heißt **Ricci-Tensor**.

Fakt: Ric ist symmetrischer $(0,2)$ -Tensor, das heißt $\text{Ric}(X, Y) = \text{Ric}(Y, X)$.

Geometrische Bedeutung: Sei $\|X\| = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Ric}(X, X)_p &= \left(\begin{array}{l} \text{Summe der Schnittkrümmungen von } n-1 \text{ paarweise orthogonalen Ebenen,} \\ \text{die } X \text{ enthalten (denn } g(R(e_i, X)X, e_i) = K_{\text{span}(e_i, X)} \text{ für } e_i \text{ ONB, } e_n = X) \end{array} \right) \\ &= (n-1) \cdot \left(\begin{array}{l} \text{Mittelwert der Schnittkrümmung über alle} \\ \text{Ebenen, } \sigma \subset T_p M, \text{ die } X \text{ enthalten} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Beachte: $\text{Ric}(X, X)_p$ mit $\|X\| = 1$ bestimmt Ric vollständig, da Ric bilinear und symmetrisch ist.

Skalarkrümmung**IV.7.7 Definition**

$S := \sum_j \text{Ric}(e_j, e_j)$ heißt **Skalarkrümmung**.

Geometrische Bedeutung:

$$S = n(n-1) \cdot \text{Mittelwert der Schnittkrümmungen aller Ebenen } \sigma \subset T_p M$$