Prof. Dr. B. Vertman
M. Wunderlich

WS 2016/2017
WWU Münster

Übungen zur Differentialgeometrie I
Serie 12

Aufgabe 49 (4 Punkte)**.** Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $r > 0$ so klein, dass $\exp_p : B_r(0_p) \to \exp_p(B_r(0_p))$ ein Diffeomorphismus ist. Sei ferner $(e_1, \dots, e_n)$ eine Orthonormalbasis von (T_pM, g_p). Zeigen Sie:

a) Die Abbildung $x^{-1} : B_r(0) \to \exp_p(B_r(0_p)),(x_1, \dots, x_n) \mapsto \exp_p(\sum_{i=1}^n x_i e_i)$ ist ein Diffeomorphismus.

b) Für die Karte $x : \exp_p(B_r(0_p)) \to B_r(0) \subset \mathbb{R}^n$ um p gilt:

$$g_{ij}(p) = \delta_{ij} \text{ und } \Gamma_{ij}^k(p) = 0 \text{ für alle } 1 \leq i, j, k \leq n.$$

Wir nennen solche Koordinaten *Normalkoordinaten*.

Aufgabe 50 (4 Punkte)**.** Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und betrachten Sie Normalkoordinaten $x_1, \dots, x_n$ um p. Wir schreiben

$$\begin{aligned} R_{ijk} &= R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_k}, \ \mathrm{Ric}_{ij} = \mathrm{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right), \\ R_{ijkl} &= g\left(R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l}\right), \end{aligned}$$

und erinnern an die Notation $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, welche bei der Definition der Christoffelsymbole eingeführt wurde. Zeigen Sie, dass dann an der Stelle p gilt:

$$\begin{aligned} R_{ijk} &= \sum_{l=1}^n \left\{\Gamma_{jk,i}^l - \Gamma_{ik,j}^l\right\}\frac{\partial}{\partial x_l}, \\ R_{ijkl} &= \frac{1}{2}\left(g_{jl,ki} + g_{ik,lj} - g_{jk,li} - g_{il,kj}\right), \\ \mathrm{Ric}_{ij} &= \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij,l}^l - \Gamma_{il,j}^l. \end{aligned}$$

Aufgabe 51 (4 Punkte). Sei (M, g) eine n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit, c eine Geodätische in M und $X_1, \dots, X_n$ eine Orthonormalbasis von parallelen Vektorfeldern längs c mit $\dot{c}(0) = \lambda X_1(0)$, für $\lambda \in \mathbb{R}$. Sei $R(t) \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ die darstellende Matrix des Endomorphismus $v \mapsto R(v, \dot{c}(t))\dot{c}(t)$ von $T_{c(t)}M$ bezüglich der Basis $X_1(t), \dots, X_n(t)$. Zeigen Sie, dass $Y(t) = \sum_{i=1}^n y_i(t)X_i(t)$ genau dann ein Jacobifeld ist, wenn

$$\begin{pmatrix} y_1''(t) \\ \vdots \\ y_n''(t) \end{pmatrix} + R(t)\begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \equiv 0.$$

Aufgabe 52 (4 Punkte)**.** Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) heißt *homogener Raum*, falls die Gruppe der Isometrien transitiv auf M wirkt. Eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit heißt *symmetrischer Raum*, falls für alle $p \in M$ eine Isometrie s_p existiert mit

$$s_p(p) = p,\ ds_p = -\operatorname{id}|_{T_pM}\,.$$

a) Zeigen Sie, dass homogene Räume vollständig sind.

b) Zeigen Sie, dass symmetrische Räume homogen sind.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Freitag, der 27. Januar 2016, um 10.00 Uhr, in den Briefkästen im Hörsaalgebäude.