Prof. Dr. Boris Vertman
M. Sc. Artem Nepechiy

Wintersemester 2014

Geometrische Analysis

Blatt 9

Aufgabe 1. (5 Punkte)

Seien $a(x,\theta) \in C^\infty(X \times \mathbb{R}^N)$, $a_i(x,\theta) \in S^{m_i}(X \times \mathbb{R}^N)$, $b_{ij}(x,\theta) \in S^{n_{ij}}$ mit $m_i \to -\infty$, $n_{ij} \to -\infty$ für alle i. Sei $a \sim \sum_i a_i$ und $a_i \sim \sum_j b_{ij}$. Gib $a \sim \sum_{ij} b_{ij}$ ein Bedeutung, und zeige, dass dies eine asymptotische Entwicklung von a ist.

Aufgabe 2. (5 Punkte)

Wir studieren das oszillatorische Integral

$$I(a)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle} a(\xi)\, d\xi$$

mit von x unabhängiger Amplitude $a \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ (d.h. $a \in S^m(\{0\} \times \mathbb{R}^n)$).

Zeige:

(i) $\operatorname{sing\,supp} I(a) \subset \{0\}$.

(ii) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_+$, $\varepsilon > 0$ gibt es $C(\alpha,\beta,\varepsilon)$ so, dass für $|x| \geq \varepsilon$

$$|x^\alpha D_x^\beta I(a)(x)| \leq C(\alpha,\beta,\varepsilon).$$

Mit anderen Worten: $I(a)$ ist außerhalb der 0 eine Schwartzfunktion.

Aufgabe 3. (5 Punkte)

(i) Zeige für die Deltadistribution $\delta = \delta_0$, dass $\delta = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i\langle x,\xi\rangle} d\xi$ im Sinne oszillatorischer Integrale.

(ii) Schreibe $D^\alpha \delta$, α ein Multiindex, als ein oszillatorisches Integral, und zeige, dass $\operatorname{sing\,supp}(D^\alpha \delta) = \{0\}$.

(iii) Sei $f \in C^\infty(\Omega)$, $\operatorname{Im} f \geq 0$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen), $\varepsilon > 0$. Zeige

$$\frac{1}{f(x) + i\varepsilon} = \frac{1}{i} \int_0^\infty e^{i(f(x)+i\varepsilon)\tau} d\tau.$$

(iv) Ausserdem sei $df(x) \neq 0$ falls $f(x) = 0$. Zeige

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{f(x) + i\varepsilon} = \frac{1}{i} \int_0^\infty e^{if(x)\tau} d\tau \quad \text{in } \mathscr{D}'(\mathbb{R}).$$

Führe $1 = \chi(\tau) + (1 - \chi(\tau))$ ein, mit $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\chi(\tau) = 0$ für $\tau \leq 0$ und $\chi(\tau) = 1$ für $\tau \geq 1$, um dem Integral eine Bedeutung zu geben.

(v) Was ist $\operatorname{sing\,supp} \left(\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\frac{1}{f(x)+i\varepsilon} \right) \right)$?

(vi) Folgere hieraus, dass

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\frac{1}{ix + \varepsilon} - \frac{1}{ix - \varepsilon} \right) = 2\pi\delta \quad \text{in } \mathscr{D}'(\mathbb{R}).$$

Aufgabe 4. (5 Punkte)

Es seien $K \subset \mathbb{R}^n$, $L \subset \mathbb{R}^p$ kompakt sowie $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ glatte Funktionen mit $g(x, y, t) = 0$ für $x \notin K$ und $y \in L$. Es gelte für $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$|\partial_x^\alpha g(x, y, \lambda)| \leq C\lambda^{m+\delta|\alpha|} \qquad \text{für } (x, y) \in K \times L.$$

Dabei sind $m \in \mathbb{R}$, $0 \leq \delta < 1$ feste Konstanten (unabhängig von α). Wir setzen

$$\Sigma_f := \{(x, y) \in K \times L \mid d_x f(x, y) = 0\}.$$

Wir untersuchen nun das asymptotische Verhalten von

$$I(y, \lambda) := \int_K e^{i\lambda f(x,y)} g(x, y, \lambda)\, dx \qquad \text{für } \lambda \to \infty.$$

Für jedes N gebe es eine Umgebung Ω von Σ_f, so dass

$$|g(x, y, \lambda)| \leq C\langle\lambda\rangle^{-N} \quad \text{für } (x, y) \in \Omega.$$

Dann gilt für alle N

$$|I(y, \lambda)| \leq C\langle\lambda\rangle^{-N}$$

gleichmäßig in $y \in L$.