

Analyse von Rohdaten mit LISREL - Allgemeines Lineares Modell, stochastische Differenzen- und Differentialgleichungssysteme

C. Möbus

"There was a kind curate of kew
who kept a large cat in a pew
There he taught it each week
A new letter of Greek
But it never got further than Mu"

1. Einleitung

Um den Leser vor dem Schicksal der oben angesprochenen Katze zu bewahren, möchten wir zunächst auf grundlegende Literatur verweisen, die im "Falle eines Falles" konsultiert werden sollte. Diese Abstützung auf Fremdliteratur ist aus Platzgründen nicht vermeidbar gewesen.

Grundlagen der Matrizenrechnung finden sich z.B. in RHENIUS (1983) und BASILEVSKY (1983). Als Einführung in die stochastische Inferenz empfiehlt sich z.B. SILVEY (1978) oder DeGROOT (1975). Spezielle Probleme, die sich bei der Ableitung von Schätzfunktionen für multivariate Modelle ergeben, werden z.B. in GRAHAM (1981) behandelt. Grundlegendes über Pfadanalyse und LISREL kann man z.B. bei HODAPP (1984) finden. Gegenwärtig die beste Einführung in LISREL gibt LONG (1983). Aber auch LONG unterstützt das Vorurteil vieler experimentell arbeitender Psychologen, LISREL habe nur "moderne" Pfad- und Faktorenanalysen als Anwendungsgebiet. Wir wollen dieses Vorurteil ein wenig abbauen, indem wir zeigen, wie Versuchspläne ausgewertet und Zeitreihenmodelle konstruiert werden können.

Das Hypothesentesten mit Hilfe von LISREL bietet gegenüber der Verwendung von speziellen SPSS-, BMDP- oder SAS-Prozeduren den Vorteil größerer Methodenintegration. Man lernt, ein statistisches Verfahren selbst zu entwickeln. Man gestaltet Hypothesenprüfung und Explikation von Annahmen weit selbständiger als bei herkömmlichen statistischen Verfahren. Diese wissenschaftliche Selbständigkeit muß allerdings durch einen höheren kognitiven Aufwand erkauft werden.

Der Artikel gliedert sich in eine Einführung in das allgemeine lineare Modell, eine Kurzdarstellung von LISREL und Beispielsanalysen. Bei den Beispielen wird sowohl die "klassische" Form als auch das LISREL-Modell vorgeführt.

2. Das allgemeine lineare Modell

2.1. Das univariate Modell

Eine Datenerhebung kann als Ziehung einer Stichprobe der Größe N interpretiert werden. Betrachten wir die Abhängigkeit einer inhaltlichen Variablen Y von q inhaltlich definierten unabhängigen Variablen, lautet die Modellgleichung

$$(2.1. a) \quad \underset{N-1}{Y} = \underset{N-q-1}{X} \underset{q-1}{\beta} + \underset{N-1}{\epsilon}$$

mit $\underset{N-1}{Y}$, $\underset{N-1}{\epsilon}$ = N -dimensionale Zufallsvektoren

$\underset{q-1}{\beta}$ = q -dimensionaler Parametervektor

$\underset{N-q}{X}$ = Matrix mit q bekannten Konstanten oder meßfehlerfreien Beobachtungen pro Person (= Zeile)-auch Designmatrix genannt.

Manchmal sind Verteilungsannahmen notwendig. Wir wollen annehmen, daß sich die Vektoren \underline{Y} und $\underline{\varepsilon}$ unabhängig normal verteilen mit einem bestimmten Mittelwertsvektor und einer bestimmten Kovarianzmatrix:

$$(2.1b) \quad \underset{N-1}{Y} \sim \text{UN} \left(\underset{N-1}{X} \beta_1, \sigma^2 \underset{N-1}{I} \right)$$

$$\underset{N-1}{\varepsilon} \sim \text{UN} \left(\underset{N-1}{0}, \sigma^2 \underset{N-1}{I} \right)$$

Die Varianzkovarianzmatrix $\sigma^2 \underset{N-1}{I}$ der Zufallsvektoren $\underset{N-1}{Y}$, $\underset{N-1}{\varepsilon}$ lautet dabei:

$$(2.1 c) \quad \sigma^2 \cdot \underset{N-1}{I} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & N \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ N \end{matrix} & \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma^2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Den Schätzer nach der Methode der kleinsten Quadrate erhält man entsprechend

$$(2.2) \quad Q = \underset{N-1}{\varepsilon}' \underset{N-1}{\varepsilon} = (\underline{Y} - \underline{X}\beta)' (\underline{Y} - \underline{X}\beta) = \min!$$

$$(2.3) \quad \frac{\partial Q}{\partial \underline{\beta}} = -2 \underline{X}' \underline{Y} + 2 \underline{X}' \underline{X} \underline{\beta} = \underline{0} \quad \text{mit} \quad \partial \underline{\beta} = \begin{bmatrix} \partial \beta_1 \\ \partial \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \partial \beta_q \end{bmatrix}$$

$$(2.4) \quad \hat{\underline{\beta}}_q = (\underline{X}' \underline{X})^{-1} \underline{X}' \underline{Y}$$

Die Schätzer nach der Maximum-Likelihoodmethode sind identisch mit (2.4). Die bedingte Dichte der Zufallsvariablen Y_i für festes \underline{x}_i ist:

$$(2.5) \quad f(Y_i | \underline{x}_i'; \underline{\beta}, \sigma^2) = (2\sigma^2\pi)^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot \right. \\ \left. (Y_i - \underline{x}_i' \underline{\beta})' (Y_i - \underline{x}_i' \underline{\beta}) \right]$$

wobei: \underline{x}_i' = i-ter Zeilenvektor von $N \times Q$

Entsprechend erhalten wir für die Likelihoodfunktion

$$(2.6) \quad L(\underline{\beta}, \sigma^2; \underline{Y}, \underline{X}) = \prod_{i=1}^N f(Y_i | \underline{x}_i'; \underline{\beta}, \sigma^2) \\ = (2 \cdot \sigma^2 \cdot \pi)^{-N/2} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} (\underline{Y} - \underline{X}\underline{\beta})' (\underline{Y} - \underline{X}\underline{\beta}) \right]$$

Der Maximierung von L entspricht die Minimierung vom Exponenten in (2.6) und damit von Q in (2.2). Der ML-Schätzer ist demnach mit (2.4) identisch. Wichtig ist hierbei zu sehen, daß bei der Maximum-Likelihoodschätzung nur eine Verteilungsannahme über die Residuen gemacht wird. Wir werden auf diese Beobachtung später im Zusammenhang mit LISREL zurückkommen.

Wenden wir uns der Hypothesentestung zu. Dazu wollen wir zunächst einen kurzen Exkurs über Testtheorie machen. Beim statistischen Hypothesentesten überprüft man Annahmen über die Parameter θ_j der Dichtefunktion $f(\underline{Y} | \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$. Teilt man den Parameterraum Ω in nicht überlappende Räume auf, behauptet die Nullhypothese H_0 , daß die Parameter der Dichtefunktion in Ω_0 liegen. Die Alternativhypothese H_1 behauptet das entsprechende für Ω_1 . Werden in einer Hypothese alle Parameterwerte spezifiziert, liegt eine einfache Hypothese vor. Läßt man dagegen mindestens einen Parameter unbekannt, haben wir es mit einer zusammengesetzten Hypothese zu tun.

Beim Test von H_0 gegen H_1 werden die N Datenwerte zu einem N-dimensionalen Vektor \underline{Y} zusammengefaßt. Man definiert jetzt als Stichprobenraum S den Raum aller möglichen beobachtbaren N-Tupel \underline{Y} . S wird meist auch wieder

wie Ω in zwei nicht überlappende Regionen aufgeteilt. Fällt \underline{Y} in S_{Ω_0} , neigt man H_0 zu, sonst hält man H_1 für plausibler. Einige Autoren (z.B. Witte, 1980) schlagen noch eine dritte Zone vor. Fällt ein Datenvektor in diesen Bereich, sollte man eine Entscheidung zugunsten H_0 oder H_1 aufschieben und weitere Datenvektoren erheben.

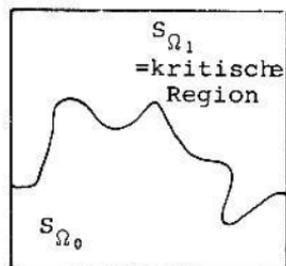
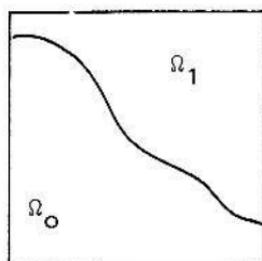


Fig. 2.1 a: der Parameterraum Fig. 2.1 b: der Stichprobenraum S

Beim Hypothesentesten kann man zwei Fehler begehen. Der Fehler 1. Art ist die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$(2.7) \quad P \left\{ \begin{array}{l} \text{verwerfe } H_0 \\ \text{nehme } H_1 \\ \text{für wahr} \end{array} \middle| H_0 \text{ ist wahr} \right\} = P \left\{ \underline{Y} \in S_{\Omega_1} \middle| \theta \in \Omega_0 \right\} = \alpha$$

Der Fehler 2. Art ist entsprechend die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$(2.8) \quad P \left\{ \begin{array}{l} \text{verwerfe } H_1, \\ \text{nehme } H_0 \\ \text{für wahr} \end{array} \middle| H_1 \text{ ist wahr} \right\} = P \left\{ \underline{Y} \in S_{\Omega_0} \middle| \theta \in \Omega_1 \right\} = \beta$$

Es ist nicht möglich, bei fester Stichprobengröße die Summe der Fehler beliebig klein zu bekommen. Allerdings kann man für den Fall einfacher Hypothesen mit Hilfe des NEYMAN-PEARSON-Lemmas (s.deGROOT, 1975, S. 374 ff) einen Test mit größter Power zu einem vorgegebenen Signifikanzniveau α konstruieren. In der Praxis haben wir

es aber in den meisten Fällen mit zusammengesetzten Hypothesen zu tun, für die diese automatische Powermaximierung nicht mehr gilt.

Zusammengesetzte Hypothesen werden mit Hilfe des verallgemeinerten Likelihoodquotienten

$$(2.9) \quad 0 \leq \lambda = \frac{L(\hat{\Omega}_0 | \underline{Y})}{L(\hat{\Omega} | \underline{Y})} \leq 1$$

beurteilt. $L(\hat{\Omega}_0 | \underline{Y})$ ist dabei der unter der Nullhypothese maximierte Wert der Likelihoodfunktion. $L(\hat{\Omega} | \underline{Y})$ ist dagegen der Wert, der im gesamten Parameterraum maximiert wird. Das Modell mit Parametern in Ω_0 nennt man auch "reduziertes Modell", während das Modell mit Parametern im gesamten auch "volles" oder "saturiertes Modell" heißt.

Liegt λ bei 1 wird H_0 plausibler, bei $\lambda \approx 0$ dagegen die H_1 -Hypothese. Meist wird die Grenze k so gewählt, daß

$$\begin{aligned} H_0 &\text{ bei } k \leq \lambda, \\ H_1 &\text{ bei } \lambda < k \text{ akzeptiert wird und} \\ P(\lambda < k) &= \alpha \text{ ist.} \end{aligned}$$

WALD (1943) zeigte, daß sich unter Wahrheit von H_0 (bei $N \rightarrow \infty$) der Ausdruck $-2 \ln \lambda$ nach der Chi-quadratverteilung mit ν Freiheitsgraden verteilt:

$$(2.10) \quad \chi^2(\nu) \sim -2 \ln \lambda$$

mit ν = Zahl der unabhängigen Parameter im vollen Modell minus Zahl der unabhängigen Parameter im reduzierten Modell.

Der Likelihoodquotiententest gestaltet sich wie schon im Text angedeutet. Die beiden Hypothesen lauten

$$(2.11) \quad H_0 : \underline{\beta} = \underline{\beta}_0$$

$$H_1 : \underline{\beta} \neq \underline{\beta}_0$$

Die ML-Schätzer sind im vollen Modell

$$(2.12) \quad \hat{\underline{\beta}}_{\Omega} = (\underline{X}'\underline{X})^{-1}\underline{X}'\underline{Y} \text{ und } \hat{\sigma}_{\Omega}^2 = \frac{1}{N} (\underline{Y}-\underline{X}\hat{\underline{\beta}}_{\Omega})'(\underline{Y}-\underline{X}\hat{\underline{\beta}}_{\Omega})$$

$$= \frac{1}{N} Q_{\Omega}$$

und die Likelihood nach Einsetzung der Schätzer

$$(2.13) \quad L(\hat{\Omega} | \underline{Y}, \underline{X}) = (2\pi\hat{\sigma}_{\Omega}^2)^{-N/2}$$

Für das reduzierte Modell gilt entsprechendes:

$$(2.14) \quad \hat{\underline{\beta}}_{\Omega_0} \text{ mit } \underline{\beta}_{\Omega_0} \in \Omega_0 \text{ (entweder Vektor mit spezifi-}$$

zierten Konstanten oder an-

derer Restriktion (z.B. $\underline{\beta}_j =$

$\underline{\beta}_k$), sodaß $\underline{\beta}_0$ in Ω_0 liegt)

$$(2.15) \text{ und } \hat{\sigma}_{\Omega_0}^2 = \frac{1}{N} (\underline{Y} - \underline{X} \hat{\underline{\beta}}_{\Omega_0})' (\underline{Y} - \underline{X} \hat{\underline{\beta}}_{\Omega_0}) = \frac{1}{N} Q_{\Omega_0}$$

Die Likelihood ist nach Einsetzung der unter der H_0 -Hypothese erhaltenen Schätzer

$$(2.16) \quad L(\hat{\Omega}_0 | \underline{Y}, \underline{X}) = (2\pi\hat{\sigma}_{\Omega_0}^2)^{-N/2}$$

Der Likelihoodquotient ist

$$(2.17) \quad \lambda = \frac{L(\hat{\Omega}_0 | \underline{Y}, \underline{X})}{L(\hat{\Omega} | \underline{Y}, \underline{X})} = \left[\frac{\hat{\sigma}_{\Omega_0}^2}{\hat{\sigma}_{\Omega}^2} \right]^{-N/2} = \left[\frac{Q_{\hat{\Omega}_0}}{Q_{\hat{\Omega}}} \right]^{-N/2}$$

Hypothesenprüfungen erfolgen entweder über die χ^2 -Verteilung (vgl. 2.10)

$$(2.18) \quad -2 \ln \lambda = N \left[\ln Q_{\hat{\Omega}_0} - \ln Q_{\hat{\Omega}} \right] \sim \chi^2 (v)$$

über WILKS-LAMBDA nach der U-Verteilung (s. TIMM, 1975)

$$(2.19) \quad \Lambda = \lambda^{2/N} = \left[\frac{Q_{\hat{\Omega}}}{Q_{\hat{\Omega}_0}} \right] \sim U(p, v_1, v_2)$$

mit p = Zahl der abhängigen Variablen (hier: 1)

$v_1 = P_{\hat{\Omega}} - P_{\hat{\Omega}_0}$ = Zahl der Prädiktoren im vollen Modell - Zahl der Prädiktoren im reduzierten Modell

$v_2 = N - P_{\hat{\Omega}}$ = Zahl der Beobachtungen - Zahl der Prädiktoren im vollen Modell

oder über die normierten Fehleranstiege nach der F-Verteilung

$$(2.20) \quad \frac{(Q_{\hat{\Omega}_0} - Q_{\hat{\Omega}}) / (P_{\hat{\Omega}} - P_{\hat{\Omega}_0})}{Q_{\hat{\Omega}} / (N - P_{\hat{\Omega}})} \sim F(v_1, v_2)$$

Die Beurteilung der praktischen Signifikanz erfolgt am anschaulichsten über den normierten Anstieg der an der abhängigen Variablen Y aufgeklärten Varianz

$$(2.21) \quad \frac{(R_{\hat{\Omega}}^2 - R_{\hat{\Omega}_0}^2) / (P_{\hat{\Omega}} - P_{\hat{\Omega}_0})}{(1 - R_{\hat{\Omega}}^2) / (N - P_{\hat{\Omega}})} \sim F(v_1, v_2)$$

$(R^2 = \text{Quadrat des multiplen Korrelationskoeffizienten})$

Für (2.21) muß \underline{Y} im vollen und reduzierten Modell iden-

tisch sein. Ist das nicht gewährleistet, muß mit (2.18 - 2.20) getestet werden (s.a. NAMBOODIRI & CARTER & BLALOCK, 1975).

2.2. Das multivariate Modell

Wir lassen im Gegensatz zu (2.1) statt einer jetzt p abhängige Variablen zu. Dabei kann es sich um eine Variable, die zu mehreren Zeitpunkten gemessen wurde, oder um mehrere Variablen, die zu einem Zeitpunkt erhoben wurden, handeln. Die Modellgleichung lautet:

$$(2.22a) \quad N \underline{Y}_p = N \underline{X}_q \underline{B}_p + N \underline{E}_p$$

mit $N \underline{Y}_p, N \underline{E}_p = (N \times p)$ - dimensionale Zufallsmatrizen

$q \underline{B}_p = (q \times p)$ - dimensionale Gewichtsmatrix

Als Verteilungsannahmen führen wir ein:

$$(2.22b) \quad \text{vec } (\underline{Y}) \sim \text{UN} (\text{vec } (\underline{XB}), N \underline{I}_N \otimes \underline{\Sigma}_{p-p})$$

$$(2.22c) \quad \text{vec } (\underline{E}) \sim \text{UN} (\text{vec } (\underline{0}), N \underline{I}_N \otimes \underline{\Sigma}_{p-p})$$

Der vec-Operator bedeutet schlicht, daß eine Matrix zeilenweise in einen Spaltenvektor angeordnet wird (s.a. GRAHAM, 1983). Das Zeichen \otimes steht für das Kroneckerprodukt. vec und \otimes benutzen wir jetzt zur Erklärung der Verteilungsannahmen für die Fehler. Die Annahme (2.22c) bedeutet, daß die zeilenweise in einem Spaltenvektor ausgerollte Zufallsmatrix \underline{E} einen Nullvektor als Erwartungswert besitzt. Die Varianz/Kovarianzmatrix besteht aus N an der Hauptdiagonalen aufgereihten $(p \times p)$ -dimensionalen Kovarianzmatrixen $\underline{\Sigma}_{p-p}$. Es wird also die Unabhängigkeit der N Beobachtungen untereinander und die multivariate Erweiterung der Homoskedastizität gefordert,

wobei die p abhängigen Variablen korreliert sein dürfen.

$$E_{11} \dots E_{1p} \quad E_{21} \dots E_{2p} \quad \dots \quad E_{N1} \dots E_{Np}$$

$$\begin{matrix} \begin{matrix} E_{11} \\ \vdots \\ E_{1p} \\ E_{21} \\ \vdots \\ E_{2p} \\ \vdots \\ E_{N1} \\ \vdots \\ E_{Np} \end{matrix} \\ \mathbb{E} \end{matrix} = \underline{0} \quad \begin{matrix} \mathbb{I}_{N-N} \bullet \mathbb{I}_{p-p} = \\ \begin{matrix} E_{11} \\ \vdots \\ E_{1p} \\ E_{21} \\ \vdots \\ E_{2p} \\ \vdots \\ E_{N1} \\ \vdots \\ E_{Np} \end{matrix} \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{matrix} p-p & \underline{0} & \dots & \underline{0} \\ \underline{0} & p-p & \dots & \underline{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{0} & \underline{0} & \dots & p-p \end{matrix} \end{matrix}$$

Wir nehmen an, daß der Erwartungswert der ausgerollten Matrix \mathbb{N}_{-p}^E ein Nullvektor ist: $\mathbb{E}(\text{vec}(\mathbb{N}_{-p}^E)) = \underline{0}$.

Auch im multivariaten Modell fällt der Schätzer für die Gewichtsmatrix q_{-p}^B unter der Methode der kleinsten Quadrate mit dem Schätzer unter der Maximum-Likelihoodmethode zusammen.

$$(2.23) \quad \hat{q}_{-p}^B = q \left(\underline{X}_{-N}^+ \underline{X} \right)^{-1} \underline{X}_{-N}^+ \underline{Y}$$

Der Likelihoodquotient (2.24) stellt ebenfalls die multivariate Erweiterung des Quotienten (2.17) dar. Wir betrachten jetzt nicht mehr einen Bruch von Fehlervarianzen, sondern einen Bruch von generalisierten Fehlervarianzen. Der Begriff "generalisierte Varianz" geht auf WILKS (1932) zurück (s.a. TIMM, 1975, S.37ff).

$$(2.24) \quad \lambda = \frac{L(\hat{\Omega}_0 | \underline{Y}, \underline{X})}{L(\hat{\Omega} | \underline{Y}, \underline{X})} = \left[\frac{|\hat{\Sigma}_{\Omega_0}|}{|\hat{\Sigma}_{\Omega}|} \right]^{-N/2} = \left[\frac{|\hat{E}_{\Omega_0}' \hat{E}_{\Omega_0}|}{|\hat{E}_{\Omega}' \hat{E}_{\Omega}|} \right]^{-N/2}$$

$$= \frac{|\underline{Q}_{\hat{\Omega}_0}|}{|\underline{Q}_{\hat{\Omega}}|}^{-N/2}$$

mit $|\underline{X}|$ = Determinante der Matrix \underline{X}

Hypothesenprüfungen erfolgen wieder entweder über die χ^2 -Verteilung (vgl. 2.18)

$$(2.25) \quad -2 \ln \lambda = N \ln |\underline{Q}_{\hat{\Omega}_0}| - \ln |\underline{Q}_{\hat{\Omega}}| \sim \chi^2 (\nu)$$

oder über WILKS' Lambda (vgl. 2.19)

$$(2.26) \quad \Lambda = \lambda^{2/N} = \frac{|\underline{Q}_{\hat{\Omega}}|}{|\underline{Q}_{\hat{\Omega}_0}|} \sim U(p, \nu_1, \nu_2)$$

2.3 Das Wachstumskurvenmodell

Das multivariate Modell (2.22) läßt sich noch einmal um eine weitere Designmatrix \underline{K}' erweitern, mit der der Verlauf der Erwartungswerte über die Zeit beschrieben werden kann. Das Modell wird dann Wachstumskurvenmodell genannt (GRIZZLE & ALLEN, 1969; TIMM, 1975; MORRISON, 1976; MÖBUS & NAGL, 1983). Wird nur eine inhaltliche Variable (univariate Fragestellung) zu T Zeitpunkten erhoben, lautet das gleichwohl multivariate Modell

$$(2.27) \quad \underline{N}^{\underline{Y}}_{\underline{T}} = \underline{N}^{\underline{X}}_{\underline{q}} \underline{B}_R \underline{K}'_{\underline{T}} + \underline{N}^{\underline{E}}_{\underline{T}}$$

mit T = Zahl der Zeitpunkte

q = Zahl der Designvariablen für das Design
"zwischen den Personen"

r = Zahl der Trendkomponenten für die
Erwartungswerte (konstant, linear, quadratisch)
= Design "innerhalb der Personen"

\underline{B} = Gewichtsmatrix der Trendkomponenten (Spalten
von \underline{B}) für die experimentellen Bedingungen
(Zeilen von \underline{B})

$\underline{R}^{\underline{K}'}$ = Designmatrix für den Verlauf der Erwartungs-
werte über die Zeit

vec (\underline{Y}) und vec (\underline{E}) verteilen sich wie in (2.22)

Für \underline{K}' finden sich in MÖBUS & NAGL (1983, S. 319 ff, S.358 ff) eine Reihe von Beispielen. Wir wollen hier den einfachsten Fall demonstrieren (1 Gruppe von Personen, $T = R = 3$ und für \underline{K} , eine Vandermodematrix)

$$(2.28) \quad \underline{K}' = \begin{array}{ccc|l} \text{Zeitpunkte} & & & \\ \hline & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 2 & 3 \\ & 1 & 4 & 9 \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{konstanter} \\ \text{linearer} \\ \text{quadratischer} \end{array} \right\} \text{Trend}$$

Dann nimmt (2.27) folgende Gestalt an:

$$\begin{array}{c} \text{Zeitpunkte} \\ 1 \quad 2 \quad 3 \\ \hline 1 \quad Y_{11} \quad Y_{12} \quad Y_{13} \\ 2 \quad Y_{21} \quad Y_{22} \quad Y_{23} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ N \quad Y_{N1} \quad Y_{N2} \quad Y_{N3} \end{array} = \begin{array}{c} \beta_{\text{konst}} \quad \beta_{\text{lin}} \quad \beta_{\text{quadr}} \\ \hline 1 \quad \beta_{\text{konst}} \quad \beta_{\text{lin}} \quad \beta_{\text{quadr}} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 1 \quad \beta_{\text{konst}} \quad \beta_{\text{lin}} \quad \beta_{\text{quadr}} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \text{Zeitpunkte} \\ \hline 1 \quad 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 3 \\ 1 \quad 4 \quad 9 \\ \hline \mu_1 \quad \mu_2 \quad \mu_3 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \mu_1 \quad \mu_2 \quad \mu_3 \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{konst} \\ \text{lin} \\ \text{quadr} \end{array} \right\} \text{Trend} + \underline{N}^E_T$$

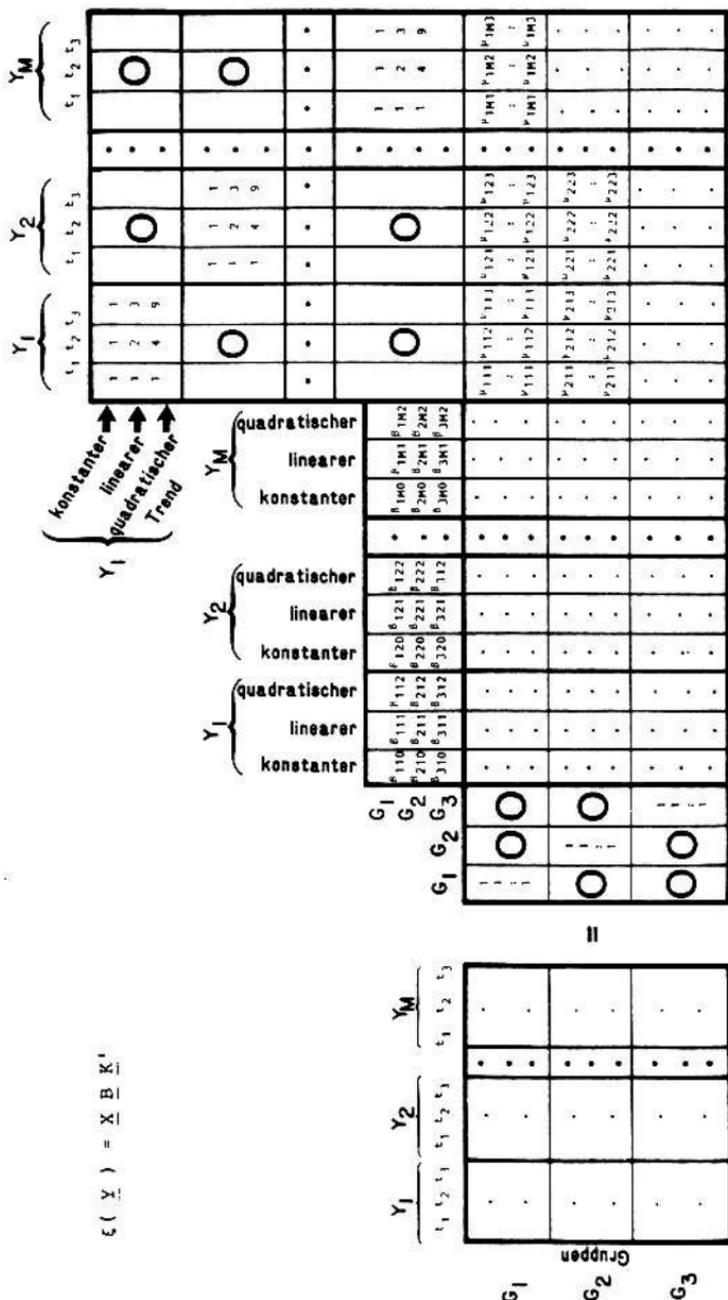
Da nach Voraussetzung die Erwartungswertmatrix

$$(2.30) \quad \underline{E}(\underline{Y}_T) = \underline{N}^X_Q \underline{B}_R \underline{K}'_T \quad \underline{E} = \text{Erwartungswertoperator}$$

ist, enthält die $(N \times T)$ -dimensionale Matrix $\underline{X} \underline{B} \underline{K}'$ in jeder Zeile den Mittelwertsvektor $\underline{\mu}' = [\mu_1 \quad \mu_2 \quad \mu_3]$. Befinden sich die Mittelwerte auf einer waagerechten Linie $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ sind die Gewichte β_{lin} und β_{quadr} gleich Null.

Wird die univariate Fragestellung zu einer multivariaten erweitert, liegt ein echt multivariates Design vor. Wir haben in Fig. 2.2 das Modell für M abhängige Variable 3 Zeitpunkte, 3 Personengruppen und $R=T=3$ aufgeführt.

Figur 2.3.:



μ_{ijk} = Mittelwert der i-ten Population auf der j-ten Variable zum k-zeitpunkt

Das multivariate Wachstumskurvenmodell für 3 Zeitpunkte, 3 Gruppen, M abhängige Variable und mit voller Trendspezifikation (d.h. quadratischer Matrix K).

Der Maximum-Likelihoodschätzer für \underline{B} ist nur dann von einfacher Gestalt, wenn spezielle Annahmen über die Trendspezifikation oder die Fehlermatrix $\underline{\Sigma}$ in (2.22) gemacht werden können. Diese Fälle sind z.B. bei MÖBUS & NAGL (1983, S. 364 ff) diskutiert.

Ist z.B. \underline{K}' invertierbar (= volle Trendspezifikation), erhält man als Schätzer

$$(2.31) \quad \hat{\underline{B}} = (\underline{X}'\underline{X})^{-1}\underline{X}'\underline{Y}\underline{K}'^{-1}$$

Enthält \underline{K}' darüber hinaus normierte Koeffizienten orthogonaler Polynome (s. z.B. MÖBUS & NAGL, 1983, S. 320), ist $\underline{K}'\underline{K}'^{-1} = \underline{I}$ und daher $\underline{K}'^{-1} = \underline{K}$. Es vereinfacht sich (2.31) zu

$$(2.32) \quad \hat{\underline{B}} = (\underline{X}'\underline{X})^{-1}\underline{X}'\underline{Y}\underline{K}$$

Ist dagegen \underline{K}' nicht invertierbar, weil der Trend nicht voll spezifiziert wurde ($R < T$), ist der Maximum-Likelihood-Schätzer unter der sogenannten "compound-symmetry" Annahme (s. MÖBUS & NAGL, 1983, S. 347)

$$(2.33) \quad \hat{\underline{B}} = (\underline{X}'\underline{X})^{-1}\underline{X}'\underline{Y}\underline{K}(\underline{K}'\underline{K})^{-1}$$

Wird die einschränkende Annahme für die "compound-symmetry" fallengelassen, erhalten wir den wichtigen allgemeinen Schätzer nach KHATRI (1966) (s. a. MORRISON, 1976², S. 217; TIMM, 1975, S. 497; JÖRESKOG, 1979, S. 314):

$$(2.34) \quad \begin{aligned} \hat{\underline{B}} &= (\underline{X}'\underline{X})^{-1}\underline{X}'\underline{Y}\underline{S}^{-1}\underline{K}(\underline{K}'\underline{S}^{-1}\underline{K})^{-1} \\ &= (\underline{X}'\underline{X})^{-1}\underline{X}'\underline{Y}\underline{D}^{-1}\underline{K}(\underline{K}'\underline{D}^{-1}\underline{K})^{-1} \end{aligned}$$

mit: \underline{S} = Schätzer für $\underline{\Sigma}$ in (2.22) (proportional zu \underline{D})
 $\underline{D} = \underline{Y}'(\underline{I} - \underline{X}(\underline{X}'\underline{X})^{-1}\underline{X}')\underline{Y}$

Hypothesentests werden dann wieder zweckmäßigerweise über WILKS' Lambda nach (2.26) durchgeführt. Zur Berechnung der Freiheitsgrade sei auf MÖBUS & NAGL (1983, S. 366 ff) verwiesen.

3. Das LISREL-Modell

3.1. Das Gesamtmodell

LISREL ist eine Abkürzung für Linear Structural Relations. Der Begriff steht einerseits für ein lineares stochastisches Gleichungssystem und andererseits für ein Computerprogramm, das es erlaubt, die Parameter des Systems zu schätzen. Die Bezeichnung LISREL wurde erstmals 1973 von JÖRESKOG (1973) benutzt.

Strukturgleichungsmodelle stellen eine Synthese aus dem allgemeinen linearen Modell (ALM), ökonometrischen Modellen, Pfad- und Faktorenanalysen dar. Aus dieser Vielseitigkeit heraus erklärt sich auch die Breite der Anwendungsmöglichkeiten. Besonders sinnvoll erscheint der Einsatz, wenn

- a) die Messungen Meßfehler enthalten und die interessierenden Relationen zwischen latenten (d.h.: nicht direkt beobachtbaren) Variablen vorliegen
- b) die Variablen simultane oder interdependente Beziehungen aufweisen
- c) wichtige Variable fälschlich aus der Untersuchung herausgelassen wurden (GOLDBERGER, 1973).

In das Strukturmodell gehen Zufallsvektoren von latenten abhängigen $\underline{\eta}' = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)'$ und latenten unabhängigen Variablen $\underline{\xi}' = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ ein. Zwischen den latenten Variablen besteht die multivariate Regressionsbeziehung

$$(3.1) \quad m \underline{\eta}_1 = m \underline{B} \underline{\eta}_1 + m \underline{\Gamma} \underline{\xi}_1 + m \underline{\zeta}_1$$

mit \underline{B}_{m-m} = Regressionsmatrix der Ordnung $(m \times m)$ mit Gewichten für die latenten abhängigen Variablen. Die Diagonale von \underline{B} ist mit Nullen besetzt.

$\underline{\Gamma}_{m-n}$ = Regressionsmatrix der Ordnung $(m \times n)$ mit Gewichten für die latenten unabhängigen Variablen.

$\underline{\zeta}_{m-1}$ = Zufallsvektor mit Residuen (auch "Fehler in den Gleichungen" genannt).

Von den Variablenvektoren soll bis auf weiteres angenommen werden, daß sie Abweichungen von den jeweiligen Mittelwertsvektoren enthalten und daher ihre Erwartungswerte gleich dem Nullvektor sind. Ferner enthält (3.1) die für Regressionen übliche Annahme der Unabhängigkeit von Regressor $\underline{\xi}$ und Fehler $\underline{\zeta}$ und die für LISREL zusätzliche Annahme, daß die Matrix $(\underline{I} - \underline{B})$ nichtsingulär und damit invertierbar ist. Ferner müssen die Eigenwerte von \underline{B} vom Betrag kleiner als 1 sein.

Das Konzept der Singularität und Invertierbarkeit ist bei RHENIUS (1983, S. 131 ff) und BASILEVSKY (1983) behandelt. Der Forderung nach Invertierbarkeit von $(\underline{I} - \underline{B})$ entspricht die Forderung, keine "überflüssigen" latenten abhängigen Variablen in (3.1) aufgenommen zu haben. Ist $(\underline{I} - \underline{B})$ nicht invertierbar, kann man die η bei Kenntnis der ξ nicht vorhersagen, wie man an (3.2) erkennt.

Die Bedingung, die an die Eigenwerte von \underline{B} geknüpft wird, spielt bei den Zeitreihenmodellen (vgl. a. Abschnitt 4.2) eine Rolle. Durch sie wird verhindert, daß die Werte der abhängigen Variablen über alle Grenzen wachsen ("explodieren"), wenn man nur genügend Zeit verstreichen ließe.

Bringen wir in (3.1) die latenten abhängigen Variablen nach links, haben wir $(\underline{I} - \underline{B}) \underline{\eta} = \underline{\Gamma} \underline{\xi} + \underline{\zeta}$ und damit die Vorhersagegleichung ("reduzierte Form") der latenten Variablen

$$(3.2) \quad \underline{\eta} = (\underline{I} - \underline{B})^{-1} \underline{\Gamma} \underline{\xi} + (\underline{I} - \underline{B})^{-1} \underline{\zeta}$$

Die Vektoren der latenten Variablen $\underline{\eta}$ und $\underline{\xi}$ können nicht direkt beobachtet werden. Gemessen werden statt dessen deren Indikatoren $\underline{y}' = (y_1, y_2, \dots, y_p)'$ und $\underline{x}' = (x_1, x_2, \dots, x_q)'$. Die Beziehung zwischen den Indikatoren und den latenten Variablen werden auch hier wieder durch multivariate Regressionen gekennzeichnet:

$$(3.3) \quad \underline{y} = \underline{\Lambda}_y \underline{\eta} + \underline{\varepsilon} \quad \text{Meßmodell für } \underline{x}$$

$$(3.4) \quad \underline{x} = \underline{\Lambda}_x \underline{\xi} + \underline{\delta} \quad \text{Meßmodell für } \underline{y}$$

mit $\underline{\Lambda}_y$ = Regressionsmatrix der Ordnung $(p \times m)$ für die Regression \underline{y} auf die $\underline{\eta}$

$\underline{\Lambda}_x$ = Regressionsmatrix der Ordnung $(q \times n)$ für die Regression \underline{x} auf die $\underline{\xi}$

$\underline{\varepsilon}$ = p-dimensionaler Zufallsvektor mit Meßfehlern

$\underline{\delta}$ = q-dimensionaler Zufallsvektor mit Meßfehlern

Alle Annahmen sind in (3.5) zusammengefaßt:

$$(3.5a) \quad \mathcal{E}(\underline{\delta}) = \mathcal{E}(\underline{\varepsilon}) = \mathcal{E}(\underline{\zeta}) = \underline{0}$$

| | | | | | |
|---------------------------|-------------------------------------|------------------------|---|--|--------------------|
| $\underline{\varepsilon}$ | $\underline{0}_\varepsilon$ | | | | |
| $\underline{\delta}$ | $\underline{0}_{\delta\varepsilon}$ | $\underline{0}_\delta$ | | | |
| $\underline{\zeta}$ | $\underline{0}^*$ | $\underline{0}^*$ | $\underline{\Psi}$ | | |
| $\underline{\eta}$ | $\underline{0}^*$ | $\underline{0}^*$ | $\mathcal{E}(\underline{\eta}, \underline{\zeta}')$ | $\mathcal{E}(\underline{\eta}, \underline{\eta}')$ | |
| $\underline{\xi}$ | $\underline{0}^*$ | $\underline{0}^*$ | $\underline{0}^*$ | $\mathcal{E}(\underline{\xi}, \underline{\eta}')$ | $\underline{\Phi}$ |
| | $\underline{\varepsilon}'$ | $\underline{\delta}'$ | $\underline{\zeta}'$ | $\underline{\eta}'$ | $\underline{\xi}'$ |

Wichtig für unsere Betrachtung ist die Tatsache, daß von den Erwartungswerten für die $\underline{\eta}$, $\underline{\xi}$, \underline{y} und \underline{x} nicht gefordert wird, sie müßten Null sein.

Die Momentenmatrizen $\underline{\theta}_\delta$, $\underline{\theta}_\epsilon$, $\underline{\theta}_{\delta\epsilon}$, $\underline{\phi}$, $\underline{\psi}$ stellen ebenso wie die Regressionsmatrizen \underline{B} , $\underline{\Gamma}$, $\underline{\Lambda}_x$, $\underline{\Lambda}_y$ Parametermatrizen dar, die geschätzt werden müssen. Die mit * gekennzeichneten Matrizen in (3.5b) sind a priori Null. Die Momentenmatrizen $\mathcal{E}(\underline{\eta}, \underline{\eta}')$, $\mathcal{E}(\underline{\xi}, \underline{\eta}')$ und $\mathcal{E}(\underline{\eta}, \underline{\xi}')$ lassen sich aus den Parametermatrizen herleiten. So ist z.B. unter Berücksichtigung von (3.2) die Momentenmatrix der latenten endogenen Variablen:

$$(3.6) \quad \mathcal{E}(\underline{\eta}, \underline{\eta}') = (\underline{I} - \underline{B})^{-1} (\underline{\Gamma} \underline{\phi} \underline{\Gamma}' + \underline{\Psi}) (\underline{I} - \underline{B})^{-T}$$

wobei: $(\underline{I} - \underline{B})^{-T} = [(\underline{I} - \underline{B})^{-1}]' = (\underline{I} - \underline{B})^{-1}$

Für die anderen Momentenmatrizen gilt

$$(3.7a) \quad \mathcal{E}(\underline{\xi}, \underline{\eta}') = \underline{\phi} \underline{\Gamma}' (\underline{I} - \underline{B})^{-1}$$

$$(3.7b) \quad \mathcal{E}(\underline{\eta}, \underline{\xi}') = (\underline{I} - \underline{B})^{-1} \underline{\psi}$$

Die Momentenmatrix der Indikatoren $\underline{z}' = (\underline{y}' | \underline{x}')$ ist

$$(3.8) \quad \underline{\Sigma}_{\underline{z}\underline{z}'} = \left[\begin{array}{c|c} \underline{\Sigma}_{\underline{y}\underline{y}'} & \underline{\Sigma}_{\underline{y}\underline{x}'} \\ \hline \underline{\Sigma}_{\underline{x}\underline{y}'} & \underline{\Sigma}_{\underline{x}\underline{x}'} \end{array} \right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \underline{\Lambda}_y \mathcal{E}(\underline{\eta}, \underline{\eta}') \underline{\Lambda}_y' + \underline{\theta}_\epsilon & \underline{\Lambda}_y \mathcal{E}(\underline{\eta}, \underline{\xi}') \underline{\Lambda}_x' + \underline{\theta}_{\epsilon\delta} \\ \hline \underline{\Lambda}_x \mathcal{E}(\underline{\xi}, \underline{\eta}') \underline{\Lambda}_y' + \underline{\theta}_{\delta\epsilon} & \underline{\Lambda}_x \underline{\phi} \underline{\Lambda}_x' + \underline{\theta}_\delta \end{array} \right]$$

Ist zusätzlich $\mathcal{E}(\underline{\xi}) = \underline{0}$, dann ist $\underline{\phi}$ die Kovarianzmatrix der $\underline{\xi}$ und $\underline{\Sigma}_{\underline{z}\underline{z}'}$, die der Indikatoren.

Wie man an (3.8) sieht, sind die Elemente von $\underline{\Sigma}_{\underline{z}\underline{z}'}$ Funktionen der zu schätzenden Parameter in $\underline{\Lambda}_y$, $\underline{\Lambda}_x$, \underline{B} , $\underline{\Gamma}$, $\underline{\phi}$, $\underline{\psi}$, $\underline{\theta}_\delta$, $\underline{\theta}_\epsilon$ sowie $\underline{\theta}_{\delta\epsilon}$. Dabei gibt es neben unbe-

kannten freien Parametern solche, die einander gleich sein sollen ("constrained parameter") oder andere, die auf einen bestimmten Wert fixiert sind ("fixed parameter"). Letztere werden im folgenden Manuskript mit * gekennzeichnet. Auf diese Weise läßt sich der Parameterraum Ω unter einer bestimmten Nullhypothese H_0 einschränken zum Parameterraum Ω_0 .

Vor 1982 wählte JÖRESKOG für das Strukturmodell (3.1) eine andere - in der Ökonometrie übliche - Darstellung

$$(3.9) \quad \underline{B} \underline{\eta} = \underline{\Gamma} \underline{\xi} + \underline{\zeta}$$

wobei die Diagonale von \underline{B} aus Einsen bestand. Da die Nebendiagonalelemente von \underline{B} mit -1 multipliziert werden mußten, um als direkte Effekte der latenten endogenen Variablen untereinander interpretiert werden zu können, wird ab der Programmversion LISREL V die einfachere Darstellung in (3.1) gewählt. Die Beziehung zwischen der neuen und der alten \underline{B} -Matrix ist

$$(3.10) \quad \underline{B}_{\text{alt}} = \underline{I} - \underline{B}_{\text{neu}} \quad \text{bzw.} \quad \underline{B}_{\text{neu}} = \underline{I} - \underline{B}_{\text{alt}}$$

In vielen Fällen werden Hypothesen geprüft, die sich auf Gruppenunterschiede beziehen. In diesem Fall wird das LISREL-Modell (3.1), (3.3) und (3.4) gruppenspezifisch formuliert und geschätzt. Die zu minimierende Anpassungsfunktion (s.u.) wird entsprechend modifiziert.

3.2. Teilmodelle

Aus dem Gesamtmodell (3.1), (3.3) und (3.4) lassen sich verschiedene Teilmodelle ausblenden, wenn man einige der Variablen y , x , η , ξ , ζ , δ , oder ε wegläßt. Eine Übersicht der hier behandelten Modelltypen haben wir in Tabelle 3.2 zusammengetragen.

Zuerst gehen wir auf das ALM in seiner multivariaten Formulierung (2.22), (2.27) ein. Wir betrachten dabei jetzt nicht - wie in (2.27) geschehen - Datenmatrizen von N Beobachtungen auf T abhängigen und q unabhängigen Variablen, sondern wie im LISREL-Modell nur die Variablennotation. Wir können dann das multivariate ALM in Variablenschreibweise formulieren als

$$(3.11a) \quad \mathbf{1}'\mathbf{Y}'_T = \mathbf{1}'\mathbf{X}'_T\mathbf{B}'_R\mathbf{K}'_T + \mathbf{1}'\boldsymbol{\varepsilon}'_T \quad (\text{nach 2.27})$$

oder transponiert als

$$(3.11b) \quad \mathbf{T}'\mathbf{Y}_1 = \mathbf{T}'\mathbf{X}_R\mathbf{B}'_q\mathbf{X}_1 + \mathbf{T}'\boldsymbol{\varepsilon}_1 \quad (\text{nach 2.27})$$

(3.11b) entspricht dem LISREL-Modell wenn man eine Reihe von Setzungen vornimmt (s. Tabelle 3.1):

multivariates ALM

LISREL-Modell

| | | | | | |
|--|----------|---|----------|--------------------------|--|
| | | $\underline{\mathbf{B}}$ | \equiv | $\underline{\mathbf{0}}$ | in (3.1) |
| | | $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ | \equiv | $\underline{\mathbf{0}}$ | in (3.3) |
| | | $\underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{X}}$ | \equiv | $\underline{\mathbf{I}}$ | , $\underline{\boldsymbol{\delta}} \equiv \underline{\mathbf{0}}$ in (3.4) |
| $\underline{\mathbf{K}}$ | \equiv | $\underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{Y}}$ | | | in (3.3) |
| $\underline{\mathbf{B}}'$ | \equiv | $\underline{\boldsymbol{\Gamma}}$ | | | in (3.1) |
| $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ | \equiv | $\underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{Y}}\underline{\boldsymbol{\zeta}}$ | | | in (3.1) |

Tabelle 3.1: Das meßfehlerfreie LISREL-Modell $\underline{\mathbf{y}} = \underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{Y}}\underline{\boldsymbol{\Gamma}}\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{Y}}\underline{\boldsymbol{\zeta}}$ als Äquivalent zum multivariaten ALM

Die zunächst noch vordergründige Ähnlichkeit der Modellformulierung beinhaltet jedoch noch nicht den Beweis der Äquivalenz beider Ansätze. Dazu benötigt man noch die Anpassungsfunktion von LISREL. Es läßt sich zeigen, das die Schätzungen im ALM und in LISREL identisch sind, wenn $\underline{\boldsymbol{\psi}}$ und $\underline{\boldsymbol{\phi}}$ frei bleiben.

Tabelle 3.2: Zusammenstellung der hier behandelten LISREL-Modelle

| LISREL-Modell | Momentenmatrix der Modellvariablen |
|--|--|
| univariate/multivariate Regression (Spezialfall des ALM) | $\Sigma_{ZZ'} = \begin{bmatrix} \Gamma\Phi\Gamma' + \Psi & \Gamma\Phi \\ \Phi\Gamma' & \Phi \end{bmatrix}$ |
| das Wachstumskurvenmodell (ALM) | $\Sigma_{ZZ'} = \begin{bmatrix} \Lambda_y (\Gamma \Phi \Gamma' + \Psi) \Lambda' & \Lambda_y \Gamma \Phi \\ \Phi \Gamma' \Lambda' & \Phi \end{bmatrix}$ |
| das multivariate autoregressive Zeitreihenmodell | $\Sigma_{YY'} = (\bar{I} - \bar{B})^{-1} \bar{\Psi} (\bar{I} - \bar{B})',^{-1}$ |
| die lineare Approximation eines stochastischen Differentialgleichungssystems | $\Sigma_{YY'} = \Lambda_y (\bar{I} - \bar{B})^{-1} \bar{\Psi} (\bar{I} - \bar{B})',^{-1} \Lambda_y'$ |

3.3. Die Schätzfunktion von LISREL

Es sei $\underline{z}_1, \dots, \underline{z}_N$ eine Zufallsstichprobe der Größe N . \underline{z}_i ist die Realisation i einer $(p+q)$ -dimensionalen multivariaten Zufallsvariablen. Die multivariate Verteilung besitzt den Erwartungswertvektor $\underline{\mu}$ und die nichtsinguläre Kovarianzmatrix $\underline{\Sigma}$. Dann ist die Likelihood der Beobachtungen

$$(3.12) \quad L(\underline{\mu}, \underline{\Sigma}) = \frac{1}{(2\pi)^{N(p+q)/2} |\underline{\Sigma}|^{N/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\underline{z}_i - \underline{\mu})' \underline{\Sigma}^{-1} \cdot (\underline{z}_i - \underline{\mu}) \right]$$

Zur Parameterschätzung wählt man Schätzer für $\underline{\mu}$ und $\underline{\Sigma}$

$$(3.13a) \quad \hat{\underline{\mu}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \underline{z}_i = \bar{\underline{z}} \quad (= \text{Stichprobenmittelwert})$$

$$(3.13b) \quad \hat{\underline{\Sigma}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\underline{z}_i - \bar{\underline{z}}) (\underline{z}_i - \bar{\underline{z}})' = \underline{S} \quad (= \text{Stichprobenkovarianzmatrix})$$

Dabei sollen $\underline{\mu}$ und $\underline{\Sigma}$ Funktionen eines Parametervektors $\underline{\theta}$ sein. Dann ist der natürliche Logarithmus der Likelihood (s. a. MORRISON, 1976², S. 99):

$$(3.14) \quad \ln L(\underline{\mu}(\underline{\theta}), \underline{\Sigma}(\underline{\theta})) = -\frac{N}{2} \left[(p+q) \ln(2\pi) + \ln |\underline{\Sigma}| + \text{Spur}\{\underline{S} \underline{\Sigma}^{-1}\} + (\bar{\underline{z}} - \underline{\mu})' \underline{\Sigma}^{-1} (\bar{\underline{z}} - \underline{\mu}) \right]$$

Für unseren Fall gilt außerdem noch

$$(\bar{\underline{z}} - \underline{\mu})' \underline{\Sigma}^{-1} (\bar{\underline{z}} - \underline{\mu}) = \text{Spur}\{(\bar{\underline{z}} - \underline{\mu}) (\bar{\underline{z}} - \underline{\mu})' \underline{\Sigma}^{-1}\}.$$

Dann kann die Maximierung von (3.14) durch die Minimierung von (3.15) erreicht werden.

$$(3.15) \quad F(\underline{\mu}(\underline{\theta}), \underline{\Sigma}(\underline{\theta})) = \ln|\underline{\Sigma}| + \text{Spur}\{\underline{S}\underline{\Sigma}^{-1}\} \\ + \text{Spur}\{(\underline{\bar{z}}-\underline{\mu})(\underline{\bar{z}}-\underline{\mu})'\underline{\Sigma}^{-1}\}$$

SÖRBOM (1974) addierte zu (3.15) noch die beiden Konstanten $-\ln|\underline{S}|$ und $-(p+q)$ hinzu, was zu Vereinfachungen bei den Prüfgrößen führt (s.a. Abschnitt 3.4). Wir haben dann als zu minimierende Funktion

$$(3.16) \quad F(\underline{\mu}(\underline{\theta}), \underline{\Sigma}(\underline{\theta})) = \ln|\underline{\Sigma}| + \text{Spur}\{\underline{S}\underline{\Sigma}^{-1}\} \\ + \text{Spur}\{(\underline{\bar{z}}-\underline{\mu})(\underline{\bar{z}}-\underline{\mu})'\underline{\Sigma}^{-1}\} - \ln|\underline{S}| - (p+q)$$

Zur Schätzung der Parameter wird in LISREL aber statt (3.16) die einfachere Funktion (3.17) minimiert

$$(3.17) \quad F(\underline{\mu}(\underline{\theta}), \underline{\Sigma}(\underline{\theta})) = \ln|\underline{\Sigma}| + \text{Spur}\{\underline{S}\underline{\Sigma}^{-1}\} - \ln|\underline{S}| - (p+q)$$

Die Konstanten $\ln|\underline{S}|$ und $(p+q)$ erreichen u.a., daß die Funktion (3.17) bei perfekter Anpassung des Modells genau den Wert Null annimmt. Dann ist $\ln|\underline{\Sigma}| = \ln|\underline{S}|$ und $\text{Spur}\{\underline{S}\underline{\Sigma}^{-1}\} = (p+q)$.

Offensichtlich hatte JÖRESKOG bei der Formulierung von (3.17) an die Analyse von Kovarianzmatrizen \underline{S} gedacht. Es schien, daß mit LISREL keine Rohdaten oder Momente um Null:

$$(3.18) \quad \underline{M} = \underline{S} + \underline{\bar{z}\bar{z}}' = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \underline{z}_i \underline{z}_i'$$

analysiert werden dürfen. Verwendet man im Programm statt der Kovarianzmatrizen \underline{S} und $\underline{\Sigma}$ die Momentenmatrizen $\underline{M} = \underline{S} + \underline{\bar{z}\bar{z}}'$ und $\underline{\Pi} = \underline{\Sigma} + \underline{\mu\mu}'$, dann minimiert das Programm unter Benutzung von (3.17):

$$(3.19) \quad F(\underline{\Pi}(\underline{\theta})) = \ln|\underline{\Pi}| + \text{Spur}\{\underline{M}\underline{\Pi}^{-1}\} - \ln|\underline{M}| - (p+q)$$

Glücklicherweise konnten JÖRESKOG & SÖRBOM (1980) zeigen, daß die Minimierung von (3.19) identisch ist mit der

Minimierung von (3.16), wenn die Momentenmatrizen eine besondere geränderte Struktur (s. (3.20a) und (3.20b)) besitzen. Da die Schätzer, die (3.16) minimieren, auch den natürlichen Logarithmus der Likelihood (3.14) maximieren, kann (3.19) als korrekte Schätzfunktion angesehen werden.

(3.19) ist identisch mit (3.16), wenn die Momentenmatrizen folgende Struktur besitzen:

$$(3.20a) \quad \underline{M}^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \underline{z}_i \underline{z}_i' = \left[\begin{array}{c|c} \underline{S} + \underline{\bar{z}} \underline{\bar{z}}' & \underline{\bar{z}} \\ \hline \underline{\bar{z}}' & 1 \end{array} \right] \text{ mit } \underline{z}^* = \left[\begin{array}{c} \underline{z} \\ 1 \end{array} \right]$$

$$(3.20b) \quad \underline{\Pi}^* = \mathcal{E}(\underline{z}^*, \underline{z}^{*'}) = \left[\begin{array}{c|c} \underline{\Sigma} + \underline{\mu} \underline{\mu}' & \underline{\mu} \\ \hline \underline{\mu}' & 1 \end{array} \right]$$

Zum Beweis müssen wir zeigen, daß

$$\ln |\underline{\Pi}^*| + \text{Spur}\{\underline{M}^* \underline{\Pi}^{*-1}\} - \ln |\underline{M}^*| - (p+q+1) =$$

$$\ln |\underline{\Sigma}| + \text{Spur}\{\underline{S} \underline{\Sigma}^{-1}\} + \text{Spur}\{(\underline{z} - \underline{\mu})(\underline{z} - \underline{\mu})' \underline{\Sigma}^{-1}\} - \ln |\underline{S}| - (p+q)$$

ist.

Zu beachten ist, daß sich durch Einführung der Scheinvariablen '1' die Zahl der Variablen um 1 auf (p+q+1) erhöht hat, sodaß die entsprechende Konstante links vom Gleichheitszeichen entsprechend geändert werden muß.

Zunächst zeigen wir, daß $|\underline{M}^*| = |\underline{S}|$ und $|\underline{\Pi}^*| = |\underline{\Sigma}|$ ist. Die Determinanten der Blockmatrizen \underline{M}^* und $\underline{\Pi}^*$ berechnen sich aus den Determinanten der Teilmatrizen (s.a. MORRISON, 1976², S. 68)

$$|\underline{M}^*| = |1| \cdot |\underline{S} + \underline{\bar{z}} \underline{\bar{z}}' - \underline{\bar{z}} \cdot 1^{-1} \cdot \underline{\bar{z}}'| = |\underline{S}|$$

$$|\underline{\Pi}^*| = |1| \cdot |\underline{\Sigma} + \underline{\mu} \underline{\mu}' - \underline{\mu} \cdot 1^{-1} \cdot \underline{\mu}'| = |\underline{\Sigma}|$$

Zur Berechnung der Spur von $\underline{M}^* \underline{\Pi}^{*-1}$ benötigt man $\underline{\Pi}^{*-1}$. Auch zur Invertierung von Blockmatrizen findet sich bei

MORRISON (1976², S. 68) eine Formel, die es gestattet, die Inverse aus den Teilmatrizen zu entwickeln:

$$\underline{\Pi}^{*-1} = \left[\begin{array}{c|c} \underline{\Sigma}^{-1} & -\underline{\Sigma}^{-1}\underline{\mu} \\ \hline -\underline{\mu}'\underline{\Sigma}^{-1} & 1 + \underline{\mu}'\underline{\Sigma}^{-1}\underline{\mu} \end{array} \right]$$

Die Spur $\{\underline{M}^* \underline{\Pi}^{*-1}\}$ ist dann

$$\begin{aligned} \text{Spur}\{\underline{M}^* \underline{\Pi}^{*-1}\} &= \text{Spur}\{(\underline{S} + \underline{z}\underline{z}' - \underline{z}\underline{\mu}') \underline{\Sigma}^{-1} \\ &\quad - \text{Spur}\{(\underline{z} - \underline{\mu})' \underline{\Sigma}^{-1} \underline{\mu}\} + 1 \end{aligned}$$

Nach einigen Umformungen und zyklischen Permutationen erhält man dann für die Spur

$$\text{Spur}\{\underline{M}^* \underline{\Pi}^{*-1}\} = \text{Spur}\{\underline{S}\underline{\Sigma}^{-1}\} + \text{Spur}\{(\underline{z} - \underline{\mu})(\underline{z} - \underline{\mu})' \underline{\Sigma}^{-1}\} + 1$$

Damit ist der Beweis erbracht, daß mit (3.20) und (3.17) Rohdaten analysiert werden dürfen.

Wir müssen also, wie in der Regressionsanalyse mit Konstanter üblich, eine Dummyvariable spezifizieren, die für alle Beobachtungen der konstanten Wert '1' besitzt. Ferner müssen in der Stichprobenmomententmatrix und in der Momentmatrix der Population an vergleichbaren Stellen Mittelwerte und Erwartungswerte stehen (zweckmäßigerweise in der letzten Zeile).

Es ist dabei zu beachten, daß entsprechend zu (3.17) alle Ausdrücke von LISREL immer die Namen \underline{S} und $\underline{\Sigma}$ verwenden, auch wenn es sich um \underline{M}^* und $\underline{\Pi}^*$ handelt. Insofern haben wir uns auch an diese Tradition gehalten und in Abschnitt 3.1 und 3.2 immer $\underline{\Sigma}$ geschrieben, auch wenn Momentenmatrizen um Null zugelassen sind.

Wichtig hierbei ist zu sehen, daß für \underline{z}^* keine multivariate Normalverteilung mehr gefordert wird. Ähnliches gilt auch für das ALM, wie schon in Abschnitt 2.1 erwähnt wurde.

3.4. Hypothesentests

Hypothesentests werden nach der im Abschnitt 2.1 beschriebenen Methode der Likelihoodquotiententests durchgeführt. Wir wollen jetzt drei ineinander geschachtelte LISREL-Modelle formulieren, die zu den verschiedenen statistischen Hypothesen korrespondieren. Der Einfachheit halber werden wir unsere Argumentation auf (3.14) stützen und dabei so tun, wie wenn wir nur Hypothesen über Kovarianzen formulieren würden. Da wir aber auf Grund des Beweises im Abschnitt 3.3. wissen, daß mit der Minimierung von (3.19) die korrekte Likelihood (3.14) maximiert wird und damit auch Mittelwerte Funktionen von Modellparametern sein dürfen, können wir auch Hypothesen über Mittelwerte prüfen. Solange die Momentenmatrizen \underline{M} und $\underline{\Pi}$ die Struktur (3.20) besitzen, dürfen sie in der weiteren Betrachtung für die Kovarianzmatrizen \underline{S} und $\underline{\Sigma}$ substituiert werden.

Das erste Modell nennen wir idiographisches Modell. Die Parameter dieses Modells werden nicht tatsächlich geschätzt. Das idiographische Modell dient nur zur Verdeutlichung einiger Gedankengänge. Das idiographische Modell enthält so viele unbekannte Parameter, daß ein beliebig positiv definites \underline{S} unter seiner Kontrolle erzeugt sein könnte. Bei geeigneter Parameterwahl kann aus dem idiographischen Modell eine Matrix $\hat{\underline{\Sigma}}_{id}$ hergeleitet werden, die der beobachteten Stichprobenkovarianzmatrix exakt entspricht ($\hat{\underline{\Sigma}}_{id} = \underline{S}$). Das Maximum der Likelihood liegt im uneingeschränkten Parameterraum bei \underline{S} .

Den Logarithmus der Likelihood L_{id} dieses Modells erhält man durch Einsetzen von $\hat{\underline{\Sigma}}_{id} = \underline{S}$ für $\underline{\Sigma}$ in (3.14):

$$(3.21) \quad \ln L_{id} = c - \frac{n}{2} \left[\ln |\underline{S}| + (p + q) \right]$$

Das zweite Modell ("volles Modell") geht aus dem ersten Modell durch Einschränkung des Parameterraumes

hervor. Die Kovarianzmatrix dieses Modells soll $\underline{\Sigma}_1$ genannt werden. Den Logarithmus der Likelihood L_1 dieses Modells erhält man durch Einsetzen von $\hat{\underline{\Sigma}}_1$ an die Stelle von $\underline{\Sigma}$ in (3.14)

$$(3.22) \quad \ln L_1 = c - \frac{n}{2} \left[\ln |\hat{\underline{\Sigma}}_1| + \text{Spur} \{ \underline{S} \hat{\underline{\Sigma}}_1^{-1} \} \right]$$

Nach (2.10) verteilt sich die Größe $-2 \ln \lambda = -2 \ln \frac{L_1}{L_{id}}$ nach der Chiquadratverteilung mit ν Freiheitsgraden

$$(3.23) \quad -2 \ln \lambda_1 = -2 (\ln L_1 - \ln L_{id}) \\ = n \left[(\ln |\hat{\underline{\Sigma}}_1| + \text{Spur} \{ \underline{S} \hat{\underline{\Sigma}}_1^{-1} \}) - \ln |\underline{S}| - (p+q) \right] \\ = n F_1 - \chi^2(\nu_1)$$

- mit $\nu_1 = p_{id} - p_1$
- p_{id} = Zahl der unabhängigen Parameter im idiographischen Modell (= Zahl der Elemente in S)
- p_1 = Zahl der unabhängigen Parameter im vollen Modell
- F_1 = Anpassungsfunktion (3.17) für das volle Modell

Es besteht also eine einfache Beziehung zwischen der Anpassungsfunktion (3.17) und dem Likelihoodquotiententest mit der Hypothese "idiographisches VS. volles Modell".

Das dritte Modell ("eingeschränktes Modell") geht aus dem vollen Modell durch eine weitere Einschränkung des Parameterraums hervor. Die resultierende Anpassungsfunktion F_0 beinhaltet - ähnlich wie (3.23) - einen Likelihoodquotiententest mit der Hypothese "idiographisches Modell vs. eingeschränktes Modell":

$$\begin{aligned}
 (3.24) \quad -2 \ln \lambda_0 &= -2 \left[\ln L_0 - \ln L_{id} \right] \\
 &= +n \left[\ln |\hat{\Sigma}_0| + \text{Spur}\{\underline{S} \hat{\Sigma}_0\} - \ln |\underline{S}| - (p+q) \right] \\
 &= n F_0 - \chi_0^2(v_0)
 \end{aligned}$$

$$\text{mit } v_0 = p_{id} - p_0$$

p_0 = Zahl der unabhängigen Parameter im eingeschränkten Modell

Um zu prüfen, ob der Übergang vom vollen zum reduzierten Modell gerechtfertigt war, testen wir die beiden Modelle gegeneinander. Das volle Modell repräsentiert die klassische Alternativhypothese H_1 und das reduzierte Modell der Nullhypothese H_0 . Der Likelihoodquotiententest zur Testung der Hypothese "volles vs. eingeschränktes Modell" wird auch hier wieder über die Größe $-2 \ln \lambda$ geprüft:

$$\begin{aligned}
 (3.25) \quad -2 \ln \lambda &= -2 (\ln L_0 - \ln L_1) \\
 &= n \left[\ln |\underline{\Sigma}_0| + \text{Spur}\{\underline{S} \underline{\Sigma}_0^{-1}\} - \ln |\underline{\Sigma}_1| \right. \\
 &\quad \left. - \text{Spur}\{\underline{S} \underline{\Sigma}_1^{-1}\} \right] \\
 &= n F_0 - n F_1 = \chi_0^2(v_0) - \chi_1^2(v_1) \\
 &= \chi_{diff}^2(v_1 - v_0)
 \end{aligned}$$

Der Test wird also über die Differenz der Anpassungschiquadrate geführt. Die Differenz der einzelnen Chiquadrate hat dabei $v_1 - v_0$ Freiheitsgrade. Es muß allerdings beachtet werden, daß eine fortwährende Testung von ineinander geschachtelten Modellen an denselben Daten das Signifikanzniveau in unkontrollierter Weise verändert.

In vielen Fällen müssen Hypothesen überprüft werden, die sich auf verschiedene Gruppen beziehen. So wird im t-Test für unabhängige Stichproben untersucht, ob die zwei Stichproben aus einer gemeinsamen Population stammen. Für das volle Modell (Alternativhypothese H_1) werden jetzt zwei gruppenspezifische LISREL-Modelle spezifiziert und geschätzt. Für das reduzierte Modell (Nullhypothese) werden die gleichen Modelle - allerdings mit der Einschränkung gleicher Regressionsparameter für beide Gruppen - geschätzt. In beiden Fällen wird die Anpassungsfunktion (3.17) über die Gruppen summiert und minimiert. Die Summation der Anpassungsfunktionen ist wegen der Unabhängigkeit der Stichproben erlaubt. Wir haben in allen Fällen, in denen solche gruppenspezifischen Modelle aufgestellt werden, diese durch den Index g gekennzeichnet.

4. Beispiele

Wir wollen nun an einer Reihe von Beispielen die Anwendung von LISREL demonstrieren. Die Beispiele in 4.1. befassen sich mit der Auswertung von Experimenten und die in 4.2. mit der Analyse von Zeitreihen. Jedes Beispiel gliedert sich in zwei Teile: 1. "klassische" Darstellung der Methode, 2. Darstellung der Methode als LISREL-Variante.

4.1. Beispiele im Rahmen des ALM

4.1.1. Der t-Test für unabhängige Stichproben

Ähnlich wie in 3.4. für LISREL lassen sich für die Modelle im Rahmen des ALM drei ineinander geschachtelte Varianten formulieren, die den statistischen Hypothesen entsprechen: 1. das idiographische, 2. das volle und 3. das reduzierte Modell (NAMBOODIRI, CARTER & BLALOCK, 1975). Das idiographische Modell dient auch

hier nur zur Verdeutlichung einiger Gedankengänge. Es enthält soviel Parameter wie Individuen. Es wird also angenommen, daß jede Person aus einer eigenen Population stammt. Das Modell (2.1), (2.22a) und (2.27) enthält die Matrix $\underset{N \times N}{X} = \underset{N \times N}{I}$ (I = Einheitsmatrix) und einen N -dimensionalen Parametervektor $\underset{N \times 1}{\beta_1}$ (2.4). Das Modell hat N Freiheitsgrade und das multiple R^2 ist 1, da sich die Rohdaten exakt vorhersagen lassen. Dieses N und R^2 tauchen in der Prüfgröße (2.21) im Nenner auf.

Das volle Modell (s.a. 2.12) leitet sich aus dem idio-graphischen Modell durch Einschränkung des Parameter-raums her. Wir nehmen an, daß die ersten N_1 Personen alle den gleichen Parameter β_{1v} "besitzen". Für die restlichen N_2 Personen nehmen wir das entsprechende für β_{2v} an. Unter dieser Voraussetzung ist $N = N_1 + N_2$ und (2.1) kann in dem Sinne so verändert werden, daß $q = 2$ wird. Die auf zwei Spalten geschrumpfte Matrix $\underset{N \times 2}{X}$ wird jetzt "Designmatrix" genannt und gibt durch den Wert '1' oder '0' in Spalte $g=1$ oder $g=2$ an, ob diese Beobachtungen aus Population 1 oder 2 stammt. Im vollen Modell ist die Alternativhypothese H_1 enthalten.

Das eingeschränkte (reduzierte) Modell repräsentiert die Nullhypothese H_0 und geht aus dem vollen Modell durch eine weitere Einschränkung hervor. Die Beobachtungen sollen jetzt nur noch aus einer Population mit gemeinsamen Parameter β_r stammen. Unter dieser Voraussetzung degeneriert die Matrix $\underset{N \times 2}{X}$ in (2.1a) zu einem Spaltenvektor $\underset{N \times 1}{X}$, der für alle Beobachtungen nur den Wert '1' enthält. Der Anstieg der Fehlerquadratsumme wird dann nach (2.20) oder (2.21) - wenn man den Abfall der R^2 als Prüfgröße nimmt - zur Testung der Nullhypothese herangezogen. Zieht man die Quadratwurzel aus dem F-Wert, erhält man die Prüfgröße t , von der der t-Test seinen Namen herleitet.

Will man ALM und LISREL vergleichbar machen, ist es am einfachsten, wenn man die Nullhypothese H_0 mittels dem reduzierten (bzw. eingeschränkten) Modell repräsen-

tiert. Die Alternativhypothese H_1 verbirgt sich dann im vollen Modell. Da LISREL nur Momente bzw. Kovarianzen und nicht wie das ALM Rohdaten analysiert, fallen dann in diesem Zusammenhang idiographisches und volles LISREL-Modell zusammen.

Betrachten wir ein konkretes Beispiel:

$$\begin{array}{l}
 \text{volles Modell} \\
 \underline{Y} = \underline{X}_v \underline{\beta}_v + \underline{\varepsilon}_v \\
 \begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{c} 72 \\ 67 \\ 52 \\ 54 \\ 46 \\ 58 \\ 59 \\ 54 \\ 58 \\ 63 \\ \text{---} \\ 75 \\ 66 \\ 55 \\ 61 \\ 55 \\ 63 \\ 57 \\ 54 \\ 59 \\ 66 \end{array} \right] = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ \text{---} \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \cdot \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \beta_{1v} \\ \beta_{2v} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \varepsilon_v \end{array} \right]
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{reduziertes Modell} \\
 \underline{Y} = \underline{X}_r \underline{\beta}_r + \underline{\varepsilon}_r \\
 \begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{c} 72 \\ 67 \\ 52 \\ 54 \\ 46 \\ 58 \\ 59 \\ 54 \\ 58 \\ 63 \\ \text{---} \\ 75 \\ 66 \\ 55 \\ 61 \\ 55 \\ 63 \\ 57 \\ 54 \\ 59 \\ 66 \end{array} \right] = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \text{---} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \beta_r \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \varepsilon_r \end{array} \right]
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (4.1)$$

Als Schätzungen erhalten wir für

$$\begin{array}{l}
 \text{das volle Modell} \\
 \hat{\beta}_{1v} = 58.3 \\
 \hat{\beta}_{2v} = 61.1 \\
 Q_{\hat{\Omega}} = \sum_{i=1}^N \hat{\varepsilon}_{iv}^2 = 905.0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{das reduzierte Modell} \\
 \hat{\beta}_r = 59.7 \\
 Q_{\hat{\Omega}_0} = \sum_{i=1}^N \hat{\varepsilon}_{ir}^2 = 944.2
 \end{array}
 \quad (4.2)$$

Die Regressionsparameter entsprechen also den jeweiligen Stichprobenmittelwerten. Im vollen Modell erlaubt also die Kenntnis der Gruppenzugehörigkeit eine Vorhersage des individuellen Beobachtungswerts nur bis zum jewei-

gen Gruppenmittelwert $\hat{\beta}_{1v}$ oder $\hat{\beta}_{2v}$. Im reduzierten Modell ist die beste Vorhersage eines individuellen Meßwerts der gepoolte Gesamtstichprobenmittelwert $\hat{\beta}_r$.

Als Prüfgröße verwenden wir (2.20)

$$(4.3) F_{\text{empirisch}} = \frac{(944.2 - 905.0)/(2 - 1)}{905.0 / (20 - 2)} = 0.777 \quad (p=.39)$$

Da dieser Wert kleiner als der kritische Wert $F(\alpha = .05, df_1 = 1, df_2 = 18) = 4.41$ ist, wird die Nullhypothese beibehalten: die Mittelwerte unterscheiden sich nicht signifikant.

4.1.2. Der t-Test als LISREL-Modell

Die statistische Alternativhypothese spiegelt sich im vollen LISREL-Modell wieder. Da - wie wir gleich noch sehen werden - dieses Modell die Momente perfekt reproduziert, ist die über alle Gruppen g summierte Prüfgröße (3.23) gleich Null. Daher ist das volle LISREL-Modell im Gegensatz zum vollen ALM-Modell überflüssig! Wir werden aber aus rein deskriptiven Gründen auf das volle Modell eingehen.

Das volle Modell ist ein gruppenspezifisches Submodell von (3.1) - (3.4) (s.a. Tabelle 3.2):

$$(4.4) \quad y_g = \gamma_g x_g + \zeta_g$$

mit: g = gruppenspezifischem Index ($g = 1, \dots, G$)
 γ_g = gruppenspezifischer Regressionsparameter:
 γ_1 ist identisch mit β_{1v} in (4.1)
 γ_2 ist identisch mit β_{2v} in (4.1)
 x_g = Scheinvariable mit Wert '1' für alle Mitglieder der Gruppe g
 verschwindenden Matizen \underline{B} , $\underline{\theta}_\delta$, $\underline{\theta}_\epsilon$ aber $\underline{\Lambda}_{xg}$,
 $\underline{\Lambda}_{yg} = 1.0^*$

Die zu analysierenden Stichprobenmomentenmatrizen \underline{M}_g^*

entsprechen in ihrer Struktur (3.20a) und lauten

$$(4.5) \quad \underline{M}_1^* = \left[\begin{array}{c|c} 3450.3 & 58.3 \\ \hline 58.3 & 1.0 \end{array} \right] \quad \underline{M}_2^* = \left[\begin{array}{c|c} 3772.3 & 61.1 \\ \hline 61.1 & 1.0 \end{array} \right]$$

Die modellgemäßen Momentenmatrizen $\underline{\Pi}_g^*$ entsprechen in ihrer Struktur (3.20b) und lauten in Modellparameter aufgelöst (s.a. Tabelle 3.2):

$$(4.6) \quad \underline{\Pi}_g^* = \left[\begin{array}{c|c} \gamma_g^2 + \psi_g & \gamma_g \\ \hline \gamma_g & 1.0^* = \phi_{xx} \end{array} \right]$$

Die rechte untere Ecke der Matrix (4.6) wird durch die sogenannte FIXEDX-Option des Programms LISREL auf '1' fixiert. An dieser Stelle steht das Moment um Null für die Scheinvariable x, die für alle Personen der Gruppe g den Wert '1' besitzt. Zu beachten ist ferner, dass das Programm LISREL die Matrizen (4.5) mit \underline{S} und die Matrizen (4.6) mit $\underline{\Sigma}$ bezeichnet.

Die geschätzten $\underline{\Pi}_g^*$ sind identisch mit \underline{M}_g^* , sodaß die geschätzten Parameter $\hat{\gamma}_g$ und $\hat{\psi}_g$ aus den entsprechenden Stellen von \underline{M}_g^* ablesbar sind. Die über alle Gruppen aufsummierte Prüfgröße (3.23) ist Null.

Das eingeschränkte Modell repräsentiert die Nullhypothese H_0 : "Beide Stichproben entstammen einer Population. Wir legen den gruppenspezifischen LISREL-Modellen (4.4) die Restriktion $\gamma_1 = \gamma_2$ auf. Als Schätzungen erhalten wir

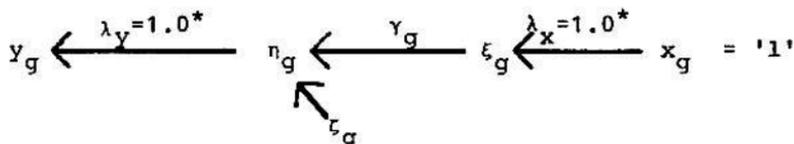
$$(4.7) \quad \hat{\gamma}_1 = \hat{\gamma}_2 = 59.9, \quad \hat{\psi}_1 = 53.9, \quad \hat{\psi}_2 = 40.5$$

Das über alle Gruppen summierte Anpassungschiquadrat (3.24) beträgt

$$(4.8) \quad \chi_{\text{emp}}^2 = 0.76 \text{ mit } df = v_0 = 4 - 3 = 1 \quad (p=.38)$$

Das Ergebnis ist damit identisch zu (4.3). Wir behalten die Nullhypothese bei. Das Pfadmodell des t-Tests findet

sich in Figur 4.1 und die LISREL-Steuerkarten für das reduzierte Modell in Tabelle 4.1.



Figur 4.1: Pfadmodell des t-Tests

```

***** T - TEST FUER UNABH. STICHPROBEN *****C
**      EINGESCHRAENKTES MODELL                      **C
**      DATEN: NC GEL/S.137                          **C
*****C
DA                                          C DATENPARAMETER
NI=2                                       C EINZULESENDE VARIABLE
ND=10                                      C GRÖSSE DER 1.GRUPPE
NA=NM                                      C ANALYSE DER MOMENTENMATRIX UM NULL
NG=2
LABELS
+
'y' 'x'
RANDATA
(2F2.0)
72 1
07 1
52 1
54 1
46 1
50 1
59 1
54 1
58 1
03 1
NO
C MODELLPARAMETER
C ANZAHL DER Y
MX=1                                       C ANZAHL DER X (=GRUPPIERUNGSVARIABLE)
META=1                                     C ANZAHL DER ETA
NAXI=1                                     C ANZAHL DER KSI
FIXEDX                                     C X WIRD ALS MESSFEHLERFREI ANGENOMMEN
LY=IDENTITY                               C REGRESSIONSMATRIX Y AUF ETA
LX=IDENTITY                               C REGRESSIONSMATRIX X AUF KSI
DE=ZERO                                    C GEWICHTSMATRIX DER LATENTEN ENDOS
GA=FREE                                    C REGRESSIONSMATRIX
PHI=SYMMETRIC/FIXED                      C MDNENTENMATRIX DER EXOS
PSI=DIAGONAL/FREE                        C MDNENTENMATRIX DER GLEICHUNGSEHLER
TE=ZERO                                    C MDNENTENMATRIX DER MESSFEHLER 0.ENDOS
TD=ZERO
DU SE TV PC RS SS TO
***** T - TEST FUER UNABH. STICHPROBEN *****C
**      2.GRUPPE                                  **C
*****C
DA                                          C DATENPARAMETER
ND=10
LABELS
+
'y' 'x'
RANDATA
(2F2.0)
75 1
06 1
55 1
01 1
55 1
03 1
57 1
54 1
59 1
06 1
NO
C MODELLPARAMETER
C X ALS MESSFEHLERFREI
LY=IN                                     C LY GLEICHT INVARIANT (WIE IN GRUPPE 1)
DE=IN                                     C BETA GLEICHT INVARIANT
GA=PS                                     C PATTERN UND STARTWERTE WIE IN GRUPPE 1
PS=PS                                     C PATTERN UND STARTWERTE WIE IN GRUPPE 1
TE=IN
EQUAL SAHMA(1,1) SAHMA(2,1)
DU SE TV PC RS SS TO

```

Tabelle 4.1: LISREL-Steuerkarten für den t-Test

4.1.3. Die einfaktorielle Varianzanalyse mit festen Effekten

Zur Betrachtung der einfaktoriellen Varianzanalyse müssen wir die Überlegungen von Abschnitt 4.1.1. auf den Fall mehrerer Gruppen $g > 2$ generalisieren. Wir wollen das gleich an einem Beispiel mit $g = 3$ und $N = N_1 + N_2 + N_3$ demonstrieren.

$$(4.9) \quad \begin{array}{c} \text{volles Modell} \\ \left[\begin{array}{c} 3 \\ 5 \\ 6 \\ 3 \\ 3 \\ \hline 10 \\ 8 \\ 5 \\ 7 \\ 5 \\ \hline 13 \\ 11 \\ 7 \\ 11 \\ 8 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} \beta_{1v} \\ \beta_{2v} \\ \beta_{3v} \end{bmatrix} + \varepsilon_v \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{reduziertes Modell} \\ \left[\begin{array}{c} 3 \\ 5 \\ 6 \\ 3 \\ 3 \\ \hline 10 \\ 8 \\ 5 \\ 7 \\ 5 \\ \hline 13 \\ 11 \\ 7 \\ 11 \\ 8 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \hline 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \hline 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right] \cdot \beta_r + \varepsilon_r$$

Als Schätzungen erhalten wir für

$$(4.10) \quad \begin{array}{ll} \text{das volle Modell} & \text{das reduzierte Modell} \\ \hat{\beta}_{1v} = 4.0 & \hat{\beta}_r = 7.0 \\ \hat{\beta}_{2v} = 7.0 & \\ \hat{\beta}_{3v} = 10.0 & \\ \hat{Q}_{\Omega} = \sum_{i=1}^N \hat{\varepsilon}_{iv}^2 = 50.0 & \hat{Q}_{\Omega_0} = \sum_{i=1}^N \hat{\varepsilon}_{ir}^2 = 140.0 \\ R_{\Omega}^2 = 0.64 & R_{\Omega_0}^2 = 0.00 \end{array}$$

Verwenden wir die Prüfgröße (2.20), erhalten wir

$$(4.11) \quad F_{\text{empirisch}} = \frac{(140.0 - 50.0)/(3 - 1)}{50.0/(15 - 3)} = 10.8 \quad (p=.0024)$$

und bei Prüfgröße (2.21)

$$(4.12) \quad F_{\text{empirisch}} = \frac{(0.64 - 0.00)/(3 - 1)}{(1.00 - 0.64)/(15 - 3)} = 10.8$$

Da dieser Wert größer ist als der kritische Wert $F(0.05, df_1=2, df_2=15) = 3.88$ verwerfen wir H_0 .

4.1.4. Die einfaktorielles Varianzanalyse als LISREL-Modell

Das volle LISREL-Modell entspricht (4.4) (s.a. Figur 4.1). Da es die gruppenspezifischen Momentenmatrizen perfekt anpaßt und daher das über alle Gruppen summierte Anpassungschiquadrat Null ist, ist es zum Hypothesentesten wertlos. Wir können daher direkt zum eingeschränkten Modell übergehen.

Das eingeschränkte Modell repräsentiert die Nullhypothese $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$. Die drei Stichproben entstammen entweder drei Populationen mit gemeinsamen Mittelwert oder einer Population. Auf das LISREL-Modell (4.4) übertragen lautet die Nullhypothese $H_0: \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3$.

Die Schätzungen sind

$$(4.13) \quad \hat{\gamma}_1 = \hat{\gamma}_2 = \hat{\gamma}_3 = 6.622; \quad \hat{\psi}_1 = 8.47; \quad \hat{\psi}_2 = 3.74; \\ \hat{\psi}_3 = 16.21$$

Das über alle Gruppen aufsummierte Anpassungschiquadrat (3.24) ist

$$(4.14) \quad \chi^2_{\text{empirisch}} = 11.69 \text{ mit } df = v_0 = 6 - 4 = 2 \\ \text{und } (p = .003)$$

Auffällig ist, daß der gemeinsame Parameter γ_g mit seinem Schätzwert $\hat{\gamma}_g = 6.622$ von $\hat{\beta}_r = 7.00$ abweicht. Der Grund hierfür liegt darin, daß wir stillschweigend die Homoskedastizitätsannahme (2.1b) fallengelassen haben und $\hat{\gamma}_g$ keine Schätzung nach (2.4) ist. Das können wir jedoch leicht nachholen und die Annahme (2.1b) in das LISREL-Modell aufnehmen. Wir legen dem Modell (4.4) zusätzlich die Bedingung auf, daß die gruppenspezifischen Momente der Fehlervariablen ζ_g identisch sind. Dann sind die Schätzer

$$\hat{\gamma}_1 = \hat{\gamma}_2 = \hat{\gamma}_3 = 7.000; \quad \hat{\psi}_1 = \hat{\psi}_2 = \hat{\psi}_3 = 9.332 \\ (p = .009)$$

$$\text{mit dem Anpassungschiquadrat } \chi^2_{\text{emp}} = 13.52 \text{ (} p = .009 \text{)} \\ \text{und mit } df = v_0 = 6 - 2 = 4$$

Auch hier verwerfen wir die Nullhypothese.

Fassen wir das Modell mit 4 Parametern (kein Homoskedastizitätsannahme) als volles Modell im Sinne von (3.23) auf und das Modell mit 2 Parametern (mit Homoskedastizitätsannahme) als reduziertes Modell im Sinne von (3.24) ergibt die Chiquadratdifferenz (3.25) einen Likelihoodquotiententest.

$$(4.15) \quad \chi^2_0 - \chi^2_1 = 13.52 - 11.69 = 1.83 = \chi^2_{\text{diff}} \\ \text{mit } df = df_0 - df_1 = 4 - 2 = 2 = df_{\text{diff}}$$

Da dieses χ^2_{diff} nicht signifikant ist, kann man die Homoskedastizitätsannahme beibehalten und (4.15) als bestimmendes Ergebnis wählen. Die Unterschiede in den Signifikanzniveaus ergeben sich durch Rundungsfehler. Man erkennt die Identität von (4.15) und (4.9) daran, daß man aus den Schätzungen der Fehlermomente die Quadratsumme der Residuen in (4.10) replizieren kann.

$$(4.16) \quad Q_{\Omega_0}^{\wedge} = N_1 \cdot \hat{\psi}_1 + N_2 \cdot \hat{\psi}_2 + N_3 \cdot \hat{\psi}_3 = 140.0$$

4.1.5. Der t-Test für abhängige Stichproben im ALM

Werden zu zwei Zeitpunkten an einer Gruppe von Personen Daten erhoben und will man die zwei Mittelwerte testen, ist der übliche t-Test nicht mehr statthaft. Die Annahmen (2.1b) und (2.1c) lassen sich wegen der (meist vorliegenden) Korreliertheit der Zeitpunkte nicht mehr halten. Die Korreliertheit kommt durch ein gewisses "Beharrungsvermögen" der Daten zustande: Personen mit Werten über dem Durchschnitt tendieren dazu, auch bei der zweiten Messung überdurchschnittliche Werte zu zeigen. Die gleiche Datenträgheit ist auch für unterdurchschnittliche Werte zu vermuten.

Aus diesen Gründen wurde der t-Test für abhängige Stichproben entwickelt. Bei seiner Anwendung werden die Meßwertdifferenzen pro Meßwertträger i berechnet.

$$(4.17) \quad d_i = x_{i2} - x_{i1}$$

Als Prüfgröße wird der t-Bruch

$$(4.18) \quad t_{\text{empirisch}} = \frac{\bar{d} \sqrt{N}}{s_d}$$

mit \bar{d} = Stichprobenmittelwert der d_i
 s_d = Standardabweichung der d_i

herangezogen. Für die Daten in Tabelle 4.2 gibt MORRISON (1976², S. 143) einen t-Wert von $t_{\text{empirisch}} = -3.39$ an.

| Patient | Placebo | Medikament | Differenz | Prüfgröße |
|---------|---------|------------|-----------|---|
| 1 | 27 | 19 | - 8 | $t = \frac{-7 \cdot \sqrt{6}}{5.060}$ $= - 3.39$ |
| 2 | 21 | 16 | - 5 | |
| 3 | 25 | 14 | -11 | |
| 4 | 13 | 15 | 2 | |
| 5 | 17 | 5 | -12 | |
| 6 | 11 | 3 | - 8 | |

$$\bar{y}_1=19 \quad \bar{y}_2=12$$

Tabelle 4.2: Daten für t-Test (MORRISON, 1976², S. 143)

Eine theoretisch fundierte Analyse im Rahmen des ALM hätte nach Abschnitt 2.2 zu erfolgen. Das volle Modell würde in der Diktion des multivariaten Modells (2.22a) lauten:

$$(4.19) \quad \begin{bmatrix} 27 & 19 \\ 21 & 16 \\ 25 & 14 \\ 13 & 15 \\ 17 & 5 \\ 11 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} \\ \epsilon_{41} & \epsilon_{42} \\ \epsilon_{51} & \epsilon_{52} \\ \epsilon_{61} & \epsilon_{62} \end{bmatrix}$$

Das reduzierte Modell würde aus dem vollen Modell durch die Restriktion $\beta = \beta_1 = \beta_2$ abgeleitet.

Es ist aber in diesem speziellen Fall möglich, den t-Test im Rahmen des univariaten ALM darzustellen. Wenn man die Meßwerte durch einen linearen Ansatz mit personenunabhängigen Zeiteffekten und zeitunabhängigen Personeneffekten erklären kann, ist $\sum_{p=1}^p$ in (2.22) von besonderer Struktur (MÖBUS & NAGL, 1983, S. 347). Es gilt die Homoskedastizität über die Zeitpunkte hinweg und alle Zeitpunkte korrelieren untereinander gleich hoch ("compound symmetry"). Unter diesen Voraussetzungen können wir für den t-Test das univariate Modell (2.1) formulieren. Durch die Einführung von Personenvektoren $(p_1 - p_6)$ sind die Fehler im Gegensatz zu (4.19) unabhängig, obwohl die Zeitpunkte korrelieren dürfen. Das volle Modell lautet für unsere Daten:

Die Inverse wird aber in (3.12) - (3.19) benötigt.

Wir wollen statt dessen den t-Test als Spezialfall des Wachstumskurvenmodell 2.3 formulieren. Das volle Modell lautet nach (2.27):

$$(4.22) \quad \begin{matrix} & t_1 & t_2 \\ 1 & \begin{bmatrix} 27 & 19 \\ 21 & 16 \\ 25 & 14 \\ 13 & 15 \\ 17 & 5 \\ 11 & 3 \end{bmatrix} \\ 2 & \\ 3 & \\ 4 & \\ 5 & \\ 6 & \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_{1v} & \beta_{2v} \end{bmatrix} \cdot \begin{matrix} t_1 & t_2 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{11v} & \epsilon_{12v} \\ \epsilon_{21v} & \epsilon_{22v} \\ \epsilon_{31v} & \epsilon_{32v} \\ \epsilon_{41v} & \epsilon_{42v} \\ \epsilon_{51v} & \epsilon_{52v} \\ \epsilon_{61v} & \epsilon_{62v} \end{bmatrix}$$

Ein Vergleich mit (2.28) zeigt, daß β_{1v} die Größe des konstanten Einflusses widerspiegelt. β_{2v} ist ein Maß für den linearen Trend.

Das reduzierte Modell enthält die Nullhypothese $H_0: \beta_2 = 0$. Wir nehmen an, daß es keinen linearen Anstieg oder Abfall der Mittelwerte gibt. Das Modell ist

$$(4.23) \quad \begin{matrix} 1 & \begin{bmatrix} 27 & 19 \\ 21 & 16 \\ 25 & 14 \\ 13 & 15 \\ 17 & 5 \\ 11 & 3 \end{bmatrix} \\ 2 & \\ 3 & \\ 4 & \\ 5 & \\ 6 & \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \beta_r \cdot \begin{matrix} t_1 & t_2 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{11r} & \epsilon_{12r} \\ \epsilon_{21r} & \epsilon_{22r} \\ \epsilon_{31r} & \epsilon_{32r} \\ \epsilon_{41r} & \epsilon_{42r} \\ \epsilon_{51r} & \epsilon_{52r} \\ \epsilon_{61r} & \epsilon_{62r} \end{bmatrix}$$

Wir haben jetzt keine volle Trendspezifikation mehr, so daß K' nicht mehr wie in (4.22) invertierbar ist. Es muß der Schätzer von KHATRI (2.34) herangezogen werden.

4.1.6. Der t-Test für abhängige Stichproben als LISREL-Modell

Wir verwenden die Formulierung des Wachstumskurvenmodell von Tabelle 3.2 (2. Zeile) in einer leicht abgewandelten Form, um die Flexibilität des LISREL-Modells zu demonstrieren. Die Abwandlung betrifft die Fehlerspezifikation, hat aber keinen Einfluß auf die Hypothesentestung.

Das volle Modell ist, da es die Daten perfekt anpaßt,

für die Hypothesentestung eigentlich überflüssig. Wir stellen es aber aus didaktischen Gründen dar. Seine Strukturgleichung ist

$$(4.24a) \quad \underline{\eta} = \underline{\Gamma} \underline{\xi} \quad \text{bzw.} \quad \begin{matrix} t_1 \\ t_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{1v} \\ \gamma_{2v} \end{bmatrix} \cdot \xi$$

Das Meßmodell der unabhängigen Variablen ist

$$(4.24b) \quad x = \xi = 1 \quad [x] = [\xi] = [1]$$

und das der abhängigen Variablen läßt sich formulieren als

$$(4.24c) \quad \underline{y} = \underline{\Lambda}_y \underline{\eta} + \underline{\varepsilon} \quad \begin{matrix} t_1 \\ t_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}$$

Den LISREL-Parametern γ_{1v} , γ_{2v} in (4.24a) entsprechen in (4.22) die Parameter β_{1v} und β_{2v} .

Fassen wir \underline{y} und die Scheinvariable $x = 1$ zu einem Vektor zusammen, entspricht dieser dem Vektor \underline{z}^* in (3.20). Berechnen wir dann die Momentenmatrix für das Modell (4.24) erhalten wir die gegenüber Tabelle 3.2 (zweite Zeile) leicht veränderte Form

$$(4.25) \quad \underline{\Sigma}_{zz^*} = \left[\begin{array}{c|c} \frac{\underline{\Lambda}_y \underline{\Gamma} \underline{\Phi} \underline{\Gamma}' \underline{\Lambda}_y'}{\underline{\Lambda}_y} & \frac{\underline{\Lambda}_y \underline{\Gamma} \underline{\Phi}}{\underline{\Lambda}_y} \\ \hline \underline{\Phi} \underline{\Gamma}' \underline{\Lambda}_y' & \underline{\Phi} \end{array} \right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c} (\gamma_1 + \gamma_2)^2 + \theta_{\varepsilon 11} & (\gamma_1 + \gamma_2)(\gamma_1 + 2\gamma_2) + \theta_{\varepsilon 21} & \gamma_1 + \gamma_2 \\ \hline (\gamma_1 + \gamma_2)(\gamma_1 + 2\gamma_2) + \theta_{\varepsilon 21} & (\gamma_1 + 2\gamma_2)^2 + \theta_{\varepsilon 22} & \gamma_1 + 2\gamma_2 \\ \hline \gamma_1 + \gamma_2 & \gamma_1 + 2\gamma_2 & 1 \end{array} \right]$$

Die zu analysierende Stichprobenmomentenmatrix ist

$$(4.26) \quad \underline{S} = \left[\begin{array}{cc|c} 395.667 & 252.000 & 19.00 = \bar{Y}_1 \\ 252.000 & 178.000 & 12.00 = \bar{Y}_2 \\ \hline 19.000 & 12.000 & 1.00 \end{array} \right]$$

Die Schätzer sind $\hat{\gamma}_{1v} = 26.00$, $\hat{\gamma}_{2v} = -7.00$. Die Schätzungen für die Fehlermomente geben wir aus Platzgründen nicht an. Aus $\hat{\gamma}_{1v}$ und $\hat{\gamma}_{2v}$ lassen sich mit Hilfe von der 3. Zeile bzw. 3. Spalte von (4.25) die Mittelwerte in Tabelle 4.2 leicht zurückrechnen. Das Anpassungschi-
quadrat ist Null.

Im reduzierten Modell wird $\gamma_2 = 0$ gesetzt. Die Momentenmatrix vereinfacht sich unter der Nullhypothese zu

$$(4.27) \quad \underline{S}_{zz'} = \left[\begin{array}{cc|c} \gamma_1^2 + \theta_{\epsilon 11} & \gamma_1^2 + \theta_{\epsilon 21} & \gamma_1 \\ \hline \gamma_1^2 + \theta_{\epsilon 21} & \gamma_1^2 + \theta_{\epsilon 22} & \gamma_1 \\ \hline \gamma_1 & \gamma_2 & 1 \end{array} \right]$$

Die Schätzwerte sind $\hat{\gamma}_{1r} = 15.50$ (=Gesamtmittelwert), sowie $\theta_{\epsilon 11r} = 46.90$, $\theta_{\epsilon 21r} = 11.75$ und $\theta_{\epsilon 22r} = 46.92$.

Das Anpassungschi-
quadrat (3.24) ist

$$\chi^2_{\text{empirisch}} = 5.96 \text{ mit } df = 5 - 4 \quad (p = 0.015)$$

Das Wahrscheinlichkeitsniveau ist damit bis auf Rundungsfehler identisch mit dem von (4.21).

Die Steuerkarten für den LISREL-Computerlauf sind in Tabelle 4.3 zusammengestellt. Es wird gleich das reduzierte Modell geschätzt.

```

***** T-TEST FUER ABHAENGIGE STICHPROBEN *****C
***** EINGESCHRAENKTES MODELL *****C
** EINGESCHRAENKTES MODELL **C
** DATEN NACH MDRRISON, 1976, 142FF. **C
*****C
DA C DATENPARAMETER
NG=1 C GRUPPENZAHL
NI=3 C ZAHL DER EINGABEVARIABLEN
NO=6 C ZAHL DER PERSONEN
MA=MM
LABELS
*
'Y1' 'Y2' 'X'
RAWDATA
(2F3.0,F2.0)
11 3 1
27 19 1
21 16 1
25 14 1
13 15 1
17 5 1
NO C MODELLPARAMETER
NY=2 C ZAHL DER Y
NX=1 C ZAHL DER X
NEYA=2 C ZAHL DER ETA
NKSI=1 C ZAHL DER KSI
FIXED C X WIRD ALS MESSFEHLERFREI ANGENOMMEN
LY=FULL, FIXED C REGRESSIONSMATRIX Y AUF ETA
LX=IDENTITY C REGRESSIONSMATRIX X AUF KSI
BE=ZERO C GEWICHTSMATRIX DER LATENTEN ENDS
GA=FREE C REGRESSIONSMATRIX
PHI=FIXED C MOMENTENMATRIX DER EXOS
PSI=DIAGDYNAL,ZERO C GLEICHUNGSFEHLER
TE=SYMMETRIC,FREE C MOMENTENMATRIX DER MESSF.D.ENDOS
TD=ZERO
MATRIX LY
(2F2.0)
1 1
1 2
MATRIX TE
(F2.0)
10
8
12
PATTERN GAMMA
(I1)
1
0
START 0.0 GA(2,1)
OU SE TV PC RS SS TO

```

Tabelle 4.3: Steuerkarten für t-Test (abhängige Stichproben)

4.1.7. Einfach multivariate Wachstumskurvenanalyse

Wird eine inhaltliche Variable zu mehreren Zeitpunkten erhoben und wird die Korreliertheit der Zeitpunkte berücksichtigt, spricht man von der einfachen multivariaten Analyse. Werden dagegen zu jedem Zeitpunkt mehrere abhängige Variable erhoben, liegt ein echt multivariates Design vor.

Wir wollen hier einen Datensatz reanalysieren, der von JÖRESKOG (1979) mit einem Spezialprogramm zur Testung linearer Hypothesen im ALM untersucht wurde. Wir legen das Modell (2.27) zu Grunde (s.a. Figur 2.2). Im Gegensatz zu Figur 2.2 haben wir für K' nicht die VANDERMODE-Matrix sondern eine Matrix mit orthogonalen Polynomen gewählt. Diese Matrix weicht von derjenigen ab, die JÖRESKOG (1979) angegeben hat. Das volle Modell findet sich in Tabelle 4.4. Das reduzierte Modell kann je nach Nullhypothese verschiedene Gestalt annehmen:

| | |
|-----------------------|--|
| keine Zeiteffekte: | $\beta_{11} = \beta_{12} = \beta_{13} = \beta_{21} = \beta_{22} = \beta_{23} = 0$ |
| keine Gruppeneffekte: | $\beta_{10} = \beta_{20}, \beta_{11} = \beta_{21}, \dots, \beta_{13} = \beta_{23}$ |
| keine Interaktion: | $\beta_{11} = \beta_{21}, \beta_{12} = \beta_{22}, \beta_{13} = \beta_{23}$ |

4.1.8. Einfach multivariate Wachstumskurvenanalyse als LISREL-Modell

Wir formulieren für jede der Gruppen ein Modell (2. Zeile von Tabelle 3.2)

$$(4.28) \quad \eta_g = \Gamma_g x_g + \xi_g \quad (g = 1, \dots, G; \text{Gruppenindex})$$
$$y_g = \Lambda_{yg} \eta_g$$

oder ausführlich für das volle Modell

$$\begin{bmatrix} n_{1g} \\ n_{2g} \\ n_{3g} \\ n_{4g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{1g} \\ \gamma_{2g} \\ \gamma_{3g} \\ \gamma_{4g} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_g = 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \zeta_{1g} \\ \zeta_{2g} \\ \zeta_{3g} \\ \zeta_{4g} \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{konst. Einflu\ss} \\ \text{linearer "} \\ \text{quadrat. "} \\ \text{kubisch. "} \end{matrix}$$

(4.29)

$$\begin{matrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{matrix} \begin{bmatrix} y_{1g} \\ y_{2g} \\ y_{3g} \\ y_{4g} \end{bmatrix} = \begin{matrix} \text{konst.} \\ \text{lin.} \\ \text{quadr.} \\ \text{kub.} \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_{1g} \\ n_{2g} \\ n_{3g} \\ n_{4g} \end{bmatrix}$$

$$N_{YT} = N_{YG} \cdot G_{BR} \cdot R_{T1}^k + N_{Y\zeta}$$

| | t_1 | t_2 | t_3 | t_4 | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| 1 | 21 | 20 | 21.5 | 23 | 1 0 |
| 2 | 21 | 21.5 | 24 | 25.5 | 1 0 |
| 3 | 20.5 | 24 | 24.5 | 26 | 1 0 |
| 4 | 23.5 | 24.5 | 25 | 26.5 | 1 0 |
| 5 | 21.5 | 23 | 22.5 | 23.5 | 1 0 |
| 6 | 20 | 21 | 21 | 22.5 | 1 0 |
| 7 | 21.5 | 22.5 | 23 | 25 | 1 0 |
| 8 | 23 | 23 | 23.5 | 24 | 1 0 |
| 9 | 20 | 21 | 22 | 21.5 | 1 0 |
| 10 | 16.5 | 19 | 19 | 19.5 | 1 0 |
| 11 | 24.5 | 25 | 28 | 28 | 1 0 |
| ----- | | | | | |
| 12 | 26 | 25 | 29 | 31 | 0 1 |
| 13 | 21.5 | 22.5 | 23 | 26.5 | 0 1 |
| 14 | 23 | 22.5 | 24 | 27.5 | 0 1 |
| 15 | 25.5 | 27.5 | 26.5 | 27 | 0 1 |
| 16 | 20 | 23.5 | 22.5 | 26 | 0 1 |
| 17 | 24.5 | 25.5 | 27 | 28.5 | 0 1 |
| 18 | 22 | 22 | 24.5 | 26.5 | 0 1 |
| 19 | 24 | 21.5 | 24.5 | 25.5 | 0 1 |
| 20 | 23 | 20.5 | 31 | 26 | 0 1 |
| 21 | 27.5 | 28 | 31 | 31.5 | 0 1 |
| 22 | 23 | 23 | 23.5 | 25 | 0 1 |
| 23 | 21.5 | 23.5 | 24 | 28 | 0 1 |
| 24 | 17 | 24.5 | 26 | 29.5 | 0 1 |
| 25 | 22.5 | 25.5 | 25.5 | 26 | 0 1 |
| 26 | 23 | 24.5 | 26 | 30 | 0 1 |
| 27 | 22 | 21.5 | 23.5 | 25 | 0 1 |

$y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4 \quad x_1 \quad x_2$

| | | | | |
|------------------|----------|----------|----------|----------|
| konst. Einflu\ss | b_{10} | b_{11} | b_{12} | b_{13} |
| | b_{20} | b_{21} | b_{22} | b_{23} |

| | t_1 | t_2 | t_3 | t_4 |
|---|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | -3 | -1 | 1 | 3 |
| 3 | 1 | -1 | -1 | 1 |
| 4 | -1 | 3 | -3 | 1 |

$+ N_{Y\zeta}$

Tabelle 4.4: volles Modell für einfach multivariates Wachstumskurvenmodell ($G=2, T=4, M=1$)

Die zu analysierenden Stichprobenmomentenmatrizen \underline{S}_1 und \underline{S}_2 sind ausschnitthaft mit ihrer letzten Zeile wiedergegeben. Nach (3.20a) müssen hier die Stichprobenmittelwerte stehen.

$$(4.30) \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} \cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \hline x & 21.2 & 22.2 & 23.1 & 24.1 & 1.0 \end{array} = \underline{S}_1 \\ \begin{array}{cccc|c} \cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \hline x & 22.9 & 23.8 & 25.7 & 27.5 & 1.0 \end{array} = \underline{S}_2 \\ \begin{array}{cccc|c} Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 & x \end{array} \end{array}$$

Von den Schätzungen geben wir nur die Schätzer für die Matrizen $\underline{\Gamma}_1$ und $\underline{\Gamma}_2$ an. Die Trendgewichte sind für Gruppe 1 $\hat{\gamma}_{11} = 22.65$, $\hat{\gamma}_{21} = 0.48$, $\hat{\gamma}_{31} = -0.01$, $\hat{\gamma}_{41} = 0.02$ und für Gruppe 2 $\hat{\gamma}_{12} = 24.97$, $\hat{\gamma}_{22} = 0.78$, $\hat{\gamma}_{32} = 0.20$, $\hat{\gamma}_{42} = -0.06$. Auch hier ist das Anpassungschiquadrat Null, so daß das Modell zum Hypothesentesten von keinem Wert ist.

Das reduzierte Modell soll mit der Prüfung der Interaktionshypothese "Zeit x Gruppen" vorgestellt werden. Unter der Nullhypothese "keine Interaktion" ist dann $\gamma_{21} = \gamma_{22}$, $\gamma_{31} = \gamma_{32}$, $\gamma_{41} = \gamma_{42}$. Die Schätzungen für die gruppenspezifischen Konstanten sind unter der Nullhypothese $\hat{\gamma}_{11} = 23.2$ und $\hat{\gamma}_{12} = 25.0$. Das Anpassungschiquadrat (3.24) beläuft sich auf

$$(4.31) \quad \chi^2_{\text{empirisch}} = 8.63 \text{ mit } df = 28 - 25 = 3 \text{ (} p=0.035 \text{)}$$

Wir müssen daher die Nullhypothese zurückweisen. Es liegt eine Interaktion vor. Zeiteffekte dürfen nur noch innerhalb jeder Gruppe beschrieben werden. Die Gruppen haben sich signifikant verschieden entwickelt.

Wenn man sich nicht damit zufrieden geben will, daß die Zeitpunkte "irgendwie" korrelieren ($\underline{\Psi}$ ist frei), sondern daß eine spezielle Autokorrelationsstruktur vorliegt, muß das LISREL-Modell abgeändert werden (s. z.B. MÖBUS & NAGL, 1983, S. 382 und SÖRBOM & JÖRESKOG, in

diesem Buch).

Die LISREL-Steuerkarten finden sich in Tabelle 4.5.

```
*****EINFACH MULTIVARIATE WACHSTUMSKURVENANALYSE*****C
*****C
**      REDUZIERTES MODELL: PRUEFUNG DER INTERAKTIONSHYPOTHESE      **C
**      VOLLSTAENDIGE SPEZIFIKATION DES TRENDS MIT ORTHOGONALEN POLYNOMEN **C
**      DATEN: JORESKOG, STATISTICAL ESTIMATION OF STRUCTURAL MODELS **C
**              IN: NESSELROADE & BALTES (EDS), LONGITUDINAL **C
**              RESEARCH IN THE STUDY OF BEHAVIOR AND **C
**              DEVELOPMENT, 1979, P. 315 **C
*****C
DA      C DATENPARAMETER
      NI=5      C EINZULESENDE VARIABLE
      NO=11     C GROESSE DER 1.GRUPPE
      MA=MM     C ANALYSE DER MOMENTENMATRIX UM NULL
      NG=2
LABELS
*
'Y(T1)' 'Y(T2)' 'Y(T3)' 'Y(T4)' 'X'
RANDATA
(5P5,1)
21.0 20.0 21.5 23.0 1.0
21.0 21.5 24.0 25.5 1.0
20.5 24.0 24.5 26.0 1.0
23.5 24.5 25.0 26.5 1.0
21.5 23.0 22.5 23.5 1.0
20.0 21.0 21.0 22.5 1.0
21.5 22.5 23.0 25.0 1.0
23.0 23.0 23.5 24.0 1.0
20.0 21.0 22.0 21.5 1.0
18.5 19.0 19.0 19.5 1.0
24.5 25.0 28.0 28.0 1.0
MO      C MODELLPARAMETER
      NY=4      C ANZAHL DER Y (=ZEITPUNKTE)
      NX=1      C ANZAHL DER X (=DUMMYVARIABLE)
      NETA=4     C KONST., LIN., QUADR. UND KUB.TREND
      NKSI=1     C ANZAHL DER KSI (=X)
      FIXEDX    C X WIRD ALS MESSFENLERFREI ANGENOMMEN
      LY=FULL, FIXED C REGRESSIONSMATRIX Y(T) AUF ETA
      LX=IDENTITY C REGRESSIONSMATRIX X AUF KSI
      BE=ZERO    C GEWICHTSMATRIX DER LATENTEN ENDOS
      GA=FULL, FIXED C GEWICHTSMATRIX DER LATENTEN EXOS
      PHI=SYMMETRIC, FIXED C MOMENTENMATRIX DER EXOS
      PSI=FREE   C MATRIX DER GLEICHUNGSFEHLER
      TE=ZERO    C MOMENTENMATRIX DER MESSFEHLER D.ENDOS
      TD=ZERO
```

Tabelle 4.5a: 1. Teil der Steuerkarten für einfach multivariate Wachstumskurvenanalyse

Fortsetzung Tabelle 4.5b: 2. Teil der Steuerkarten für
einfach multivariate Wachstumskurvenanalyse

```

PATTERN GAMMA
(11)
1
1
1
1
MATRIX LY
(4F2.0)
1-3 1-1
1-1-1 3
1 1-1-3
1 3 1 1
MATRIX GAMMA
(F1.0)
1
1
1
1
OU SE TV PC RS
WACHSTUMSKURVENANALYSE 2.GRUPPE
DA
NO=16
LABELS
*
'Y(T1)' 'Y(T2)' 'Y(T3)' 'Y(T4)' 'X'
RANDATA
(SFS,1)
26.0 25.0 29.0 31.0 1.0
21.5 22.5 23.0 26.5 1.0
23.0 22.5 24.0 27.5 1.0
25.5 27.5 26.5 27.0 1.0
20.0 23.5 22.5 26.0 1.0
24.5 25.5 27.0 28.5 1.0
22.0 22.0 24.5 26.5 1.0
24.0 21.5 24.5 25.5 1.0
23.0 20.5 31.0 26.0 1.0
27.5 28.0 31.0 31.5 1.0
23.0 23.0 23.5 25.0 1.0
21.5 23.5 24.0 28.0 1.0
17.0 24.5 26.0 29.5 1.0
22.5 25.5 25.5 26.0 1.0
23.0 24.5 26.0 30.0 1.0
22.0 21.5 23.5 25.0 1.0
NO
FIXEDX
LY=IN
BE=IN
GA=PS
PS=PS
TE=IN
EQUAL GAMMA(1,2,1) GAMMA(2,2,1)
EQUAL GAMMA(1,3,1) GAMMA(2,3,1)
EQUAL GAMMA(1,4,1) GAMMA(2,4,1)
OU SE TV PC RS
C DATENPARAMETER
C MODELLPARAMETER
C
C LY BLEIBT INVARIANT (WIE IN GRUPPE 1)
C GAMMA BLEIBT INVARIANT
C PATTERN UND STARTWERTE WIE GRUPPE 1
C PATTERN UND STARTWERTE WIE GRUPPE 1

```

4.1.9. Echt multivariate Wachstumskurvenanalyse als LISREL-Modell

Werden zu jedem Zeitpunkt mehrere inhaltliche Variable erhoben, liegt eine echt multivariate Fragestellung vor. Das ALM wurde schon in Figur 2.2 beispielhaft vorgestellt. Das entsprechende LISREL-Modell erhält man, wenn man in (4.28) entsprechende Erweiterungen vornimmt. Das auf M inhaltliche Variable erweiterte gruppenspezifische LISREL-Modell sieht folgendermaßen aus (mit konstanter Matrix $\underline{\Lambda}_{yg} = \underline{\Lambda}_y$)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \underline{n}_{1g} \\ \vdots \\ \underline{n}_{mg} \\ \vdots \\ \underline{n}_{Mg} \end{array} \\ \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \underline{\Gamma}_{1g} \\ \vdots \\ \underline{\Gamma}_{mg} \\ \vdots \\ \underline{\Gamma}_{Mg} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \underline{x}_g \end{array} + \begin{array}{c} \begin{array}{c} \underline{\zeta}_{1g} \\ \vdots \\ \underline{\zeta}_{mg} \\ \vdots \\ \underline{\zeta}_{Mg} \end{array} \end{array}$$

g=Gruppenindex
m=Variablenindex

(4.32)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \underline{y}_{1g} \\ \vdots \\ \underline{y}_{mg} \\ \vdots \\ \underline{y}_{Mg} \end{array} \\ \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \underline{\Lambda}_y & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \underline{\Lambda}_y & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \underline{\Lambda}_y \end{array} \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{c} \underline{n}_{1g} \\ \vdots \\ \underline{n}_{mg} \\ \vdots \\ \underline{n}_{Mg} \end{array} \end{array}$$

(4.32) besteht jetzt im Gegensatz zu (4.28) aus Blockmatrizen.

4.2. Beispiele im Rahmen der multivariaten Zeitreihenanalyse

Wir klammern hier die univariate Zeitreihenanalyse und die multivariate Panelanalyse aus. Dafür gibt es mehrere Gründe. So wird die univariate Zeitreihenanalyse und ihre

multiple Varianten "Transfermodell" und "Interventionsmodell" gewöhnlich im Rahmen der BOX & JENKINS - BOX & TIAO - Methodologie behandelt (s. z.B. MÖBUS & NAGL, 1983; MÖBUS, GÖRICKE & KRÖH, 1983). Trotz seiner Vielseitigkeit würde der Einsatz von LISREL in diesem Bereich einschränkend sein und keinen Vorteil bringen.

Anders ist die Situation bei der multivariaten Panelanalyse. Hier ist der Einsatz von LISREL sinnvoll. In MÖBUS & NAGL (1983, S. 384-395, 443-450) finden sich eine Reihe von Beispielen hierfür.

Die multivariate Zeitreihenanalyse weist im Rahmen der ARIMA-Modelle von BOX & JENKINS eine Reihe von Problemen auf, die es verhindern, daß die Modelle routinemäßig einsetzbar sind. Daher ist es erfreulich, wenn man mit LISREL zumindest autoregressive Modelle schätzen kann. Da autoregressive Modelle besser zu interpretieren sind als moving-average-Modelle und letztere unter bestimmten Bedingungen in erstere überführbar sind, klingt die Beschränkung auf autoregressive Modelle härter als sie faktisch ist.

4.2.1. Multivariate autoregressive Prozesse

Der einfachste Prozeß ist derjenige 1. Ordnung mit konstantem exogenen Einfluß \underline{b}

$$(4.33) \quad Y_t = \underline{A}Y_{t-1} + \underline{b} + \underline{a}_t \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{E}\{Y_t | Y_{t-1}\} = \underline{A}Y_{t-1} + \underline{b}$$

Ein Prozeß 2. Ordnung mit konstantem Einfluß wäre demnach

$$(4.34) \quad Y_t = \underline{A}Y_{t-1} + \underline{B}Y_{t-2} + \underline{b} + \underline{a}_t$$

(4.33) ist ein Differenzgleichungssystem 1. Ordnung. Das Differenzgleichungssystem (4.34) läßt sich in eines 1. Ordnung überführen.

$$(4.35) \quad \begin{bmatrix} \underline{Y}_t \\ \underline{Y}_{t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} & \underline{b} \\ \underline{I} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{Y}_{t-1} \\ \underline{Y}_{t-2} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{a}_t \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$

Diese Rückführungsmöglichkeit gilt für alle linearen Differenzgleichungssysteme höherer Ordnung. Trotz ihrer linearen Struktur können die Modelle aber durchaus nicht-lineare Zeitreihen abbilden, wie wir weiter unten noch zeigen werden.

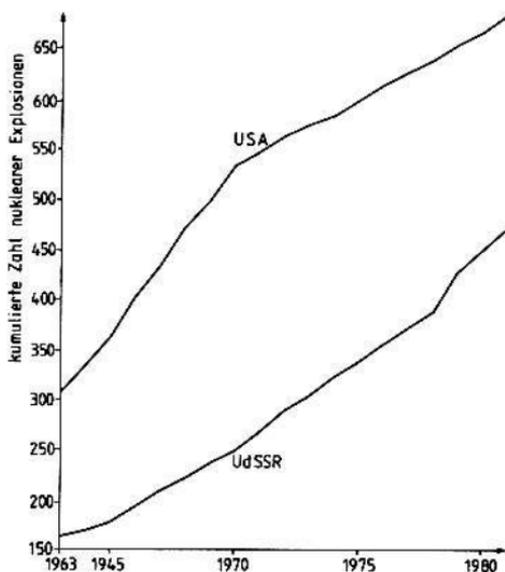
Läßt sich die Beziehung zwischen zeitlich benachbarten Variablenvektoren mit dem Modell (4.33) modellieren, lassen sich die Erwartungswerte durch die Lösung des Differenzgleichungssystems (4.33) bestimmen. Dabei erhält man die Lösung durch wiederholtes Einsetzen von (4.33)

$$(4.36) \quad \mathcal{E}\{\underline{Y}_t | \underline{Y}_0\} = \underbrace{\underline{A}^t \underline{Y}_0}_{\text{endogener Anteil ohne exogene Anteile}} + \underbrace{\begin{bmatrix} t-1 \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{t-1} \underline{A}^i \end{bmatrix} \underline{b}}_{\text{exogener Einfluß}}$$

Die Eigenwerte der Matrix \underline{A} geben Auskunft über das Verhalten des Systems. Ist ein Eigenwert vom Betrage größer als 1, ist das System (4.33) instabil: die Variablen wachsen ohne Grenze. Sind dagegen alle Eigenwerte von \underline{A} vom Betrage kleiner als 1, ist das System asymptotisch stabil: es strebt einer Ruhelage zu, wenn sich die äußeren Einflüsse nicht ändern. Sind die Eigenwerte konjugiert komplex, treten Oszillationen in den bedingten Erwartungswerten (4.36) auf (s. MÖBUS & NAGL, 1983, S. 428).

4.2.2. Multivariate autoregressive Prozesse als LISREL-Modell

Zur Demonstration wählen wir das Beispiel "Wettrüsten". Hierzu gibt es eine umfangreiche Literatur (HUCKFELD et al. 1982; OLNICK, 1975; RAPOPORT, 1960, 1980; RICHARDSON, 1939, 1948, 1960a, b; SAATY, 1968; TAAGEPERA et al., 1975; VOEVODSKY, 1969). Als Daten wählen wir keine "weichen" Einstellungsmessungen sondern "harte" Zahlen: Zahl der kumulierten Atombombenexplosionen 1963-1982 (Quelle: Stockholm International Peace Research Institute) (s.a. Figur 4.2). Als volles Modell spezifizieren wir ein Differenzengleichungsmodell 2. Ordnung. Das LISREL-Modell findet sich in Tabelle 3.2 (3. Zeile) und Tabelle 4.5.



Figur 4.2: kumulierte Zahl nuklearer Explosionen 1963-1982 für die USA und UdSSR

Strukturgleichung $\eta = B\eta + \zeta$
 Meßmodell $y = I\eta$ ($y_7 = 1 =$ Scheinvariable zur Modellierung des exogenen Einflusses)

(4.37)

| | | | | | | | | | | |
|------------------|----------|-------|-------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|----------|-----------|
| USA y_{1t} | η_1 | 0 | 0 | β_{13} | β_{14} | 0 | 0 | β_{17} | η_1 | ζ_1 |
| UdSSR y_{2t} | η_2 | 0 | 0 | β_{23} | β_{24} | 0 | 0 | β_{27} | η_2 | ζ_2 |
| ----- | ----- | ----- | ----- | ----- | ----- | ----- | ----- | ----- | ----- | ----- |
| USA y_{1t-1} | η_3 | 0 | 0 | 0 | 0 | β_{35} | β_{36} | β_{37} | η_3 | ζ_3 |
| UdSSR y_{2t-1} | η_4 | 0 | 0 | 0 | 0 | β_{45} | β_{46} | β_{47} | η_4 | ζ_4 |
| ----- | ----- | ----- | ----- | ----- | ----- | ----- | ----- | ----- | ----- | ----- |
| USA y_{1t-2} | η_5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | η_5 | ζ_5 |
| UdSSR y_{2t-2} | η_6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | η_6 | ζ_6 |
| ----- | ----- | ----- | ----- | ----- | ----- | ----- | ----- | ----- | ----- | ----- |
| Konst. $y_7 = 1$ | η_7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | η_7 | ζ_7 |

Tabelle 4.5: Differenzengleichungsmodell 2. Ordnung

Das Modell in Tabelle 4.5 weicht in einigen Punkten in seiner Schreibweise von (4.35) ab. Der Grund hierfür liegt in der Form der LISREL-Strukturgleichung. Links und rechts vom Gleichheitszeichen müssen die gleichen η stehen. Zu beachten ist daher, daß nicht nur $y_i = \eta_i$ ist, sondern daß $\zeta_5 = y_{1t-2}$, $\zeta_6 = y_{2t-2}$ und $\zeta_7 = y_7 = 1$ gesetzt wurden.

In die Gestaltung der Fehlermomentenmatrix (4.38) gingen folgende Überlegungen ein. Die Erwartungswerte der Gleichungsfehler $\zeta_1 - \zeta_4$ sollen Null sein (4 Nullen in der 7. Zeile von $\underline{\psi}$). Die Gleichungsfehler $\zeta_1 - \zeta_4$ sollen unabhängig von den Regressoren y_{t-2} sein (8 Nullen in der 5. und 6. Zeile von $\underline{\psi}$). Ferner sollen die Schätzer der Produktmomente zwischen $\zeta_5 - \zeta_7$ (rechtes unteres Dreieck von $\underline{\psi}$) durch die entsprechenden Eintragungen in der Stichprobenmomentmatrix s_{55} , s_{65} , s_{66} , s_{75} , s_{76} und s_{77} gebildet werden. Dabei ist $s_{75} = y_{1t-2}$, $s_{76} = y_{2t-2}$ und $s_{77} = 1.0$.

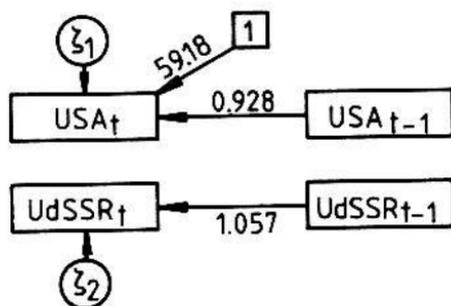


Abbildung 4.3: Pfadmodell für nukleares Wettrüsten auf der Basis kumulierter nuklearer Explosionen

Es fällt auf, daß die Entwicklung der beiden Zeitreihen entkoppelt verläuft. Ferner ist der konstante exogene Einfluß bei der UdSSR nichtsignifikant. Bei den USA dagegen ist dieser exogene Einfluß, der alle Anteile an η_t zusammenfaßt, die nicht durch die Vorgeschichte (η_{t-1}) oder durch Fehler (ζ_t) zu erklären sind, sehr signifikant.

Das Modell produziert ein Anpassungschiquadrat von

$$(4.39) \quad \chi^2_{\text{emp}} = 10.97 \text{ bei } df = 28 - 11 = 17 \quad (p=0.858)$$

Da die rechte untere Ecke von $\underline{\psi}$ nach der Schätzung mit der rechten unteren Ecke von \underline{S} zusammenfällt, könnte man die entsprechenden Parameter in $\underline{\psi}$ auf diesen Werten festhalten und als Konstante behandeln, sodaß sich die Zahl der Freiheitsgrade um 6 auf 23 erhöhen würde. Dann würde das Wahrscheinlichkeitsniveau über $p=0.95$ liegen! Die Anpassung des Modells ist exzellent. Das erkennt man auch daran, daß die größte Abweichung zwischen \underline{S} und $\hat{\underline{S}}$ 449 beträgt, was ganze 0.15 % des betreffenden Stichprobenmoments ist.

Die Steuerkarten des Modells sind in der Tabelle 4.7 aufgelistet.

```

*** BIVAR,AUTOREGR.MODELL 2.ORDNG OHNE VERZOEK,KREUZKORR.: ATOMBOMBENEXPLOS. **C
** DATEN STAMMEN VOM STOCKHOLM INTERNATIONAL PEACE RESEARCH INSTITUTE (SIPRI)**C
** (HRSGB) ATOMWAFFEN IN EUROPA, RUESTUNGSJAHRBUCH 1982/83,REINBECK,ROHOHLT **C
** 1983, S.293 **C
** DATEN FUER 1982 AUS SIPRI: WAFFENEXPORT UND KRIEG, RUESTUNGSJAHRBUCH 4 **C
** REINBECK,ROHOHLT, 1984, S.132/133 **C
** VAR 1 = JAHR **C
** VAR 2 = USA (AKKUMULIERTE ANZAHL NUKLEARER EXPLOSIONEN) **C
** VAR 3 = UDSSR ( ( ( ( ( ( ) ) ) ) ) ) **C
*****
DA C DATENPARAMETER
NI=7 C ANZAHL DER EINZULESENDEN VARIABLEN
NO=18 C ANZAHL DER ZEITPUNKTE
MA=MM
LABELS
*
'USA-2' 'UDSSR-2' 'C-2' 'USA-1' 'UDSSR-1' 'USA' 'UDSSR'
RANDATA
(T11,3F4,0/(T11,2F4,0))
1963 307 164 1
1964 335 170 1
1965 364 179 1
1964 335 170 1
1965 364 179 1
1966 404 194 1
1965 364 179 1
1966 404 194 1
1967 433 209 1
1966 404 194 1
1967 433 209 1
1968 472 222 1
1967 433 209 1
1968 472 222 1
1969 500 237 1
1968 472 222 1
1969 500 237 1
1970 533 249 1
1969 500 237 1
1970 533 249 1
1971 548 268 1
1970 533 249 1
1971 548 268 1
1972 563 290 1
1971 548 268 1
1972 563 290 1
1973 574 304 1
1972 563 290 1
1973 574 304 1
1974 583 323 1
1973 574 304 1
1974 583 323 1
1975 599 338 1

```

Tabelle 4.7a: 1. Teil der Steuerkarten für das bivariate autoregressive Modell "Wettrüsten"

```

1974      583 323  1
1975      599 338  1
1976      614 355  1
1975      599 338  1
1976      614 355  1
1977      626 371  1
1976      614 355  1
1977      626 371  1
1978      638 398  1
1977      626 371  1
1978      638 398  1
1979      654 427  1
1978      638 398  1
1979      654 427  1
1980      668 448  1
1979      654 427  1
1980      668 448  1
1981      683 469  1
1980      668 448  1
1981      683 469  1
1982      700 500  1

```

SELECT

6 7 4 5 1 2 3 /

NO

```

NY=7
NX=0
NETA=7
LY=IDENTITY
BE=FULL, FIXED
GA=ZERO
PSI=SYMMETRIC, FIXED
TE=ZERO

```

C MODELLPARAMETER

C ANZAHL DER Y

C ANZAHL DER X

C ANZAHL DER ETA (=LATENTE ENDOS)

C LY=LAMBDA-Y

C PARAMETERMATRIX DER LAT.ENDOS

C PARAMETERMATRIX DER LAT.EXOS

C KREUZPRODUKTMATRIX D.GLEICHUNGSEHLER

PA BETA

(711)

0010001

0001000

0000101

0000010

0000000

0000000

0000000

0000000

PA PSI

(2811)

1010010001000010000110000111

EQUAL BETA(1,3) BETA(3,5)

EQUAL BETA(1,7) BETA(3,7)

EQUAL BETA(2,4) BETA(4,6)

EQUAL PSI(1,1) PSI(3,3)

EQUAL PSI(2,2) PSI(4,4)

OU SE TV PC RS MI SS TO

Tabelle 4.7b: 2. Teil der Steuerkarten für das bivariate autoregressive Modell "Wettrüsten"

4.2.3. Multivariate zeitkontinuierliche Prozesse

Die in 4.2.1. und 4.2.2. behandelten Modelle sind diskret in der Zeit. Das bedeutet, daß sie Vorhersagen nur für ganz bestimmte Zeitpunkte machen. Ferner sind - was noch weit unangenehmer ist - die Parameter abhängig von der Größe des Beobachtungsintervalls $t - (t-1) = \Delta t$. Diese Nachteile gibt es bei den zeitkontinuierlichen Modellen nicht. Sie stellen zweifelsohne die "Krönung" des Modellbaus dar. Mathematisch werden sie aus Differentialgleichungsmodellen aufgebaut. Als abhängige bzw. zu erklärende Variablen fungieren in den Modellen nicht mehr wie bisher Variablenwerte sondern Änderungsraten der Variablenwerte. Wir wollen hier keine probabilistischen Modelle untersuchen wie etwa WICKENS (1982) und BARTHOLOMEW (1982), sondern beschränken uns auf Fragestellungen, in denen die Variablen unbeschränkt variieren können.

Anwendungen solcher Modelle finden sich außer in den Natur- und Ingenieurwissenschaften auch in der Ökonomie (BERGSTROM, 1976), der Soziologie (ARMINGER, 1976, 1982; BAUGH, 1977; COBB, 1978; DOREIAN & HUMMON, 1977; FARARO, 1978; RAPOPORT, 1980; SORENSON, 1983) und nicht zuletzt in der Psychologie.

So formulierte ABELSON (1965) ein Differentialgleichungs-Modell für Einstellungsveränderungen, SPERLING (1964), SPERLING & SONDHI (1968) und GANZ (1975) für Wahrnehmungstheorien, ANDERSON (1983), ASHBY (1982), McCLELLAND (1979) und RATCLIFF & McKOON (1981) für Theorien der Aktivierungsausbreitung im Langzeitgedächtnis, THOMAS & MARTIN (1976) für Eltern-Kind-Interaktionen, MARKUS & ZAJONC (1977) für das familienkonstellationsabhängige Intelligenzwachstum, MÖBUS & WALLASCH (1977) zur Erfassung von Hirnschädigungen bei Kindern, KUHL & BLANKENSHIP (1979) für Leistungsmotivationsänderungen.

Eine weitere Verbreitung erfuhren die Modelle bei empirischen Untersuchungen wegen der Schwierigkeit bei

der Modellidentifizierung und Parameterschätzung jedoch nicht (s. aber MÖBUS & NAGL, 1983).

Wir wollen hier zeigen, wie man mit LISREL beide Klippen elegant umschiffen kann.

Zunächst wollen wir als Beispiel das Modell von DOREIAN & HUMMON (1976) zur Popularität der drei politischen Kräfte in England vorstellen (s. Tabelle 4.8)

$$(4.40) \quad \dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{B} \underline{u}(t)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dP_R(t)}{dt} \\ \frac{dP_O(t)}{dt} \\ \frac{dP_L(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_R(t) \\ P_O(t) \\ P_L(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} \dots b_{16} \\ b_{21} \dots b_{26} \\ b_{31} \dots b_{36} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{In}(t) \\ \text{Un}(t) \\ \text{BP}(t) \\ \text{BR}(t) \\ \text{Cy}(t) \\ C \end{bmatrix}$$

- mit: R = Regierung, O = Opposition, L = Liberale
P = Popularität
In(t) = Inflationsindex (Preisniveau/Lohnniveau) zu t
Un(t) = Prozentsatz der Arbeitslosen zum Zeitpunkt t
BP(t) = Zahlungsbilanz: (Wert der Exporte - Importe)/Preisniveau zum Zeitpunkt t
BR(t) = Diskontsatz der Bank von England zu t
Cy(t) = Scheinvariable, die den Popularitätsbonus der Opposition widerspiegelt. Cy(t) ist jeweils zwischen zwei Wahlperioden eine umgekehrte U-Funktion
C = Scheinvariable, die für alle Zeitpunkte t den Wert '1' annimmt

Tabelle 4.8: Modell von DOREIAN & HUMMON (1976) zum politischen Klima in Großbritannien

Das System (4.40) ist noch ohne stochastische Komponente. Fügen wir diese hinzu haben wir

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{B} \underline{u}(t) + \underline{\zeta}(t)$$

(4.41) mit $\underline{x}(t)$ = stochastischer multivariater Prozeß
 $\underline{A}, \underline{B}$ = Parametermatrizen
 $\underline{u}(t)$ = Vektor mit nichtstochastischen exogenen Einflüssen
 $\underline{\zeta}(t)$ = Vektor mit stochastischen Störungen (meist wird weißes Rauschen angenommen)

Der Fehlerprozeß $\underline{\zeta}(t)$ ist sehr erratisch und unterscheidet sich damit grundlegend von den Fehlern in den bisher behandelten Modellen (s.a. DAVIS, 1977, S. 108ff). Formal ist die Lösung von (4.41) (s.a. GANDOLFO, 1981, S. 75)

$$\underline{x}(t) = \underline{x}(0)e^{\underline{A}t} + \int_0^t e^{\underline{A}(t-s)} \underline{B} \underline{u}(s) ds + \int_0^t e^{\underline{A}(t-s)} \underline{\zeta}(s) ds$$

deterministischer endogener Anteil + deterministischer exogener Anteil + stochastische Fehlerkomponente

mit $e^{\underline{A}t} = \mathbf{I} - \underline{A}t + \frac{\underline{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\underline{A}^3 t^3}{3!} + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\underline{A}^j t^j}{j!}$

Der Prozeß $\underline{x}(t)$ setzt sich aus drei Komponenten zusammen, deren Einflüsse über die Laufzeit des Prozesses "aufsummiert" (d.h. integriert) werden. Die stochastische Komponente wird durch ein stochastisches Integral gebildet, von dem wir nur annehmen, daß es existiert.

Der kontinuierlich in der Zeit ablaufende Prozess soll jetzt regelmäßig in Zeitintervallen mit Länge $\Delta t = 1$ beobachtet werden. Zusätzlich nehmen wir an, daß die am Intervallanfang beobachtete exogene Variable \underline{u}

sich im Intervall nicht verändert

$$(4.43) \quad \underline{u}(t-s) = \underline{u}(t-1) \quad \text{für } 0 < s \leq 1 .$$

Dann vereinfacht sich (4.42) zu

$$(4.44) \quad \underline{x}(t) = e^{\underline{A}} \underline{x}(t-1) + \left\{ \int_0^1 e^{\underline{A}s} ds \right\} \cdot \underline{B} \underline{u}(t-1) + \underline{\xi}(t)$$

Diese Gleichung läßt sich noch weiter vereinfachen, da für nichtsinguläres \underline{A} folgendes gilt (ATHANS et al., 1974, S. 317)

$$(4.45) \quad \int_0^1 e^{\underline{A}s} ds = \underline{A}^{-1} (e^{\underline{A}} - \underline{I}) .$$

Wir haben dann

$$(4.46) \quad \underline{x}(t) = e^{\underline{A}} \underline{x}(t-1) + \underline{A}^{-1} (e^{\underline{A}} - \underline{I}) \underline{B} \underline{u}(t-1) + \underline{\xi}(t)$$

Letzteres erinnert an eine multivariate Regression, wenn wir schreiben

$$(4.47) \quad \underline{x}(t) = \underline{A}^+ \underline{x}(t-1) + \underline{B}^+ \underline{u}(t-1) + \underline{\xi}(t)$$

$$\text{mit } \underline{A}^+ = e^{\underline{A}} \quad \text{und} \quad \underline{B}^+ = \underline{A}^{-1} (e^{\underline{A}} - \underline{I}) \underline{B}$$

Viele Autoren (u.a. ARMINGER, 1976, 1982; DOREIAN & HUMMON, 1976; COLEMAN, 1971) ließen sich wegen der leichten Schätzbarkeit von (4.47) dazu verführen, \underline{A} durch die Logarithmierung von \underline{A}^+ finden zu wollen. Das führt zu einer Reihe von Problemen, wie SINGER & SPILERMAN (1976) eindrucksvoll bewiesen haben. Der größere Nachteil liegt aber darin, daß wir zwar Hypothesen über \underline{A}^+ nicht aber über \underline{A} im Sinne der Likelihoodquotientenmethode formulieren können, wenn wir diese Rücktransformationstechnik benutzen.

Es gibt zwei Auswege aus diesem Problem. Entweder man

schätzt A und B direkt mittels multivariater Regression. Die Regressionsfläche muß dann mittels numerischer Integrationsmethoden berechnet werden. In MÖBUS & NAGL (1983, S. 442, 450-452) finden sich einige Beispiele. Die andere einfachere Möglichkeit liegt in der linearen diskreten Approximation des Differentialgleichungsmodells. Diese Approximation kann dann mit LISREL geschätzt werden.

Die lineare diskrete Approximation erhalten wir, wenn wir (4.41) über ein Beobachtungsintervall integrieren

$$\int_0^1 \dot{\underline{x}}(s) ds = \underline{A} \int_0^1 \underline{x}(s) ds + \underline{B} \int_0^1 \underline{u}(s) ds + \int_0^1 \underline{\zeta}(s) ds$$

mit: $\int_0^1 \dot{\underline{x}}(s) ds = \underline{x}(s) \Big|_{s=0}^{s=1} = \underline{x}(1) - \underline{x}(0) = \Delta \underline{x}(1)$

Die deterministischen Integrale auf der rechten Seite werden über die Trapezregel approximiert. Es ist z. B.

$$(4.48) \int_0^1 \underline{x}(s) ds \approx \frac{1}{2} \{ \underline{x}(1) + \underline{x}(0) \} = \bar{\underline{x}}(1) = \text{Mittelwertvektor der beiden Messungen}$$

Die diskrete lineare Approximation läßt sich dann schreiben als

$$(4.49) \quad \Delta \underline{x}(t) = \underline{A} \bar{\underline{x}}(t) + \underline{B} \bar{\underline{u}}(t) + \underline{\eta}(t)$$

mit $\underline{\eta}(t) =$ Funktion von $\underline{\zeta}(t)$ und dem durch die Linearisierung verursachten Spezifikationsfehler

Der Koeffizientenvergleich zwischen dem approximativen diskreten Analogon (4.49) und der exakten diskreten Form (4.44) ergibt eine Abschätzung: Die Halbierung des Beobachtungsintervalls führt zu einer Achtelung des Spezifikationsfehlers. Kommen wir nun zu einem Beispiel.

4.2.4. Diskrete lineare Approximation eines stochastischen Differentialgleichungssystems mit LISREL

Das Modell entstammt einer Monte-Carlo-Untersuchung von PHILLIPS (1972). Die Daten sind in Figur 4.4 abgebildet. Das Modell hat die Gleichung

$$(4.50a) \quad \dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{b} \underline{u}(t) + \underline{\zeta}(t)$$

$$(4.50b) \quad \begin{bmatrix} \dot{c}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{k}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha(1-\beta) & 0 \\ \lambda & \lambda(\gamma v - 1) & -\lambda\gamma \\ 0 & \gamma v & -\gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c(t) \\ y(t) \\ k(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot F + \begin{bmatrix} \zeta_1(t) \\ \zeta_2(t) \\ \zeta_3(t) \end{bmatrix}$$

Es ist zweckmäßig, einige Parameter herauszuziehen

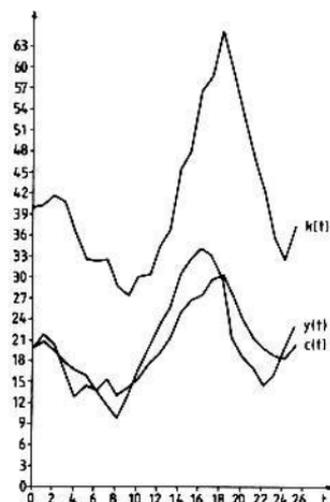
$$(4.51) \quad \begin{bmatrix} \dot{c}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{k}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \cdot \{ (1-\beta) y(t) + F - c(t) \} \\ \lambda \cdot \{ c(t) + k(t) - y(t) \} \\ \gamma \cdot \{ v \cdot y(t) - k(t) \} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \zeta_1(t) \\ \zeta_2(t) \\ \zeta_3(t) \end{bmatrix}$$

Wir erhalten aus (4.51) die diskrete lineare Approximation, wenn wir schreiben

$$(4.52) \quad \begin{bmatrix} \Delta c(t) \\ \Delta y(t) \\ \Delta k(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \cdot \{ (1-\beta) \bar{y}(t) + F - \bar{c}(t) \} \\ \lambda \cdot \{ \bar{c}(t) + \Delta k(t) - \bar{y}(t) \} \\ \gamma \cdot \{ v \cdot \bar{y}(t) - \bar{k}(t) \} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \\ \eta_3(t) \end{bmatrix}$$

Wir müssen jetzt (4.52) in das LISREL-Modell von Tabelle 3.2 (4. Zeile) überführen. Dazu nehmen wir jetzt die Definition der LISREL-Variablen $\eta_1 - \eta_{18}$ und die der LISREL-Fehlervariablen $\zeta_1 - \zeta_3$ vor (s. Tabelle 4.9).

Figur 4.4: Multivariate
Zeitreihe als Stichprobe
des Prozesses (4.50)



| | | |
|---|--|-------------------------|
| $\eta_1 = \alpha \eta_4 + \zeta_1 = \Delta c(t)$ | $\eta_8 = \nu \eta_{10}$ | $\eta_{15} = c(t-1)$ |
| $\eta_2 = \lambda \eta_5 + \zeta_2 = \Delta y(t)$ | $\eta_9 = 0.5 \eta_{12} + 0.5 \eta_{15} = \bar{c}(t)$ | $\eta_{16} = y(t-1)$ |
| $\eta_3 = \gamma \eta_6 + \zeta_3 = \Delta k(t)$ | $\eta_{10} = 0.5 \eta_{13} + 0.5 \eta_{16} = \bar{y}(t)$ | $\eta_{17} = k(t-1)$ |
| $\eta_4 = \eta_7 + \eta_{18} - \eta_9$ | $\eta_{11} = 0.5 \eta_{14} + 0.5 \eta_{17} = \bar{k}(t)$ | $\eta_{18} = F$ |
| $\eta_5 = \eta_9 + \eta_3 - \eta_{10}$ | $\eta_{12} = \eta_1 + \eta_{15} = c(t)$ | $\zeta_1 = \eta_1(t)^*$ |
| $\eta_6 = \eta_8 - \eta_{11}$ | $\eta_{13} = \eta_2 + \eta_{16} = y(t)$ | $\zeta_2 = \eta_2(t)^*$ |
| $\eta_7 = (1-\beta) \eta_{10}$ | $\eta_{14} = \eta_3 + \eta_{17} = k(t)$ | $\zeta_3 = \eta_3(t)^*$ |

die mit * gekennzeichneten Variablen entstammen (4.52) und sind nicht mit den LISREL-Variablen zu verwechseln!

Tabelle 4.9: Definition der LISREL-Variablen zur Modellierung der linearen diskreten Approximation (4.52)

Das entsprechende LISREL-Modell findet sich in Tabelle 4.10. Es weist gegenüber dem von MÖBUS & NAGL (1983, S. 434) zwei entscheidende Verbesserungen auf. Durch Erhöhung der Gleichungszahl von 10 auf 18 können jetzt alle Parameter einzeln geschätzt werden, obwohl sie in (4.50)-(4.52) an einigen Stellen als Produkte auftreten. Die andere Verbesserung liegt im Verzicht auf die Matrix Γ und

$$\text{Meßmodell } \underline{y} = \underline{A} \cdot \underline{y}^n$$

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|----------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $c(t)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $y(t)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $k(t)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $c(t-1)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $y(t-1)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $k(t-1)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| F | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

=

| | |
|----------|--|
| $c(t)$ | |
| $y(t)$ | |
| $k(t)$ | |
| $c(t-1)$ | |
| $y(t-1)$ | |
| $k(t-1)$ | |
| F | |

endogene

Variable

exogene

Variable

| |
|----------|
| n_1 |
| n_2 |
| n_3 |
| n_4 |
| n_5 |
| n_6 |
| \vdots |
| n_{15} |
| n_{16} |
| n_{17} |
| n_{18} |

Gleichungsfehlermatrix \underline{v}

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-----------------------|-------------|-------------|-------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| ζ_1 | ψ_{11} | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| ζ_2 | ψ_{21} | ψ_{22} | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| ζ_3 | ψ_{31} | ψ_{32} | ψ_{33} | | | | | | | | | | | | | | | | |
| ζ_4 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | |
| ζ_5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | |
| \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots |
| \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots |
| $c(t-1) = \zeta_{15}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $y(t-1) = \zeta_{16}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $k(t-1) = \zeta_{17}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $F = \zeta_{18}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Tabelle 4.10b: Meßmodell und Gleichungsfehlermatrix für diskrete lineare Approximation von Differentialgleichungsmodell (4.51)

* (die rechte untere Ecke von \underline{v} wird aus \underline{S} übernommen und dann festgehalten)

Die LISREL-Steuerkarten finden sich in Tabelle 4.12. Zu beachten ist, wie die in MÖBUS & NAGL (1983, S. 431) abgedruckte multivariate Zeitreihe für LISREL angeordnet werden muß. Sie wird in überlappende Intervalle zerlegt.

In Tabelle 4.11 haben wir Schätzungen und die von PHILLIPS angegebenen Parameter gegenüber gestellt.

| Parameter nach PHILLIPS | Schätzung mit LISREL | |
|-------------------------|-------------------------|------------------------------|
| $\alpha = 0.600$ | $\hat{\alpha} = 0.630$ | |
| $\lambda = 4.000$ | $\hat{\lambda} = 3.209$ | |
| $\gamma = 0.400$ | $\hat{\gamma} = 0.406$ | $\chi^2_{\text{emp}} = 4.17$ |
| $\beta = 0.250$ | $\hat{\beta} = 0.236$ | df = 17 |
| $\nu = 2.000$ | $\hat{\nu} = 2.014$ | p = 0.999 |

Tabelle 4.11: Parameterschätzungen mit LISREL für die diskrete lineare Approximation des Systems (4.51)

Auch hier ist die Anpassung exzellent, wie das p von 0.999 beweist. Das LISREL-Modell gestattet es, auf ein Modell 2. Ordnung ausgeweitet zu werden. Vorbild hierzu sollte das Modell in Tabelle 4.5 sein. Leider ließ es LISREL wegen seines Arbeitsspeicherbedarfs nicht zu, ein derartiges Modell zu schätzen. Es ist auch eine Erweiterung des Modells in Richtung meßfehlerbehafteter Indikatoren möglich. Auch hier haben wir ermutigende Ergebnisse erhalten, die wir aus Platzgründen aber nicht mehr berichten können.

5. Schlußbemerkungen

Wir glauben an einer Reihe von Beispielen gezeigt zu haben, daß LISREL ein sehr vielseitiges statistisches Modell ist. Der Anwendungsbereich geht weit über pfad- oder faktorenanalytische Anwendungen hinaus. Im Gegensatz zu den statistischen Methoden in den Paketen BMDP, SAS und SPSS ist das Modell für den Benutzer viel durchsichtiger und daher von größerem heuristischem Wert.

```

*****C
*****C
** PHILLIPS, P.C.B., THE STRUCTURAL ESTIMATION OF A STOCHASTIC DIFFERENTIAL **C
** EQUATION SYSTEM, ECONOMETRICA, VOL.40,1972,1021-1041 **C
** DISKRETE APPROXIMATION MIT L I S R E L **C
** **C
*****C
*****C
DA C DATENPARAMETER
NI=7 C ANZAHL DER EINZULESENDEN VARIABLEN
NO=25 C ANZAHL DER ZEITPUNKTE
HA=MM
LABELS
*
* C-1 " Y-1 " X-1 " F " C " Y " K "
*
RAWDATA
( TS,4F10,6/TS,3F10,6)
20.001465 20.001294 40.002760 5.000000
20.724659 21.873653 40.319084 -2.276806
20.724659 21.873653 40.319084 5.000000
19.500591 20.517932 41.772445 -4.224068
19.500591 20.517932 41.772445 5.000000
17.740573 16.459774 40.902389 -4.760018
17.740573 16.459774 40.902389 5.000000
16.797718 12.794065 36.626464 -3.942855
16.797718 12.794065 36.626464 5.000000
16.304851 14.501026 32.963211 -3.492867
16.304851 14.501026 32.963211 5.000000
13.996612 13.712356 32.426635 -5.308239
13.996612 13.712356 32.426635 5.000000
15.490959 11.987287 32.672866 -1.305653
15.490959 11.987287 32.672866 5.000000
13.092237 9.756517 28.897232 -5.598722
13.092237 9.756517 28.897232 5.000000
14.220060 12.906684 27.340717 -1.872177
14.220060 12.906684 27.340717 5.000000
15.704090 16.940200 30.263877 -1.515970
15.704090 16.940200 30.263877 5.000000
17.718055 17.428257 30.470222 -0.986035
17.718055 17.428257 30.470222 5.000000
19.487106 23.287891 34.520500 -1.230949
19.487106 23.287891 34.520500 5.000000
21.442127 25.636001 37.044532 -1.044979
21.442127 25.636001 37.044532 5.000000
24.951919 30.484500 45.467407 0.509792
24.951919 30.484500 45.467407 5.000000
26.961414 32.732826 48.174156 -0.990505
26.961414 32.732826 48.174156 5.000000
27.625804 34.344078 56.707367 -2.335610
27.625804 34.344078 56.707367 5.000000
29.802745 33.231643 62.022628 -0.823059
29.802745 33.231643 62.022628 5.000000
30.370506 29.752571 65.508667 -2.432239
30.370506 29.752571 65.508667 5.000000
27.389129 21.525676 60.045471 -5.981377
27.389129 21.525676 60.045471 5.000000
24.136940 18.777145 52.820404 -6.252189
24.136940 18.777145 52.820404 5.000000
21.597133 17.251140 47.556259 -5.539807
21.597133 17.251140 47.556259 5.000000
20.041355 14.616481 42.308754 -4.555778
20.041355 14.616481 42.308754 5.000000
18.967193 16.165267 35.948036 -6.076162
18.967193 16.165267 35.948036 5.000000
18.595157 19.830234 32.583084 -3.372036
18.595157 19.830234 32.583084 5.000000
20.269153 23.141529 37.360000 -1.326004

```

Tabelle 4.12a : 1. Teil der Steuerkarten für lineare Approximation eines Differentialgleichungsmodells

Claus Möbus
und Wolfgang Schneider (Hrsg.)

Strukturmodelle für Längsschnittdaten und Zeitreihen

LISREL, Pfad- und Varianzanalysen

Mit Beiträgen von H.-P. Bäumer, P.M. Bentler, K.G. Jöreskog,
J.-B. Lohmöller, C. Möbus, K. Opwis, M. Sieber,
D. Sörbom, W. Schneider, Ch. Schulte-Cloos, B. Treiber

Verlag Hans Huber
Bern Stuttgart Toronto

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

*Strukturmodelle für Längsschnittdaten und
Zeitreihen: LISREL, Pfad- und Varianzanalysen/*

Claus Möbus u. Wolfgang Schneider (Hrsg.)

Mit Beitr. von P. Bäumer . . . - 1. Aufl. -

Bern; Stuttgart; Toronto: Huber, 1986.

(Methoden der Psychologie; Bd. 5)

ISBN 3-456-81330-9

NE: Möbus, Claus [Hrsg.]; Bäumer, Hans Peter

[Mitverf.]; GT

1. Auflage 1986

© 1986 Verlag Hans Huber Bern
Druck: Lang Druck AG, Liebfeld-Bern
Printed in Switzerland

Methoden der Psychologie
Herausgeber: Kurt Pawlik

Band 5

Claus Möbus
und Wolfgang Schneider (Hrsg.)

Strukturmodelle für Längsschnittdaten und Zeitreihen

LISREL, Pfad- und Varianzanalyse

Verlag Hans Huber

Der Begriff «Methoden» der Psychologie wird in dieser Reihe in seiner heute üblichen weiteren Bedeutung verstanden und – hinausgehend über Statistik und Datenanalyse – auf die Gesamtheit der Verfahren zur Planung, Durchführung und Auswertung systematischer Verfahren der psychologischen Beobachtung, Analyse und Intervention bezogen.

Fragen der Veränderungsmessung werden heute nicht nur in der Wirtschaftswissenschaft sondern auch in der Psychologie und Soziologie intensiv diskutiert. Wichtige Anwendungsbereiche sind z. B. die psychologische Therapieforschung, die Untersuchung pädagogisch-psychologischer Intervention und die Längsschnittanalyse entwicklungspsychologischer Daten. In diesem Band werden neue Strukturmodelle (LISREL VI, PLS, Bentler-Ansatz) zur Auswertung von Meßwiederholungsplänen vorgestellt und an Anwendungsbeispielen aus den genannten Forschungsberichten verglichen. Speziell zu LISREL VI wird erstmals eine deutschsprachige Programmbeschreibung gegeben.

Interessenten: Psychologen, Pädagogen, Soziologen, Wirtschaftswissenschaftler, Mediziner

Verlag Hans Huber, Bern Stuttgart Toronto