Prof. Dr. Boris Vertman
M. Sc. Artem Nepechiy

Wintersemester 2014

Geometrische Analysis

Blatt 3

Aufgabe 1. (Kohomologie der Sphäre) (5 Punkte)

(i) Berechnen See mittels der Zerlegung $S^1 = U \cup V$ mit

$$U = \{(x,y) \in S^1 | x > -\frac{1}{2}\}, \quad V = \{(x,y) \in S^1 | x < \frac{1}{2}\}$$

und der Mayer-Vietoris-Sequenz die de-Rham Kohomologie $H^*(S^1)$.

(ii) Zeigen Sie mittels der Mayer-Vietoris-Sequenz, dass für $n \geq 2$ und $k \geq 1$

$$H^k(S^{n-1}) = H^{k+1}(S^n)$$

gilt und folgern Sie daraus eine allgemeine Formel für $H^*(S^n)$.

Hinweis: Nutzen sie das Poincarè-Lemma aus der Vorlesung.

Aufgabe 2. (Künneth Formel) (5 Punkte)

Sei $M = B \times F$ ein Produkt von glatten kompakten Mannigfaltigkeiten B und F. Seien π_B und π_F die Projektionen von M auf die zwei Faktoren. Die bilineare Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon\ \Omega(B) \times \Omega(F) &\to \Omega(M) \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \pi_B^*(\alpha) \wedge \pi_F^*(\beta) \end{aligned}$$

ist eine Kettenabbildung und induziert einen Homomorphismus

$$f_*\colon\ H(B) \otimes H(F) \to H(B \times F) = H(M).$$

Zeige, dass f_* ein Isomorphismus ist, d.h.

$$H^p(B \times F) = \bigoplus_{j=1}^{p} H^j(B) \otimes H^{p-j}(F).$$

Hinweis: Benutze Induktion nach der Anzahl der offenen Mengen einer guten Überdeckung von B. Wende (ohne Beweis) die Mayer-Vietoris-Sequenz und das Fünf-Lemma für den Beweis des Induktionsschrittes an.

Aufgabe 3. (Euler-Charakteristik) (5 Punkte)

(i) Zeigen Sie, dass der Hodge Operator auf $\Omega^*(M)$ für eine geschlossene, orientierte Mannigfaltikgeit M einen Isomorphismus

$$H^k(M) \cong H^{n-k}(M)$$

induziert.

Hinweis: Fassen Sie $*$ als einen Homomorphismus zwischen zwei Komplexen auf.

Bitte umblättern

(ii) Folgern Sie, dass die Euler-Charakteristik

$$\chi(M) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \dim H^p(M)$$

eine Homotopie Invariante ist und $\chi(M) = 0$, falls M eine kompakte, ungerade-dimensionale, orientierbare, glatte Mannigfaltigkeit ist.

(iii) Falls M gerade-dimensional ist, ist $\chi(M) \equiv b_{\frac{m}{2}} \mod 2$, wobei $b_n = \dim(H^n(M))$ die n-te Bettizahl ist.

Aufgabe 4. (Greensche Formeln) (5 Punkte)

Sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine Funktion $u \in C^\infty(M)$ heißt harmonisch, falls $\triangle u = 0$.

(i) Ferner sei M kompakt. Beweisen Sie die Greenschen Formeln

$$\int_M u \triangle v dV_g = \int_M \langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v \rangle_g dV_g - \int_{\partial M} u N v dV_{\overline{g}}, \quad (1)$$

$$\int_M (u \triangle v - v \triangle u) dV_g = \int_{\partial M} (vNu - uNv) dV_{\overline{g}}. \quad (2)$$

Wobei $\overline{g}$ die induzierte riemannsche Metrik auf ∂M und N das Einheitsnormalenfeld von ∂M bezeichnet.

(ii) Zeigen Sie: Ist M kompakt und zusammenhängend mit $\partial M = \emptyset$, so sind die konstanten Funktionen die einzigen harmonischen Funktionen auf M.

(iii) Beweisen Sie: Ist M kompakt und zusammenhängend mit $\partial M \neq \emptyset$. Sind u, v harmonische Funktionen die auf ∂M übereinstimmen, so folgt $u = v$.