Prof. Dr. Boris Vertman
M. Sc. Artem Nepechiy

Wintersemester 2014

Geometrische Analysis

Blatt 10

Aufgabe 1. (5 Punkte)

Seien X und Y topologische Vektorräume. Sei $A \subset X \times Y$ eine Relation. Für $B \subset Y$ setzen wir

$$A \circ B := \{x \in X | (x, y) \in A \text{ für ein } y \in B\}.$$

(i) Sei A abgeschlossen und B kompakt. Ist $A \circ B$ abgeschlossen? Ist $A \circ B$ kompakt?

(ii) Sei A eigentlich, das heisst die Projektionen auf die Komponenten $\pi_1 : A \to X$ und $\pi_2 : A \to Y$ sind eigentlich. Ist $A \circ B$ kompakt, falls B kompakt ist?

Aufgabe 2. (5 Punkte)

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $K \in C^\infty(X \times X)$, und sei $A : C_0^\infty(X) \to C^\infty(X)$ die durch den Kern K gegebene stetige, lineare Abbildung. Zeige, dass A ein Pseudodifferentialoperator mit Amplitude $a \in S^{-\infty}(X \times X \times \mathbb{R}^n)$ ist.

Hinweis: Wähle $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\chi(\xi) \geq 0$ und $\int \chi(\xi) đ\xi = 1$. Setze

$$a(x, y, \xi) := e^{-i\langle x-y,\xi\rangle} K(x, y)\chi(\xi).$$

Aufgabe 3. (5 Punkte)

Sei $a \in S^m(X \times X \times \mathbb{R}^n)$ eigentlich getragen, das heißt

$$\{(x, y) \in X \times X | \exists \xi \in \mathbb{R}^n \text{ so, dass } a(x, y, \xi) \neq 0\}$$

ist eigentlich in $X \times X$, und $u \in \mathscr{E}(X)$. Betrachte für $x \in X$

$$f(x, \theta) := \int_X e^{i\langle x-y,\theta\rangle} a(x, y, \theta)u(y)dy.$$

Zeige, dass $f \in S^{-\infty}(X \times \mathbb{R}^n)$.

Aufgabe 4. (5 Punkte)

Beweisen Sie Satz 8.4 aus der Vorlesung (Methode der stationären Phase).