Prof. Dr. B. Vertman
M. Wunderlich

WS 2015/2016
WWU Münster

Übungen zur Funktionentheorie

Serie 7

Aufgabe 26 (5 Punkte)**.** Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $h : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, $h \not\equiv 0$. Zeigen Sie, dass dann die Nullstellen von h abzählbar sind und keine Häufungspunkte besitzen. Beweisen Sie ferner: Es existiert ein eindeutiges $m \in \mathbb{N}$, so dass für jede Nullstelle z_0 gilt: $h(z) = (z - z_0)^m \tilde{h}(z)$, wobei $\tilde{h}$ holomorph auf U ist und $\tilde{h}(z_0) \neq 0$.

Hinweis. Identitätssatz.

Aufgabe 27 (5 Punkte)**.** Bestimmen Sie die Laurentreihe von $\sin(\frac{1}{z})$ und zeigen Sie, dass die Funktion in $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität hat.

Aufgabe 28 (5 Punkte)**.** Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $\mathcal{M}(U)$ die Menge der meromorphen Funktionen auf U. Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}(U)$ vermöge der in der Vorlesung eingeführten Addition und Multiplikation einen Körper bildet.

Hinweis. Grundlegender Teil ist zu zeigen, dass für $f \in \mathcal{M}(U)$ auch $\frac{1}{f}$ meromorph ist.

Aufgabe 29 (5 Punkte)**.** Sei U offen in $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$ und $f : U \to \mathbb{C}$ stetig mit

i) Die Einschränkung $f : \{z \in U \mid \operatorname{Im}(z) > 0\} \to \mathbb{C}$ ist holomorph, und

ii) die Einschränkung $f : U \cap \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist reell-wertig.

Zeigen Sie, dass dann die gespiegelte Funktion

$$\tilde{f}(z) := \begin{cases} f(z), & z \in U \\ \overline{f(\bar{z})}, & \bar{z} \in U \end{cases}$$

holomorph auf $U \cup \overline{U}$ ist, wobei $\overline{U} := \{z \in \mathbb{C} \mid \bar{z} \in U\}$ sei. Wenden Sie dazu den Satz von Morrera an und betrachten Sie dabei

1) Dreiecke die vollständig in $U \setminus \mathbb{R}$ bzw. $\overline{U} \setminus \mathbb{R}$ liegen,

2) Dreiecke mit einem Punkt oder einer Seite in $\mathbb{R}$ und

3) allgemeine Dreiecke in $U \cup \overline{U}$.

Hinweis. Dreiecke mit einem Punkt oder einer Seite in $\mathbb{R}$ können durch Folgen von Dreiecken, die vollständig in $U \setminus \mathbb{R}$ oder $\overline{U} \setminus \mathbb{R}$ liegen approximiert werden.

Nikolausaufgabe (5 Punkte)**.** Jedes Jahr muss der Weihnachtsmann die Geschenke verteilen und hierzu fliegt er mit seinem Schlitten um die Welt. Mit der steigenden Bevölkerungszahl wird es für ihn immer schwieriger, der Situation Herr zu werden. Zwar ist sein magischer Schlitten unheimlich flink, aber auch dieser hat nur endliche Geschwindigkeit. Darum ließ er sich von seinen Elfen ein GPS-Gedöhns basteln, welches seine Flugroute in Form einer Kurve $\gamma : [0, l] \to \mathbb{S}^2$ aufzeichnet, wobei die Erde als die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$ modelliert wird. „Gar nicht mehr so weihnachtlich, mit der ganzen Mathematik“, denkt er. „Aber eigentlich auch spannend“, denkt er. Schon seit Jahren kann er nicht mehr zählen, wie oft er auf seiner Tour die Erde umrundet. Sein Haus, das weiß er, ist genau am Nordpol und sein Schlitten, welcher davor steht, eben ein kleines Stück daneben. Er startet und landet auch immer an der selben Stelle, Macht der Gewohnheit. Über den Südpol fliegt er auch nie. „Da ist eh niemand“, rechtfertigt er sich. Aber so recht will ihm keine Formel einfallen, mit der er ausrechnen kann, wie oft er auf seinem Flug die Erde umrundet hat. „Ach, wenn mir doch nur jemand helfen könnte“, murmelt er leise und verzweifelt in seinen Wattebart.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Freitag, den 11. Dezember 2015, um 10.00 Uhr, in den Briefkästen im Hörsaalgebäude.