Prof. Dr. B. Vertman
M. Wunderlich

WS 2016/2017
WWU Münster

Übungen zur Differentialgeometrie I
Serie 4

Aufgabe 13 (2 Punkte)**.** Sei M^m eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension m, $p \in M$, U eine offene Umgebung von p und (U, φ) eine lokale Karte um p. Zeigen Sie:

a) Seien N^n, L^l weitere differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f : M \to N$, $g : N \to L$ differenzierbare Abbildungen. Zeigen Sie dann, dass die Kettenregel gilt:
$$d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p$$

b) Die Abbildung
$$\theta : T_pM \to \mathbb{R}^m,\ [c] \mapsto \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi \circ c(t)$$
ist ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräumen.

c) Die Vektoren $\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x_m}\right|_p$ bilden eine Basis von T_pM.

Erinnerung. Eine *Wirkung* einer Gruppe G auf einen topologischen Raum X ist ein Homomorphismus $\rho : G \to \text{Homöo}(X)$ in die Gruppe der Homöomorphismen $X \to X$. Wir schreiben $g.p = \rho(g)(p)$ für $P \in X$. Die Wirkung heißt *frei*, wenn $g.p \neq p$ für alle $g \neq e$. Die Wirkung heißt *eigentlich diskontinuierlich*, falls für alle kompakten Teilmengen $K \subset X$ nur endlich viele Gruppenelemente $g_1, \dots, g_{N_K} \in G$ existieren, mit $g_i(K) \cap K \neq \emptyset$ für $1 \leq i \leq N_K$.

Aufgabe 14 (4 Punkte)**.** Sei G eine Gruppe, welche auf einer topologischen n-Mannigfaltigkeit M frei und eigentlich diskontinuierlich wirke. Es bezeichne $G.p = \{g.p \mid g \in G\}$ das Orbit von p unter G. Es ist klar, dass $p \sim q \Leftrightarrow p \in G.q$ eine Äquivalenzrelation definiert. Zeigen Sie:

a) $M/G := M/\sim$, versehen mit der Quotiententopologie, ist wieder eine topologische n-Mannigfaltigkeit.

b) Ist M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und wirkt G zusätzlich durch Diffeomorphismen (d.h. jedes $\rho(g)$ ist sogar ein Diffeomorphismus), so ist M/G eine differenzierbare n-Mannigfaltigkeit.

Realisieren Sie den zweidimensionalen Torus als Quotientenraum einer Wirkung. Geben Sie hierzu explizit eine Gruppenwirkung auf $\mathbb{R}^2$ an; erläutern Sie, warum der Quotientenraum ein Torus ist (kein formaler Beweis).

Aufgabe 15 (8 Punkte)**.** Sei X ein lokalkompakter Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis der Topologie. Zeigen Sie:

i) Es gibt eine Basis $\{G_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ der Topologie, für die alle $\overline{G}_i$ kompakt sind.

ii) Es gibt eine Folge kompakter Mengen $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$, mit $C_i \subset \mathring{C}_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i = X$.

iii) Ist $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung von X und $i \in \mathbb{N}$, so gibt es offene Mengen $V_{i_1}, \ldots, V_{i_{r_i}}$ mit

- I $C_i \setminus \mathring{C}_{i-1} \subset V_{i_1} \cup \cdots \cup V_{i_{r_i}}$,
- II für alle i, ρ existiert α mit $V_{i_\rho} \subset U_\alpha$,
- III für alle ρ gilt $V_{i_\rho} \subset \mathring{C}_{i+1} \setminus C_{i-2}$, wobei $C_i = \emptyset$ für $i < 0$ gesetzt wird.

iv) X ist parakompakt.

Aufgabe 16 (2 Punkte)**.** Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie:

a) M besitzt einen abzählbaren Teilatlas.

b) M ist lokalkompakt.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Freitag, den 18. November 2016, um 10.00 Uhr, in den Briefkästen im Hörsaalgebäude.