Prof. Dr. B. Vertman
M. Wunderlich

WS 2016/2017
WWU Münster

Übungen zur Differentialgeometrie I
Serie 7

Aufgabe 25 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass jede, nicht notwendigerweise kompakte, differenzierbare Mannigfaltigkeit M eine Riemannsche Metrik g besitzt. Wählen Sie hierzu einen Atlas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in I}$ und konstruieren Sie mittels geeigneter Pullbacks lokale Metriken. Verkleben Sie diese schließlich mit einer den U_α subordinierten Zerlegung der Eins.

Aufgabe 26 (4 Punkte)**.** Sei (M, g) eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass M zusammen mit der Abstandsfunktion d_g zu einem metrischen Raum wird. Zeigen Sie ferner, dass die durch d_g induzierte Topologie mit der ursprünglichen Topologie von (M, g) übereinstimmt.

Aufgabe 27 (4 Punkte)**.** Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, ∇ die Levi-Civita-Ableitung. Zeigen Sie, dass die Torsion

$$\begin{aligned} T : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\to \Gamma(TM) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \end{aligned}$$

in beiden Komponenten tensoriell ist.

Aufgabe 28 (4 Punkte)**.** Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und ∇ der zugehörige Levi-Civita-Zusammenhang. Zeigen Sie die folgende Identität für $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) = {} & Xg(Y, Z) - Zg(X, Y) + Yg(Z, X) \\ & + g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) - g([Y, Z], X) \end{aligned}$$

Schreiben Sie hierzu am besten die Terme der Gestalt $Xg(Y, Z)$ mittels der Eigenschaften der Levi-Civita-Ableitung um.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Freitag, den 9. Dezember 2016, um 10.00 Uhr, in den Briefkästen im Hörsaalgebäude.