Dirichlet-Reihen – ein Schnappschuss

Andreas Defant

Mathematik-Fest, 11.Mai 2014

Unendlich lange Summen, z.B. ...

$$\mathbf{1} + \mathbf{1} + \mathbf{1} + \mathbf{1} + \mathbf{1} + \mathbf{1} + \mathbf{1} + \ldots\ldots\ldots = \mathbf{?}$$

Unendlich lange Summen, z.B. ...

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots\ldots = \infty$$

In komplizierterer Notation ...

$$\frac{1}{1^0} + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{3^0} + \frac{1}{4^0} + \frac{1}{5^0} + \ldots\ldots\ldots = \infty$$

In komplizierterer Notation ...

$$\frac{1}{1^0} + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{3^0} + \frac{1}{4^0} + \frac{1}{5^0} + \ldots\ldots\ldots = \infty$$

Harmonisches Wandern ums Zwischenahner Meer ...

In komplizierterer Notation ...

$$\frac{1}{1^0} + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{3^0} + \frac{1}{4^0} + \frac{1}{5^0} + \ldots\ldots\ldots = \infty$$

Harmonisches Wandern ums Zwischenahner Meer ...

Die Summe der harmonische Reihe ist unendlich

$$\frac{1}{1^1} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{4^1} + \frac{1}{5^1} + \ldots\ldots\ldots = \infty$$

In komplizierterer Notation ...

$$\frac{1}{1^0} + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{3^0} + \frac{1}{4^0} + \frac{1}{5^0} + \ldots\ldots\ldots = \infty$$

Harmonisches Wandern ums Zwischenahner Meer ...

Die Summe der harmonische Reihe ist unendlich

$$\frac{1}{1^1} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{4^1} + \frac{1}{5^1} + \ldots\ldots\ldots = \infty$$

Warum ?

Die Baseler Summe ist endlich - der Beweis von Mengoli 1645

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\ldots\ldots \leq 2$$

Die Baseler Summe ist endlich - der Beweis von Mengoli 1645

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\dots\dots \leq 2$$

Das Baseler Problem – ein barockes Rätsel

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\dots\dots = ?$$

Die mirakulöse Lösung – Euler 1735

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\ldots\ldots = \frac{1}{6}\pi^2$$

Die mirakulöse Lösung – Euler 1735

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\ldots\ldots = \frac{1}{6}\pi^2$$

Warum mirakulös ?

Ein Rockstar unter den Zahlen: Die Kreiszahl π

Irrationalität und Transzendenz . . .

Die mirakulöse Lösung – Euler 1735

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\dots\dots\dots = \frac{1}{6}\pi^2$$

Warum mirakulös ?

Ein Rockstar unter den Zahlen: Die Kreiszahl π

Irrationalität und Transzendenz ...

Problem – Heute 2014

$$\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\dots\dots\dots = ?$$

Die mirakulöse Lösung – Euler 1735

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\ldots\ldots = \frac{1}{6}\pi^2$$

Warum mirakulös ?

Ein Rockstar unter allen Zahlen: Die Kreiszahl π

Irrationalität und Transzendenz ...

Weniger wäre schon viel: Gibt es natürliche Zahlen p, q derart, dass

$$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \ldots\ldots\ldots = \frac{p}{q}\pi^3 \ ?$$

Die mirakulöse Lösung – Euler 1735

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots\ldots\ldots = \frac{1}{6}\pi^2$$

Warum mirakulös ?

Ein Rockstar unter allen Zahlen: Die Kreiszahl π

Irrationalität und Transzendenz . . .

Weniger wäre schon viel: Gibt es natürliche Zahlen p, q derart, dass

$$\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\ldots\ldots\ldots = \frac{p}{q}\pi^3 \ ?$$

Apery 1979 . . . .

Wie weit sind wir ...

1. $\frac{1}{1^0} + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{3^0} + \frac{1}{4^0} + \frac{1}{5^0} + \ldots\ldots\ldots = \infty$
2. $\frac{1}{1^1} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{4^1} + \frac{1}{5^1} + \ldots\ldots\ldots = \infty$
3. $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\ldots\ldots = \frac{1}{6}\pi^2$
4. $\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \ldots\ldots\ldots = ?$

Wie weit sind wir ...

1. $$\frac{1}{1^0}+\frac{1}{2^0}+\frac{1}{3^0}+\frac{1}{4^0}+\frac{1}{5^0}+\ldots\ldots\ldots=\infty$$
2. $$\frac{1}{1^1}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{3^1}+\frac{1}{4^1}+\frac{1}{5^1}+\ldots\ldots\ldots=\infty$$
3. $$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots\ldots\ldots=\frac{1}{6}\pi^2$$
4. $$\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\ldots\ldots\ldots=?$$
5. ?
6. ....

Mathematik und die Riemannsche Zeta-Funktion – now and forever, one and inseparable:

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \ldots\ldots$$

Mathematik und die Riemannsche Zeta-Funktion – now and forever, one and inseparable:

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \ldots\ldots$$

Altes in neuem Gewand . . .

1. $\zeta(1) = \infty$
2. $\zeta(2) = \frac{1}{6}\pi^2$
3. $\zeta(3) = ?$

Zur Erinnerung ......

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \ldots\ldots$$

Die Zauberformel – das Euler-Produkt

$$\zeta(s) = \frac{2^s}{2^s - 1} \cdot \frac{3^s}{3^s - 1} \cdot \frac{5^s}{5^s - 1} \cdot \frac{7^s}{7^s - 1} \cdot \frac{11^s}{11^s - 1} \cdot \ldots\ldots$$

Zur Erinnerung ......

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \ldots\ldots$$

Die Zauberformel – das Euler-Produkt

$$\zeta(s) = \frac{2^s}{2^s - 1} \cdot \frac{3^s}{3^s - 1} \cdot \frac{5^s}{5^s - 1} \cdot \frac{7^s}{7^s - 1} \cdot \frac{11^s}{11^s - 1} \cdot \ldots\ldots$$

Es gibt unendlich viele Primzahlen ... ein analytischer Beweis

Zur Erinnerung ......

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \ldots\ldots$$

Die Zauberformel – das Euler-Produkt

$$\zeta(s) = \frac{2^s}{2^s - 1} \cdot \frac{3^s}{3^s - 1} \cdot \frac{5^s}{5^s - 1} \cdot \frac{7^s}{7^s - 1} \cdot \frac{11^s}{11^s - 1} \cdot \ldots\ldots$$

Es gibt unendlich viele Primzahlen ... ein analytischer Beweis

Die Riemannsche Revolte .... reelle und komplexe Variablen ...

Kurz vor dem eigentlichen Schnappschuss, nochmals ...

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \ldots\ldots$$

Kurz vor dem eigentlichen Schnappschuss, nochmals ...

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \ldots\ldots$$

DIRICHLET-REIHEN

$$D(s) = a_1 \frac{1}{1^s} + a_2 \frac{1}{2^s} + a_3 \frac{1}{3^s} + a_4 \frac{1}{4^s} + a_5 \frac{1}{5^s} + a_6 \frac{1}{6^s} + \ldots\ldots$$

Kurz vor dem eigentlichen Schnappschuss, nochmals ...

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \ldots\ldots$$

DIRICHLET-REIHEN

$$D(s) \;=\; a_1\frac{1}{1^s} + a_2\frac{1}{2^s} + a_3\frac{1}{3^s} + a_4\frac{1}{4^s} + a_5\frac{1}{5^s} + a_6\frac{1}{6^s} + \ldots\ldots$$

Beispiele

1. $a_1 = 1\,,\; a_2 = 1\,,\; a_3 = 1\,,\; a_4 = 1\,, \ldots\ldots$
2. $a_1 = 1\,,\; a_2 = -1\,,\; a_3 = 1\,,\; a_4 = -1, \ldots\ldots$
3. $a_n =$ Anzahl aller Teiler von n
4. ...... und viele mehr ......

Historie: Der Dirichletsche Primzahlsatz von 1837 in drei Minuten . . .

Theorem, 2012

$$D(s) = a_1 \frac{1}{1^s} + a_2 \frac{1}{2^s} + a_3 \frac{1}{3^s} + \ldots + a_n \frac{1}{n^s}$$ **Dirichletreihe**

Dann gilt:

$$|a_1| + \ldots + |a_n| \leq \frac{\sqrt{n}}{e^{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + o(1)\right)\sqrt{\log n \log\log n}}} \max_{\mathrm{Re}\, s \geq 0} \left|D(s)\right|$$

Theorem, 2012

$$D(s) = a_1 \frac{1}{1^s} + a_2 \frac{1}{2^s} + a_3 \frac{1}{3^s} + \ldots + a_n \frac{1}{n^s}$$ **Dirichletreihe**

Dann gilt:

$$|a_1| + \ldots + |a_n| \leq \frac{\sqrt{n}}{e^{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + o(1)\right)\sqrt{\log n \log\log n}}} \max_{\mathrm{Re}\, s \geq 0} \left|D(s)\right|$$

Dieses Theorem ist in jeder Hinsicht perfekt!

Theorem, 2012

$$D(s) = a_1 \frac{1}{1^s} + a_2 \frac{1}{2^s} + a_3 \frac{1}{3^s} + \ldots + a_n \frac{1}{n^s}$$ **Dirichletreihe**

Dann gilt:

$$|a_1| + \ldots + |a_n| \leq \frac{\sqrt{n}}{e^{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+o(1)\right)\sqrt{\log n \log\log n}}} \max_{\mathrm{Re}\, s \geq 0} \left|D(s)\right|$$

Dieses Theorem ist in jeder Hinsicht perfekt!

Endergebnis von viel, viel europaweiter Arbeit:
ein Deutscher, drei Franzosen, ein Norweger, ein Russe, ein Spanier, ein Österreicher

Theorem, 2012

$$D(s) = a_1 \frac{1}{1^s} + a_2 \frac{1}{2^s} + a_3 \frac{1}{3^s} + \ldots + a_n \frac{1}{n^s}$$ **Dirichletreihe**

Dann gilt:

$$|a_1| + \ldots + |a_n| \leq \frac{\sqrt{n}}{e^{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + o(1)\right)\sqrt{\log n \log\log n}}} \max_{\mathrm{Re} s \geq 0} \left| D(s) \right|$$

Dieses Theorem ist in jeder Hinsicht perfekt!

Endergebnis von viel, viel europaweiter Arbeit:
ein Deutscher, drei Franzosen, ein Norweger, ein Russe, ein Spanier, ein Österreicher

. . . **publiziert in den ANNALS OF MATHEMATICS 2012**

Unsinn?

1. $1^0 + 2^0 + 3^0 + 4^0 + 5^0 + \ldots\ldots\ldots = -\frac{1}{2}$
2. $1^1 + 2^1 + 3^1 + 4^1 + 5^1 + \ldots\ldots\ldots = -\frac{1}{12}$
3. $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \ldots\ldots\ldots = 0$
4. $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + \ldots\ldots\ldots = \frac{1}{120}$