CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG
FAKULTÄT V
MATHEMATIK UND NATURWISSENSCHAFTEN

Preisrätsel zum Mathematik-Fest am 11. Mai 2014

Lösungshinweise

Vorbemerkung: Jede der Aufgaben lässt sich auf viele verschiedene Weisen lösen. Es werden hier jedoch jeweils nur wenige Hinweise gegeben.

Aufgabe 1

Für jede der Zahlen 1, 2, …., 100.000 bilden wir die Quersumme der Quersumme der Quersumme. Dabei kommt immer eine einstellige Zahl heraus. Zum Beispiel ist
die Quersumme von 86.889 gleich 39, deren Quersumme ist 12 und deren Quersumme ist 3.
Kommen unter diesen 100.000 einstelligen Zahlen mehr Einsen als Zweien oder mehr Zweien als Einsen oder gleich viele Einsen wie Zweien vor?

Erstellt man zu jeder der Zahlen 1,2,…,100.000 die Quersumme der Quersumme der Quersumme, so setzt sich fortlaufend der Zahlenblock 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 hintereinander. Also gibt es von 1 bis 99.999 gleichviele Einsen und Zweien. Da die Quersumme von 100.000 gleich 1 ist, ist die Zahl der Einsen genau um 1 größer als die Zahl der Zweien.

Aufgabe 2

Mehrere normale Spielwürfel sollen so aneinandergeklebt werden (Seitenfläche auf Seitenfläche), dass die Summe der sichtbaren Augenzahlen möglichst groß wird. Als sichtbar sollen alle nicht miteinander verklebten Seitenflächen gelten.
Geben Sie ein Verfahren an, wie die Würfel zusammengeklebt werden müssen, damit die sichtbare Augensumme maximal wird.
Wie groß ist diese maximale Augensumme in Abhängigkeit von der Anzahl der Würfel?

Bei zwei Würfeln ist die sichtbare Augensumme maximal, wenn man die beiden Seitenflächen mit der Augenzahl 1 aneinanderklebt. Nun klebt man schrittweise die Seitenflächen mit den Augenzahlen 2 (vorheriger Würfel) und 1(hinzugenommener Würfel) aneinander. Geht man geschickt vor, bleiben jeweils alle restlichen Seitenflächen sichtbar. Die zugehörige sichtbare Augensumme ist offenbar maximal, sie ist für zwei Würfel gleich 40 und erhöht sich für jeden weiteren Würfel um 18 (18 = 21 – 2 – 1).
Bei n Würfeln ($n > 1$) ist die maximale sichtbare Augensumme also gleich $n \cdot 18 + 4$.

Aufgabe 3

Über den bekannten Physiker Paul Dirac findet man im Buch von Irina Radunskaja „Die Legende vom Ruhm" (Köln 1986) folgende Geschichte (geändert und gekürzt):
Als junger Mann nahm er an einem der alljährlich stattfindenden weihnachtlichen Wettbewerbe der Mathematischen Gesellschaft von Cambridge teil. Er hatte eine anscheinend leichte Aufgabe erwischt: Drei Fischer hatten in stockfinsterer Nacht auf einer Insel geangelt und sich dann schlafen gelegt, ohne vorher den Fang zu teilen. Gegen Morgen wachte einer von ihnen auf und fuhr nach Hause; zuvor aber nahm er sich ein Drittel des Fanges.
Beim Teilen war jedoch ein Fisch übriggeblieben. Ihn warf er ins Wasser. Danach erwachte der zweite Angler. Da er nicht wusste, dass einer seiner Gefährten bereits auf dem Heimweg war, teilte er den verbliebenen Fang wiederum in drei Teile. Auch er teilte ehrlich, und auch er hatte einen Fisch übrig und warf ihn ins Wasser. Genauso überlegte und handelte der dritte Angler: Vom Rest nahm er sich den dritten Teil, und auch er warf den überzähligen Fisch ins Wasser.
Die Frage lautete nun: Wieviele Fische hatten die Angler gefangen?

Der junge Paul hatte nach einiger Zeit seine Lösung formuliert und legte seine Arbeit auf den Tisch der Jury. Die Arbeit ging von Hand zu Hand, und jedes Mitglied der Jury durfte sich über die Lösung wundern: Die Fischer hatten minus zwei Fische gefangen! So erhielt der junge Mann leider keinen Preis.

Lösen Sie selbst die gestellte Frage.
Haben Sie auch eine mögliche Erklärung für die Lösung des jungen Paul Dirac?

Ist f die Zahl der gefangenen Fische, so hinterlässt der erste Angler $f' = \frac{2}{3}(f-1)$ Fische. Dies muss eine ganze Zahl sein. Analog hinterlässt der zweite Angler $f'' = \frac{2}{3}(f'-1)$ Fische und der dritte $f''' = \frac{2}{3}(f''-1)$ Fische. Man kann nun durch Ausprobieren feststellen, für welche Zahlen f dies ganze Zahlen sind, und findet als kleinste positive Lösung f = 25. Alternativ kann man die Formeln ineinander einsetzen. Die Rechnung wird durch folgenden kleinen Trick vereinfacht: Es ist $f' + 2 = \frac{2}{3}(f-1) + 2 = \frac{2}{3}(f+2)$. Setzt man also $g = f + 2$, $g' = f' + 2$ usw., so ist $g' = \frac{2}{3}g$ und analog $g'' = \frac{2}{3}g' = \frac{4}{9}g$ und schließlich $g''' = \frac{8}{27}g$. Daran sieht man, dass g durch 27 teilbar sein muss, damit alles aufgeht. Die kleinste Lösung ist also $g = 27$, was $f = 25$ ergibt. In diesem Fall erhalten die Fischer 8 bzw. 5 bzw. 3 Fische, 3 Fische landen im Wasser, 6 Fische lässt der dritte Angler übrig.
Andere Lösungen ergeben sich als $g = 27x$ für natürliche Zahlen x, also $f = 27x - 2$.
Der Trick zeigt übrigens auch, dass bei n Fischern die Anfangszahl der Fische von der Form $3^n x - 2$ sein muss.

Der junge Paul Dirac hat wohl auch negative ganze Zahlen für f zugelassen, -2 erhält man durch Einsetzen der Zahl 0 für x. Merkwürdigerweise würden bei -2 gefangenen Fischen die drei Fischer gleich viele Fische, allerdings -1 Fisch, erhalten!

Aufgabe 4

Die Zahl 3^3 = 27 endet auf 7, die Zahl $3^{(3^3)}$ = 7.625.597.484.987 ebenfalls.

Auf welche Ziffer endet die Zahl $3^{\left(3^{(3^3)}\right)}$?

3^0 endet auf 1, 3^1 endet auf 3, 3^2 endet auf 9, 3^3 endet auf 7, 3^4 endet auf 1, usw. Allgemein endet $3^{x\cdot 4+3}$ für jede natürliche Zahl x auf 7, denn $3^{x\cdot 4+3} = 81^x \cdot 3^3$. Die Zahl $3^{(3^3)}$ lässt bei Division durch 4 den Rest 3, da sie auf 87=84+3 endet. Also endet die zu untersuchende Zahl ebenfalls auf 7.
Allgemeiner lässt jede Potenz von 3 mit ungeradem Exponenten bei Division durch 4 den Rest 3, also enden auch alle weiteren Zahlen $3^{\left(3^{\left(\dots^{3}\right)}\right)}$ auf 7.

Aufgabe 5

Mit einem rechteckigen Blatt Papier kann man durch geschicktes Falten (ohne Einsatz von Zirkel oder Lineal) ein gleichseitiges Dreieck erzeugen.
Versuchen Sie es mit Hilfe folgenden Ansatzes: Zuerst falten Sie das Blatt so, dass die zwei längeren Seiten aufeinander liegen. Die dabei entstehende Knicklinie nutzen Sie nun folgendermaßen: Falten Sie das Blatt wieder auseinander und legen es hochkant vor sich. Nun falten Sie das Blatt erneut, und zwar so, dass der obere linke Eckpunkt auf der schon erstellten Knicklinie liegt **und** die neue Knicklinie durch den oberen rechten Eckpunkt verläuft.

Wie geht´s weiter?
Warum entsteht so tatsächlich ein gleichseitiges Dreieck?

Es lassen sich verschiedene gleichseitige Dreiecke durch passendes weiteres Falten erzeugen. So kann man etwa das Blatt wieder auseinanderfalten und die vorherige Faltung analog für den oberen rechten Eckpunkt durchführen. Faltet man dann das Blatt wieder auseinander, sind durch die sich schneidenden Knicklinien u.a. zwei zueinander kongruente gleichseitige Dreiecke D und D' entstanden. Dass D und D' gleichseitig sind, sieht man wie folgt: Nennt man den Punkt, wo der obere linke oder rechte Eckpunkt auf der Mittellinie zu liegen kommt, mit P, so ist das von den beiden oberen Eckpunkten und P gebildete Dreieck gleichseitig (ein weiteres gleichseitiges Dreieck!). Daher ist sein Winkel oben links gleich 60° und damit der von der ersten schrägen Knicklinie mit der oberen Kante gebildete Winkel halb so groß, also gleich 30°. Daher hat D oben links den Winkel 60°. Außerdem hat es unten links den Winkel 60°, denn betrachten wir das mit den oberen Eckpunkten gebildeten rechtwinkligen Dreieck, so hat es oben rechts den Winkel 30°. Damit ist D (und analog D') gleichwinklig, also gleichseitig.

Hinweise für die Teilnehmer am Preisrätsel

Insgesamt sind neun Bearbeitungen abgegeben / zugeschickt worden.
Jede Bearbeitung wird kommentiert mit einem Trostpreis oder einem Buchpreis **bis Anfang Juli** an den jeweiligen Absender zurückgeschickt.