

Mathematik-Wettbewerb

Tag der Mathematik 2025

mögliche Lösungswege

Aufgabe 1: (10 Punkte)

Anna frühstückt immer mindestens eine der folgenden Sachen: Müsli, Brot oder Joghurt (Regel 1). Montags ist sie aber besonders wählerisch. Falls sie Müsli und Brot isst, dann auch Joghurt (Regel 2). Falls sie Brot oder Joghurt isst, dann auch Müsli (Regel 3). Sie isst niemals Müsli und Joghurt (Regel 4), jedoch isst sie immer Brot oder Müsli (Regel 5). Was isst Anna montags?

Lösung:

Falls Anna Joghurt isst, muss sie aufgrund von Regel 3 auch Müsli essen, was aber Regel 4 widerspricht. Also isst Anna keinen Joghurt.

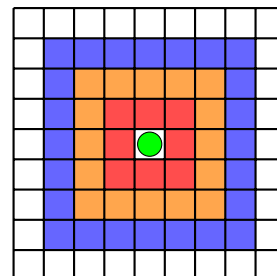
Falls Anna Brot isst, muss sie aufgrund von Regel 3 auch Müsli essen. Wegen Regel 2 isst sie dann aber auch Joghurt, was wir schon ausgeschlossen haben. Also isst Anna kein Brot.

Wegen Regel 1 isst Anna folglich Müsli (und dies passt auch zu allen anderen Regeln).

Aufgabe 2: (10 Punkte)

Ein Grashüpfer hüpft in jedem Zeitschritt ein Feld weiter, wobei er sich in jede der Richtungen “vor”, “zurück”, “links” oder “rechts” mit gleicher Wahrscheinlichkeit bewegt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich der Grashüpfer nach 3 Schritten im

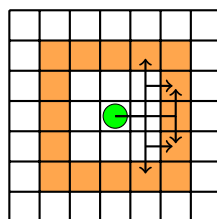
- (a) Ausgangsfeld in der Mitte?
- (b) roten Bereich?
- (c) orangenen Bereich?
- (d) blauen Bereich?



Lösung:

Da der Grashüpfer in jede Richtung mit gleicher Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ hüpfen kann, beträgt die Wahrscheinlichkeit für jeden seiner möglichen Wege aus drei Schritten $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass er sich danach in einem der Bereiche befindet, berechnet sich daher als Produkt aus $\frac{1}{64}$ und Anzahl der Wege, die in diesem Bereich enden.

- (a) Nach drei Schritten gelangt er nie zurück zum Ausgangsfeld, also ist $W(Mitte) = 0$.
- (d) In den blauen Bereich gelangt er nur auf den vier Wegen, bei denen er nach jedem Schritt in der selben Richtung weiterhüpft, also $W(Blau) = 4 \cdot \frac{1}{64} = \frac{1}{16}$.
- (c) Für den orangenen Bereich skizzieren wir wegen der Symmetrie nur die 6 Wege, bei denen der erste Schritt nach rechts geht, und multiplizieren die Anzahl mit 4. Wir erhalten $W(Orange) = 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{64} = \frac{6}{16}$.



- (b) Da er nach drei Schritten in einem der genannten Bereiche landen muss, gilt $W(Rot) = 1 - (W(Mitte) + W(Blau) + W(Orange)) = \frac{9}{16}$.

Aufgabe 3: (10 Punkte)

Für reelle Zahlen a, b, c ungleich Null sei bekannt, dass die beiden Gleichungen

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \quad \text{und} \quad b \cdot x^2 + c \cdot x + a = 0$$

eine gemeinsame Lösung x haben. Finden Sie diese.

Lösung:

Wegen $c \neq 0$ muss auch $x \neq 0$ sein. Nach Multiplikation der linken Gleichung mit x erfüllt x also auch die beiden Gleichungen

$$a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x = 0 \quad \text{und} \quad b \cdot x^2 + c \cdot x + a = 0 \quad .$$

Nach Subtraktion der rechten Gleichung von der linken gilt folglich

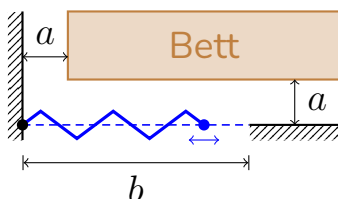
$$a \cdot x^3 - a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot x^3 = a \quad \xLeftrightarrow{a \neq 0} \quad x^3 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \quad .$$

Somit muss $x = 1$ die gemeinsame Lösung sein.

Aufgabe 4: (10 Punkte)

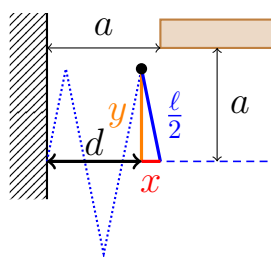
Damit Bob's großes Bett in sein kleines Zimmer passt und die Tür dennoch ganz auf und zu geht, entscheidet er sich für eine Falttür mit Gesamtbreite b , bestehend aus n Lamellen gleicher Breite ℓ und zwei Endstücken der Breite $\frac{\ell}{2}$ (Skizze beispielhaft für $n = 4$).

- (a) Genügen $n = 2$ Lamellen, wenn das Bett den Abstand $a = \frac{b}{6}$ von den Zimmerwänden hat?
- (b) Wie groß muss der Abstand a bei einer geraden Anzahl n von Lamellen mindestens sein?



Lösung: Zuerst ermitteln wir die Breite ℓ einer einzelnen Lamelle aus der Gesamtbreite $b = n \cdot \ell + 2 \cdot \frac{\ell}{2} = (n + 1) \cdot \ell$ zu $\ell = \frac{b}{n+1}$.

- (a) Ja, denn selbst geschlossen ragt die Falttür nur $\frac{\ell}{2} = \frac{b}{2 \cdot (n+1)} = \frac{b}{6}$ ins Zimmer, und beim Zuziehen wird dieser Abstand noch kleiner.
- (b) Wenn die äußerste Lamelle beim Zuziehen am Bett vorbeipasst, dann auch die anderen.



Nach Skizze und dem Satz von Pythagoras gilt $x^2 + y^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4 \cdot (n+1)^2}$ sowie der Zusammenhang $d = (2 \cdot n + 1) \cdot x$, d.h. $x = \frac{d}{2 \cdot n + 1}$. Damit die äußerste Lamelle am Bett vorbeipasst, muss im Fall $d = a$ auch $y < a$ gelten. Wir erhalten die Bedingung

$$a^2 > y^2 = \frac{b^2}{4 \cdot (n+1)^2} - x^2 = \frac{b^2}{4 \cdot (n+1)^2} - \frac{a^2}{(2 \cdot n + 1)^2} \quad .$$

Folglich muss für den Abstand a gelten

$$a > \frac{b}{2 \cdot (n+1) \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{(2 \cdot n + 1)^2}}} \quad .$$