Prof. Dr. B. Vertman
M. Wunderlich

WS 2016/2017
WWU Münster

Übungen zur Differentialgeometrie I
Serie 8

Aufgabe 29 (4 Punkte)**.** Sei $E \to M$ ein Vektorbündel. Dann heißt

$$\begin{aligned}\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(E) &\to \Gamma(E)\\ (X, s) &\mapsto \nabla_X s\end{aligned}$$

kovariante Ableitung bzw. *Zusammenhang*, falls ∇ bilinear, tensoriell in der ersten und derivativ in der zweiten Komponente ist.

a) Sei $E = M \times \mathbb{R}^m$ ein triviales Vektorbündel. Zeigen Sie, dass durch $\nabla_X (s_1, \dots, s_m) := (Xs_1, \dots, Xs_m)$ eine kovariante Ableitung, die *triviale* kovariante Ableitung, definiert ist.

b) Sei $E = E_1 \oplus E_2$ die direkte Summe von zwei Vektorbündeln. Betrachten Sie die entsprechenden Projektionen $\pi_j : E \to E_j$ für $j = 1, 2$. Sei ∇ eine kovariante Ableitung auf E. Wir identifizieren jeden Schnitt $X \in \Gamma(E_j)$ mit $X \oplus \{0\}$ (bzw. $\{0\} \oplus X$) $\in \Gamma(E)$ und definieren für alle $Y \in \Gamma(TM)$: $\nabla^{E_j}_Y X := \pi_j(\nabla_Y X)$, $j = 1, 2$. Zeigen Sie, dass die ∇^{E_j} kovariante Ableitungen, sogenannte *Projektionszusammenhänge* auf den E_j definieren und dass ferner gilt:

$$\nabla_Y = \begin{pmatrix} \nabla^{E_1}_Y & \pi_1(\nabla_Y \,\cdot\,) \\ \pi_2(\nabla_Y \,\cdot\,) & \nabla^{E_2}_Y \end{pmatrix}$$

c) Sei $E \to M$ ein Vektorbündel über M mit kovarianter Ableitung ∇. Sei E^* das duale Vektorbündel. Zeigen Sie, dass $\nabla^*_X \varphi(\psi) := d(\varphi(\psi))[X] - \varphi(\nabla_X \psi)$ für alle $\psi \in \Gamma(E)$ eine kovariante Ableitung auf E^* ist, der sogenannte *duale Zusammenhang*. Beachten Sie hierfür dass $\varphi(\psi) \in C^\infty(M)$.

d) Sei $E = E_1 \otimes E_2$ Tensorprodukt von zwei Vektorbündeln über M mit kovarianten Ableitungen ∇^j für $j = 1, 2$. Zeigen Sie, dass für $Y \in \Gamma(E_1)$, $Z \in \Gamma(E_2)$ und $X \in \Gamma(TM)$ $\nabla_X(Y \otimes Z) := (\nabla^1_X Y) \otimes Z + Y \otimes (\nabla^2_X Z)$ einen Zusammenhang auf E definiert, den sogenannten *Tensorzusammenhang*.

Aufgabe 30 (4 Punkte)**.** a) Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit mit zugehörigem Levi-Civita-Zusammenhang ∇. Zeigen Sie, dass für die entsprechenden Christoffel-Symbole $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ gilt.

b) Seien ∇^1, ∇^2 zwei kovariante Ableitungen auf einem Vektorbündel E. Zeigen Sie, dass $\nabla^1 - \nabla^2$ in beiden Komponenten tensoriell ist.

c) Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Der *Riemannsche Krümmungstensor* sei definiert durch

$$\begin{aligned}R : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\to \Gamma(TM)\\ (X, Y, Z) &\mapsto R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass dieser tatsächlich in jeder Komponente tensoriell ist.

Aufgabe 31 (4 Punkte)**.** Seien $Z_1, \dots, Z_n \in \Gamma(TM)$ und $\{Z_j(p)\}$ eine Basis von T_pM. Zeigen Sie, dass dann äquivalent sind:

a) Es existieren lokale Koordinaten so dass für alle $j = 1, \dots, n$ gilt: $Z_j \equiv \frac{\partial}{\partial x_j}$.

b) $[Z_i, Z_j] \equiv 0$ nahe $p \in M$.

Aufgabe 32 (4 Punkte)**.** Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $X, Y \in \Gamma(TM)$. Ferner sei $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ Integralkurve von X mit $c(0) = p \in M$. Zeigen Sie, dass die Levi-Civita-Ableitung von (M, g) dann die Identität

$$(\nabla_X Y)(p) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (P^{c_t})^{-1}(Y(c(t))$$

erfüllt, wobei $P^{c_t} : T_pM \to T_{c(t)}M$ den Paralleltransport längs $c_t := c|_{[0,t]}$ bezeichnet.

Nikolausaufgabe (4 Bonuspunkte)**.** Jedes Jahr muss der Weihnachtsmann Kindern auf der ganzen Welt Äpfelchen und Nüsschen auf den Teller legen. Natürlich nur schöne Äpfelchen und Nüsschen. Doch die Apfelernte ist ein ganzes Stück vor Weihnachten, so ist es ganz natürlich, dass einige der Äpfel bereits schrumpelig geworden sind. Früher konnten seine Elfen diese noch per Hand aussortieren, doch irgendwann ging dies nicht mehr. Kein Problem dachte ich der Weihnachtsmann und liess eine Maschine bauen, die die Äpfelchen wiegt und dann die leichteren, welche eben schon mehr Wasser verloren haben und dadurch schrumpeliger wurden, aussortierte. Doch auch inzwischen kommt diese Maschine an ihre Grenzen, weil es einfach immer viel zu lange dauert, bis die Waage sich eingestellt hat, nachdem ein Äpfelchen auf sie draufpolterte.

Aber ein besonders kluge Elf hatte eine Idee und liess eine Maschine bauen, welche dank moderner Bild- und Computertechnologie in Millisekunden ein Bild vom Apfel macht und die Konturlinie so gut ausrechnet, dass Sie als als Kurve $c : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ beliebiger Regularität aufgefasst werden kann. Er wollte auch noch ein Programm schreiben lassen, welches nun erkennt, ob ein Apfel schon schrumpelig oder noch nicht ist, doch leider war dieser Elf nur über eine befristete Drittmittelstelle angestellt, welche auslief bevor das Projekt beendet war. Wie das nunmal so mit dem Bildungspräkariat ist, konnte der Weihnachtsmann keine neuen Gelder für diesen Elfen finden und ehe man sich versah, musste der Elf zum Osterhasen wechseln – wieder befristet und auch mit ganz fiesen Knebelverträgen und NDAs, so dass er nicht einmal mehr dem Weihnachtsmann schreiben darf, wie das denn nun ging.

Nun sind die restlichen Elfen des Weihnachtsmann ein wenig aufgeschmissen. Zwar können sie sehr gut rechnen und in Windeseile programmieren, und auch für jede geometrische Größe und Formel die man ihnen gibt, ein sehr schnelles Programm schreiben, aber die Geometrie selbst ist ihnen dann doch zu schwer. Können Sie helfen?

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Freitag, den 16. Dezember 2016, um 10.00 Uhr, in den Briefkästen im Hörsaalgebäude.