Prof. Dr. B. Vertman
M. Wunderlich

WS 2016/2017
WWU Münster

Übungen zur Differentialgeometrie I
Serie 5

Konvention. Von nun an unterdrücken wir das Wort *differenzierbar* und nehmen an, dass alle Mannigfaltigkeiten und Vektorfelder C^∞ sind, es sei denn wir geben explizit eine schwächere Regularitätsklasse an. Insbesondere ist damit aber auch in Aufgaben, in denen man zeigen soll, dass etwas eine Mannigfaltigkeit oder ein Vektorfeld ist, eine differenzierbare Mannigfaltigkeit bzw. ein differenzierbares Vektorfeld gemeint.

Aufgabe 17 (2 Punkte)**.** Seien M, N Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie, dass das kartesische Produkt $M \times N$, versehen mit der Produkttopologie, wieder eine Mannigfaltigkeit ist. Beschreiben Sie ferner das Tangentialbündel von $M \times N$ in Termen von M und N.

Aufgabe 18 (6 Punkte)**.** Sei M^n eine n-Mannigfaltigkeit, $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung von M und bezeichne $J_\nu = (-\nu, \nu)^n \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

i) Es gibt eine lokal endliche Verfeinerung $(W_\beta)_{\beta \in B}$ und Karten $x_\beta : W_\beta \to J_3$, so dass $M = \cup_{\beta \in B} x^{-1}(J_1)$ gilt.

ii) Es gibt eine glatte Funktion $\psi : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ mit $\psi|_{J_1} = 1$ und $\psi|_{\mathbb{R}^n \setminus J_2} = 0$.
Hinweis. Es ist am einfachsten, so eine Funktion zunächst für $n = 1$ zu konstruieren. Überlegen Sie sich dann, wie sie aus dieser Funktion eine für den allgemeinen Fall erhalten können.

iii) Es gibt eine Familie $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ reellwertiger, nichtnegativer differenzierbarer Funktionen auf M, so dass gilt:

I $(\operatorname{supp} \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ ist eine lokal endliche Überdeckung mit $\operatorname{supp}(\varphi_\alpha) \subset U_\alpha$.
II $\sum_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(p) = 1$ für alle $p \in M$.

Wir nennen eine solche Familie von Funktionen dann auch (U_α) *untergeordnete Zerlegung der Eins.*

iv) Folgern Sie: Sei $U \subset M$ offen, $A \subset U$ abgeschlossen in M und $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$, so gibt es ein $g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ mit $f(a) = g(a)$ für alle $a \in A$ und $\operatorname{supp}(g) \subset U$.

Aufgabe 19 (4 Punkte)**.** Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit, G eine Gruppe von Diffeomorphismen von M, welche frei und eigentlich diskontinuierlich operiert, M/G der Bahnenraum. Wir bezeichnen mit $\pi : M \to M/G, p \mapsto [p]$ die Projektionsabbildung. Wir nennen ein Vektorfeld X auf M *G-invariant,* falls $dg_p(X(p)) = X(g.p)$ für alle $g \in G$ und $p \in M$. Zeigen Sie:

a) Ist X ein G-invariantes Vektorfeld auf M, so ist
$$\bar{X} : M/G \to TM/G,\ [p] \mapsto d\pi_p(X(p))$$
ein wohldefiniertes Vektorfeld auf M/G.

b) Ist X G-invariantes Vektorfeld auf M und c Integralkurve von X, so ist $\pi \circ c$ Integralkurve von $\bar{X}$.

c) Sei $v \in \mathbb{R}^2$, $X_v(x) := v$ das entsprechende konstante Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie für $M = \mathbb{R}^2$ und $G = \mathbb{Z}^2$, Gruppe der ganzzahligen Translationen des $\mathbb{R}^2$, die Integralkurven des Vektorfeldes $\bar{X}_v([x]) = d\pi_x X_v(x)$ und untersuchen Sie, für welche $v \in \mathbb{R}^2$ diese Kurven periodisch sind.

Aufgabe 20 (4 Punkte)**.** Sei $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$, $M = \mathbb{R}^n$. Sei $X \in \Gamma(TM)$ gegeben durch $X(y) = Ay$. Bestimmen Sie die Integralkurve $y(t)$ von X mit $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Freitag, den 25. November 2016, um 10.00 Uhr, in den Briefkästen im Hörsaalgebäude.