Prof. Dr. Boris Vertman
M. Sc. Artem Nepechiy

Wintersemester 2014

Geometrische Analysis

Blatt 1

Aufgabe 1. (Differentialformen) (5 Punkte)

Es sei M eine geschlossene Mannigfaltigkeit und $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ sei eine lineare Abbildung mit der Eigenschaft $d \circ d = 0$ und folgender Darstellung in lokalen Koordinaten

$$d(f dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k},$$

für eine glatte Funktion f. Diese Abbildung heißt die äußere Ableitung auf M.

(i) Es sei $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ gegeben durch

$$\omega(x, y) := \frac{-y}{x^2 + y^2} \cdot dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

Zeigen Sie: Es gilt $d\omega = 0$, jedoch gibt es kein $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ mit $df = \omega$.

(ii) Die zweifache Ausführung des Hodge-Stern Operators $*^2 : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$ ist die Multiplikation mit $(-1)^{k(n-k)}$. Das heißt $* * \omega = (-1)^{k(n-k)} \omega$ für $\omega \in \Omega^k$.

Aufgabe 2. (Cartan's Lemma) (5 Punkte)

Es sei M eine glatte n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $U \subset M$ eine offene Koordinatenumgebung. Gegeben seien 1-Differentialformen $\omega^1, \ldots, \omega^k \in \Omega^1(U)$ auf U, sodass $(\omega^1(p), \ldots, \omega^k(p))$ linear unabhängig ist für jedes $p \in U$.

Gilt

$$\sum_i^k \alpha^i \wedge \omega^i = 0,$$

für 1-Differentialformen $\alpha^1, \ldots, \alpha^k$ auf U, so lässt sich α^i als Linearkombination aus $\omega^1, \ldots, \omega^k$ schreiben mit glatten Koeffizienten.

Aufgabe 3. (Möbius Band) (5 Punkte)

(i) Sei M eine Mannigfaltigkeit der Dimension m und E ein reelles Vektorbündel vom Rank k über M. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(1) E ist trivial, das heißt isomorph zum trivialen Vektorbündel $M \times \mathbb{R}^k$.

(2) Es existieren glatte Schnitte $X_1, \ldots, X_k$ in E so, dass für jedes $p \in E$ die Familie $(X_1(p), \ldots, X_k(p))$ eine Basis von E_p ist.

(ii) Es sei

$$M^2 := \{(e^{2\pi it}, e^{\pi it}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : s, t \in \mathbb{R}$$

und $\pi : M^2 \to S^1; (w, z) \to w$. Zeigen Sie, dass (M^2, S^1, π) ein nicht-tiviales Vektorraumbündel über S^1 ist, somit beistzt das Möbiusband keinen nirgends verschwindenden Schnitt.

Hinweis: Betrachten Sie die Kurve $c : [0, 1] \to M^2; t \to (e^{2\pi it}, e^{\pi it})$.

(Bitte umblättern)

Aufgabe 4. (Charakterisierungen von Orientierbarkeit) (5 Punkte)

Es sei M eine glatte, zusammenhängende, n-dimensionale Mannigfaltigkeit, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) M ist orientierbar

(ii) $\Lambda^n T^* M \cong M^n \times \mathbb{R}$

(iii) Es existiert eine Familie von Karten in der differenzierbaren Struktur von M, die M ganz überdeckt und die Jacobi-Matrizen der Koordinatenwechsel positive Determinanten auf allen Überschneidungen der Karten haben.