

Berechnung der Eigenwerte am Beispiel der Kanonischen Korrelation

1. Vorbemerkung: Grundlage der Berechnung ist die Entwicklung der Eigenwerte entsprechend den Formeln (8-13) bis (8-17) auf S. 262 des Lehrbuchs. Die Matrix **Q** wird dabei aus den Korrelationsmatrizen der, gegenüber dem Beispiel in Kap. 8.5 reduzierten Variablensätze V03-V04 und V13-V14 gebildet.

2. Berechnung der Matrix Q

$$\begin{aligned} Q &= R_p^{-1} \cdot R_{pq} \cdot R_q^{-1} \cdot R_{pq}^T \\ &= \begin{pmatrix} 1,000 & 0,627 \\ 0,627 & 1,000 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0,645 & 0,423 \\ 0,460 & 0,515 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,000 & 0,523 \\ 0,523 & 1,000 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0,645 & 0,460 \\ 0,423 & 0,515 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1,647797 & -1,033168 \\ -1,033168 & 1,647797 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} " & " \\ " & " \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1,376517 & -0,719919 \\ -0,719919 & 1,376517 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} " & " \\ " & " \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,587572 & 0,164937 \\ 0,091593 & 0,411585 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,583328 & 0,26244 \\ 0,117419 & 0,377744 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,362196 & 0,216506 \\ 0,101962 & 0,179511 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Berechnung der Determinanten und des charakteristischen Polynoms

$$|Q - \lambda I| = \begin{vmatrix} 0,362196 - \lambda & 0,216506 \\ 0,101962 & 0,179511 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} (0,362196 - \lambda) \cdot (0,179511 - \lambda) - 0,216506 \cdot 0,101962 &= 0 \\ \lambda^2 - 0,541707\lambda + 0,0429417 &= 0 \end{aligned}$$

4. Bestimmung der beiden Eigenwerte λ_1 und λ_2

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 2 \cdot 0,2708535 + 0,2708535^2 &= 0,2708535^2 - 0,042941 \\ (\lambda - 0,2708535)^2 &= 0,0304199 \\ \lambda_{1,2} &= 0,2708535 \pm \sqrt{0,0304199} \\ \lambda_1 &= 0,2708535 + 0,174413 = 0,4452665 \\ \lambda_2 &= 0,2708535 - 0,174413 = 0,0964405 \end{aligned}$$