Prof. Dr. B. Vertman
M. Wunderlich

WS 2016/2017
WWU Münster

Übungen zur Differentialgeometrie I
Serie 2

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare und nach Bogenlänge parametrisierte Kurve und $E(x) = Ax + b$ eine Isometrie des euklidischen Raumes mit $A \in \mathrm{SO}(n), b \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die Krümmung invariant unter dieser Bewegung ist, also dass die Krümmung der Kurve $\tilde{c} := E \circ c$ mit der Krümmung von c übereinstimmt. Bestimmen Sie ferner für den Fall $n = 3$ die Torsion dieser Kurve. Diskutieren Sie was passiert, wenn $A \in \mathrm{O}(n)$ mit $\det A = -1$.

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.** Beweisen Sie Lemma 4.4: Ist $U(t) : I \to \mathrm{O}(n)$ eine Kurve von Matrizen mit $U'(t) = AU(t)$, wobei A eine $n \times n$-Matrix ist, so muss A schiefsymmetrisch sein.

Aufgabe 7 (4 Punkte)**.** a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{O}(n)$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ ist. Bestimmen Sie die Dimension und den Tangentialraum an $\mathrm{id} \in \mathrm{O}(n)$.

b) Seien $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $a'(t)^2 + b'(t)^2 = 1$ und $a(t) > 0$. Zeigen Sie, dass das Bild von

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (t, \varphi) \to (a(t)\cos(\varphi), a(t)\sin(\varphi), b(t))$$

eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist, eine sogenannte *Rotationsfläche*.

c) Sei $c : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine injektive, reguläre und differenzierbare Kurve. Zeigen Sie, dass der *Kegel über c*

$$C(c) := C(\mathrm{im}(c)) = \left\{ rx \in \mathbb{R}^3 \mid r > 0, x \in \mathrm{im}(c) \right\}$$

eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist und bestimmen Sie für Punkt $(r, c(t)) \in C(\mathrm{im}(c))$ den Tangentialraum als affine Ebene des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 8 (4 Punkte)**.** Es sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ eine wegparametrisierte und differenzierbare Kurve. Sei $t_0 \in (a, b)$. Die Tangente G in t_0 teilt $\mathbb{R}^2$ in zwei Halbebenen auf. Sei H^+ diejenige Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^2 \setminus G$ mit $c(t_0) + N(t) \in H^+$, wobei $N(t)$ das zu c gehörige orientierte Normalenfeld bezeichne. Zeigen Sie:

a) Falls die orientierte Krümmung $\kappa(t_0) > 0$ erfüllt, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $c(t) \in H^+$ für alle $t \in (t_0, t_0 + \varepsilon)$.

b) Gibt es $\varepsilon > 0$ mit $c(t) \in H^+ \cup G$ für alle $t \in (t_0, t_0 + \varepsilon)$, so ist $\kappa(t_0) \geq 0$.

c) Weder in a) noch b) gilt Äquivalenz.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Freitag, den 4. November 2016, um 10.00 Uhr, in den Briefkästen im Hörsaalgebäude.