

Aus dem Psychologischen Institut der Universität Heidelberg

Bemerkungen zur Skalierung interindividueller Urteilsdifferenzen:

**Simulation des INDSCAL-Modells von CARROLL & CHANG
mit der „Points-of-View“-Analyse von TUCKER & MESSICK**

Von

Claus Möbus

Mit 4 Abbildungen

(Angenommen am 4. April 1975)

Résumés

Auf der Basis einer neuen nonmetrischen multidimensionalen Skalierungsmethode, die Un/Ähnlichkeitsinformationen mehrerer Skalen *simultan* verarbeitet, werden mögliche Verbindungen zwischen der bekannten TUCKER & MESSICK-Analyse und dem CARROLL-CHANG-Modell diskutiert.

On the basis of a new nonmetric multidimensional scaling method which uses dis/similarity information as data input on several scales *simultaneously* we discuss possible connections between the well-known TUCKER & MESSICK-analysis and the CARROLL & CHANG-model.

Einleitung

Die Analyse interindividueller Differenzen in Ähnlichkeitsdaten, wie sie bei der Untersuchung kognitiver Strukturen und impliziter Persönlichkeits-theorien (TUCKER und MESSICK, 1963; AHRENS, 1967; STÄCKER und AHRENS, 1967; AHRENS und STÄCKER, 1970; HOFER, 1969; ROSENBERG und SEDLAK, 1972; SCHNEIDER, 1973) häufig anfallen, wirft Probleme auf, die mit den üblichen Verfahren der metrischen und nonmetrischen Ähnlichkeitsskalierung (KRUSKAL, 1964a, 1964b; GUTTMAN, 1968; JOHNSON, 1973; MÖBUS, 1974, 1976) nicht gelöst werden. Diese klassischen Skalierungsverfahren gehen von Urteilerhomogenität aus. Sie liegt dann vor, wenn die Beurteiler sich in ihrem Urteilverhalten nur durch Zufallsschwankungen unterscheiden. In diesem Falle kann man die individuelle Dateninformation aggregieren (Annahme des

„durchschnittlichen“ Beurteilers). So stellt z.B. die geläufige Mittelwertbildung eine Aggregation *metrischer* (intervall- bzw. ratioskalierter) Individualdaten dar. Die effiziente Aggregation *nonmetrischer* Individualdaten findet sich bei MÖBUS (1976). Beim Bestehen substantieller Personenunterschiede ist eine Informationsaggregation irreführend. Niemand wäre z.B. versucht, zu sagen: „Im Durchschnitt ist der politisch extreme Wähler gemäßigt in seinen politischen Anschauungen“.

Gehen wir von einer intra- und interindividuellen Differenzierung des Urteilsverhaltens aus, sind mehrere Analysemöglichkeiten gegeben (Abb. 1). Wir wollen unsere hier vorliegenden Betrachtungen auf $(1) \times (2)$ bzw. auf $(1.1) \times (2.1)$ konzentrieren.

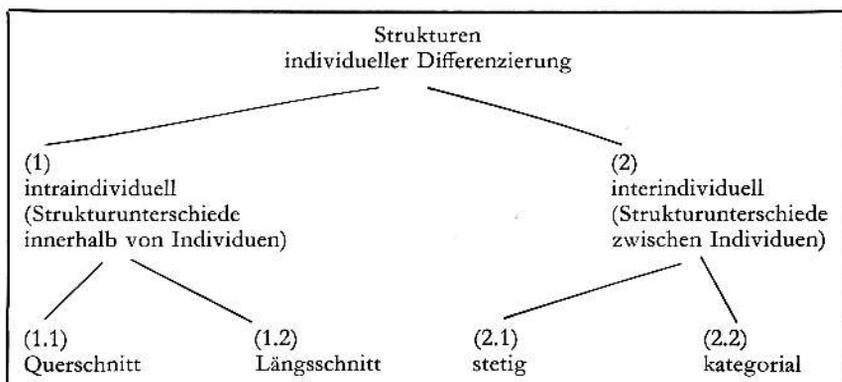


Abb. 1. Aspekte der Strukturierung individueller Differenzierung (AHRENS, 1974, S. 116)

Bei der Verwendung von normalen MDS*-Algorithmen werden zwei Repräsentanzannahmen gemacht:

a) *die allgemeine Repräsentanzannahme*: Bei der MDS (TORGERSON, 1952; MESSICK und ABELSON, 1956; KRUSKAL, 1964a, 1964b; GUTTMAN, 1968; JOHNSON, 1973; MÖBUS, 1974) wird gemäß dem Repräsentationstheorem der fundamentalen und abgeleiteten Messung eine iso- oder homomorphe Abbildung der intraindividuell differenzierenden Urteilsstruktur gesucht.

b) *die spezifische Repräsentanzannahme*: Die theoretische Aussage soll für alle Personen der Stichprobe gelten. Interindividuelle Differenzen werden als Zufallsfehler angesehen und der Fehlervarianz zugeschlagen. Diese Annahme geht einher mit der Vorstellung des „durchschnittlichen Beurteilers“. Unter einem allgemeinpsychologischen Aspekt würde man diese „Fehlervarianz“

* MDS = multidimensionale Skalierung

durch experimentelle oder statistische Kontrolle (mehrfaktorielle Versuchspläne, partielle Korrelation, Kovarianzanalyse) zu reduzieren versuchen. Unter einem differential-psychologischen Aspekt würde man die „Fehlervarianz“ zur Schätzung incidenteller Parameter (vgl. a. FISCHER, 1974, S. 350f.) heranziehen, die dann in Verknüpfung mit den unter dem allgemeinspsychologischen Aspekt gewonnenen strukturellen Parameter zu modelltheoretischen Aussagen benutzt werden. Die Bestimmung struktureller und incidenteller Parameter verknüpft den allgemein- mit dem differentialpsychologischen Aspekt (SIXTL, 1972).

Die Berücksichtigung beider Aspekte führte zur Entwicklung einer Reihe von Modellen der dimensionalen Abbildung inter- und intraindividuelle Wahrnehmungs- und Urteilsdifferenzen (TUCKER und MESSICK, 1963; HORAN, 1969; BLOXOM, 1968, 1972; CARROLL und CHANG, 1970; SCHÖNEMANN, 1972; TUCKER, 1972; HARSHMAN, 1972). Am bekanntesten sind die Modelle von TUCKER und MESSICK (1963) und CARROLL und CHANG (1970) geworden, obwohl beide Modelle (wie auch wir sehen werden) nicht ohne Probleme sind.

Eine detaillierte mathematische Analyse der Modelle von BLOXOM, HORAN sowie CARROLL & CHANG legte SCHULTZ (1971) vor, der auch Angaben über ihre Realisationsklassen machte. Wir werden aber darüber hinaus an einem Datensatz, der *exakt* nach der Modellvorstellung von CARROLL & CHANG („group-stimulus-space“ und „individual weights“) konstruiert ist, demonstrieren, wie mit einer leicht modifizierten TUCKER & MESSICK-„point-of-view“ Analyse und mit einem neuen nonmetrischen Skalierverfahren das CARROLL & CHANG-Modell simuliert werden kann. Wir werden zeigen, wie der CARROLL & CHANG-Algorithmus bei diesem *modellkonformen* Datensatz die interindividuelle Variation unterschätzt. Trotz dieses Erfolgs der TUCKER & MESSICK-Prozedur wird ein in der Literatur scheinbar unbeachtet gebliebener Nachteil der Methode berichtet, der empirische Anwendungen, die über eine reine Personentypologie im Sinne der Q-Faktorenanalyse hinausgeht, fast unmöglich macht.

Beschreibung des Originalverfahrens von TUCKER & MESSICK (1963)

Globale Unähnlichkeiten $x_{(jk)i}$ zwischen den Reizen (j, k) für eine Person i ergeben sich nach TUCKER & MESSICK nach einem Zweistufenmodell. Auf der ersten Stufe werden faktorielle Distanzen (= dimensionsspezifische Proximitäten) $u_{(jk)p}$ über $p = 1, 2, \dots, p, \dots, r$ „points-of-view“ mit den individuellen Gewichten w_{pi} und den „points-of-view“-Gewichten λ_p zu einer Linearkombination verknüpft und bilden globale Distanzschätzungen $x_{(jk)i}$. Der zweiten Stufe entspricht eine Auffaltung der faktoriellen Distanzen $u_{(jk)p}$ pro „point-of-view“ p gemäß der euklidischen Distanzfunktion in m intraindividuelle Skalen. Das individuelle Unähnlichkeitsurteil der Person i auf die Reizkombination (j, k) verläuft unter der Modellannahme so: Alle Personen

in der Stichprobe weisen Gemeinsamkeiten auf, die als „points-of-view“ (= Gesichtspunkte) eines hypothetischen Personenraumes von verschiedenen Personen unterschiedlich gewichtet werden (die für die Person irrelevanten Gesichtspunkte erhalten ein individuelles Gewicht 0.0). Die interindividuelle Gewichtung der „points-of-view“ erlaubt es, die interindividuell unterschiedlichen Unähnlichkeitsurteile darzustellen.

Eine mathematische Kurzdarstellung, die sich nur auf die hier interessierenden Aspekte stützt, schließt sich auf den folgenden Seiten an. Eine ausführlichere und auch semantisch stärker orientierte Darstellung ist bei ÅHRENS (1974) zu finden.

Die $n(n-1)/2$ Proximitätsdaten einer Person werden spaltenweise in die Matrix X eingeordnet. Diese Matrix wird durch eine Matrix \hat{X} im least-squares-Sinn approximiert. Dabei baut sich \hat{X} nach dem Theorem von ECKART und YOUNG (1936) aus drei Matrizen auf. Zum Beweis des ECKART & YOUNG-Theorems sei auf den Artikel von JOHNSON (1963) verwiesen.

$$\hat{X}_r = U_r \Gamma_r W_r \quad (1)$$

wobei: $n(n-1)/2 = p$

$${}_{pp}\hat{P}_r = \hat{X}_r \hat{X}'_r = U_r \Gamma_r^2 U_r$$

$${}_{NN}\hat{P}_r = \hat{X}'_r \hat{X}_r = W_r' \Gamma_r^2 W_r$$

X = Proximitätsmatrix (Unähnlichkeiten)
mit $n(n-1)/2$ Zeilen und N Spalten

n = Anzahl der skalierten Objekte

N = Anzahl der V_{pn}

${}_{pp}P$ = Kreuzproduktmatrix XX' mit $n(n-1)/2$ Zeilen und Spalten. Diese Matrix ist positiv semidefinit

${}_{pp}\hat{P}_r$ = Least-Squares Approximation hierzu, vom Rang $e = r$

${}_{NN}P$ = Kreuzproduktmatrix $X'X$ mit N Zeilen und Spalten. Diese Matrix ist positiv semidefinit

${}_{NN}\hat{P}_r$ = Least-Squares Approximation hierzu, vom Rang $e = r$

U_r = r Eigenvektormatrix, von ${}_{pp}\hat{P}_r$ (Spalten)

W_r = r Eigenvektormatrix, von ${}_{NN}\hat{P}_r$ (Zeilen)

Γ_r^2 = Diagonalmatrix mit r Eigenwerten, von ${}_{pp}\hat{P}_r$ bzw. ${}_{NN}\hat{P}_r$

Zum Ausgleich der Effekte, die auf unterschiedliche Stichprobengrößen zurückzuführen sind, lassen sich folgende Normierungen vornehmen:

$$\begin{aligned} \hat{X}_r &= U_r N^{-1/2} \Gamma_r N^{1/2} W_r \\ &= Y_r \Gamma_r V_r \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{wobei: } Y_r &= U_r N^{-1/2} \\ V_r &= N^{1/2} W_r \end{aligned}$$

Anschließende Rotationen [(z. B. nach dem VARIMAX-Kriterium nach KAISER (1959))] lassen sich ebenfalls vornehmen. Es ist dabei zu beachten, daß der Rotationsalgorithmus die gesamte Transformationsmatrix T errechnet. Die meisten Programme, die nach der Originalveröffentlichung geschrieben wurden, leisten dieses nicht, da die Drehungen immer nur in zweidimensionalen Unterräumen iterativ erfolgen. Ein entsprechender Algorithmus, der die Forderung nach der gesamten Transformationsmatrix T erfüllt, wurde von HORST (1965) vorgeschlagen.

$$\hat{X}_r = U_r N^{-1/2} T^{-1} T_r T N^{1/2} W_r^* . \quad (3)$$

Es gibt von mehreren Autoren Vorschläge (TUCKER und MESSICK, 1963; CLIFF, 1968; CARROLL und CHANG, 1970), je nach inhaltlicher Fragestellung bestimmte Matrixprodukte auf der rechten Seite von (2) zusammenzufassen.

Zur Interpretation der Matrizen schreiben TUCKER und MESSICK (1963, S. 339):

“The elements in W_r^* represent projections of points corresponding to individuals on unitlength principal vectors of X (and P). The elements in U_r represent projections of points corresponding to stimulus-pairs on unit-length principal vectors of X . These stimulus-pair projections, when approximately weighted, scaled, and rotated to orientations possibly more appropriate psychologically than the principle-axes position, will constitute measures of distance between pairs of stimuli. There will be at least as many sets of distance measures as there are columns in the U_r matrix, each set being subsequently analyzed by multidimensional scaling procedures.”

Ganz offensichtlich gehen TUCKER und MESSICK davon aus, daß sich aus den individuellen Daten r verschiedene „Points-of-View“ extrahieren lassen, die ihrerseits multidimensionale Strukturen repräsentieren. Über die Interdependenz und über partielle Identität dieser Strukturen werden keine Aussagen gemacht. Es wird nur angenommen, daß ein Individuum sein in den Daten geäußertes Urteil nach einem mit einem Linearmodell darstellbaren Prozeß aus den verschiedenen „Points-of-View“ kombiniert.

Dieser Ansatz wurde besonders von ROSS (1966) kritisiert. Seine Kritik zielt darauf ab, daß Personen, die einfache „Points-of-View“ „besitzen“, durch deren Kombination eine wesentlich komplexere Datenstruktur zeigen als zu erwarten wäre. ROSS' Kritik gipfelt in dem Satz (1966, S. 31):

“The first thing to notice is that if this rule of combination is followed without restriction, subjects may produce both distance vectors which specify spaces much more complex than any of the point of view bases and distance vectors which are not compatible with any metric configurations at all.”

* $N^{1/2} = \text{diag} (1/\sqrt{N}) = \text{Diagonalmatrix}$

In einer späteren Veröffentlichung gibt TUCKER (1972) der Kritik von ROSS recht, wenn er schreibt (1972, S. 26):

“A defect in the TUCKER-MESSICK (1963) model for individual differences in multidimensional scaling was pointed out by ROSS (1966). This defect resulted from non-linear relations between the use of the ECKARDT-YOUNG resolution for analysis of individual differences in interpoint distances and the multidimensional scaling model.”

Das INDSICAL-Modell von CARROLL & CHANG

VON CARROLL und CHANG (1970) wurde dann ein neues Modell, das auf Arbeiten von HORAN (1969) und BLOXOM (1968) basiert, vorgeschlagen.

Wesentliche Neuerung ist die Annahme eines „psychologischen Reizraumes“, der *allen* Individuen mit unterschiedlichen individuellen Gewichtungen der Dimensionen *gemeinsam* ist. Dadurch wird das Problem des Zusammenhangs der verschiedenen „Points-of-View“ vermieden, obwohl das Konzept von TUCKER und MESSICK in diesem *interindividuellen* Differenzmodell der multidimensionalen *Scalierung* (INDSCAL) als Sonderfall enthalten ist. Die individuellen psychologischen Räume leiten sich aus dem gemeinsamen Raum ab, obwohl es durchaus denkbar ist, daß durch entsprechende Nullgewichtung bestimmter Dimensionen zwei individuelle Räume völlig verschieden sind, da sie auf verschiedenen Dimensionen (Skalen) basieren. Ein Nachteil am INDSICAL-Modell ist seine Beschränkung auf relativ kleine Vpn-Zahlen, was durch den *nonlinearen iterativen least squares* Algorithmus (NILES) von WOLD (1966) bedingt ist. NILES dient im INDSICAL der Parameterschätzung.

Bei der Diskussion des INDSICAL-Modells zeigen CARROLL und CHANG eine Verknüpfung zwischen dem INDSICAL-Modell und einer modifizierten TUCKER-MESSICK-Analyse auf, so daß zumindest strukturelle Ähnlichkeit zwischen beiden Modellen besteht.

Nach CARROLL und CHANG hängt die empirische Proximität s zwischen j und k bei der Vp i über eine monoton abfallende Funktion L mit der euklidischen Distanz $d(j, k)_i$ zusammen:

$$s(j, k)_i = L(d(j, k)_i).$$

Die individuelle Distanz zwischen j und k läßt sich schreiben als:

$$d(j, k)_i^2 = \sum_{t=1}^r w_{it} (x_{jt} - x_{kt})^2 \quad (4)$$

bzw. als Skalarprodukt

$$d(j, k)_i^2 = u'_{jk} w_i \quad (5)$$

wobei: u'_{jk} = jk -ter Zeilenvektor mit den Elementen
 $[u'^2_{jk1}, \dots, u'^2_{jkt}, \dots, u'^2_{jkr}]$
 dimensionsspezifische Distanzquadrate $(x_{jt} - x_{kt})^2 = u'^2_{jkt}$
 w_i = i -ter Spaltenvektor mit den dimensionsspezifischen
 Gewichten der $V_p i$.

Die Matrix der Distanzquadrate D^2 ist dann als Matrixprodukt darstellbar:

$$\hat{D}_r^2 = U_r^2 \Gamma_r W_r. \quad (6)$$

Es sollte vor allem der kleine aber wichtige Unterschied zur TUCKER-MESSICK-Linear kombination (1) auffallen. Dort wird die Matrix der *Distanzen* linear aus den dimensionsspezifischen Distanzen u_{jkt} kombiniert

wobei hier: U_r^2 = Matrix mit Zeilenvektoren x'_{jk} spaltennormiert auf
 Einheitslänge
 \hat{D}_r^2 = Least-squares Approximation der Dissimilarities-
 quadratmatrix
 Γ_r = Dimensionsgewichtungsmatrix
 W_r = Gewichtsmatrix mit N Spaltenvektoren w_i

CARROLL und CHANG (1970, S. 304) schreiben:

“This shows that if, in fact, the model we propose holds, the „subject space“ determined from this modified TUCKER-MESSICK analysis ought to bear a close resemblance to our subject space.”

CARROLL & CHANG geben aber keinerlei Hinweise, wie der gemeinsame Reizraum zu konstruieren oder abzuleiten ist. Genau an diesem Punkt setzt unser Vorschlag an, die modifizierte TUCKER & MESSICK-Analyse so auszubauen, daß ihr Vorteil der Analysierbarkeit großer Datenmengen ausgeschöpft werden kann, bestehende Programme weiter benutzbar bleiben und unter noch weiter zu untersuchenden Bedingungen Ergebnisse resultieren, die der CARROLL-CHANG-Struktur entsprechen.

Als erstes muß die empirische Proximitätsmatrix X elementweise quadriert werden, um die Matrix D^2 zu erhalten. Dann erfolgen die üblichen Berechnungen nach den Vorschriften der TUCKER & MESSICK-Analyse, die uns die Gewichtsmatrix W die Skalengewichtsmatrix Γ liefert. Diese Ergebnisse brauchen nicht weiter verarbeitet zu werden. Aus der Matrix U_r^2 müssen wir nun die allen Personen gemeinsame Struktur erstellen. Zu diesem Zweck wollen wir ein nonmetrisches multidimensionales Skalierungsverfahren vorschlagen, das nicht nur eine metrische Konfiguration in einem MINKOWSKY-Raum erstellt, sondern darüberhinaus die *Orientierung der Konfiguration* in dem System der Achsen des TUCKER-MESSICK-Modells festlegt.

Müßte man die Orientierung der Konfiguration nicht festlegen, könnte man einfach die Zeilensummen von U_r^2 als Distanzquadrate bzw. als Proximitäten nehmen und nonmetrisch skalieren. Auch in diesem Fall erhielte man die gemeinsame Reizstruktur, wenn auch ohne Beziehung zu den Personengewichten.

Es ist hier zu beachten, daß die aus der Konfiguration auf die — in der TUCKER & MESSICK-Analyse gewonnenen — Skalenachsen (früher als „points-of-view“ bezeichnet) projizierten spezifischen „Distanzen“ (bzw. faktorielle „Distanzen“) oder „Distanzquadrate“ in monotoner Beziehung zu den Eintragungen in der Matrix U_r^2 stehen müssen. Ist diese Beziehung hergestellt, ist damit auch gleichzeitig die Orientierung der Konfiguration, soweit sie auf nonmetrischem Wege festlegbar ist, bestimmt. Es ist unerläßlich, ein nonmetrisches Verfahren zu verwenden, weil die TUCKER-MESSICK-Prozedur wegen ihrer unzulänglichen mathematischen Formulierung (unbeschränktes least-squares Problem) negative Eintragungen (= faktorielle „Distanzen“) $u_{(jk)p}$ produziert. Darüber hinaus gehorchen die Eintragungen innerhalb einer Spalte p der Matrix U_r^2 (also: innerhalb eines „point-of-view“) auch den anderen Axiomen einer Metrik nicht, so daß nur eine nonmetrische Behandlung und Skalierung erfolgen kann.

Für die neue nonmetrische multidimensionale Skalierung dimensionspezifischer Proximitäten (oder hier: faktorieller „Distanzquadrate“) schlagen wir folgendes Stressmaß vor, das zu minimieren gilt:

$$S_p = \frac{\sum_{IJR < KLS} \delta_{ijr, kls} |d_{ijr} - d_{kls}|^p}{\sum_{IJR < KLS} \delta_{ijr, kls} |d_{ijr} - d_{kls}|^p + \sum_{IJR < KLS} \varepsilon_{ijr, kls} |d_{ijr} - d_{kls}|^p} \quad (7)$$

$$= \min! \quad \text{wobei: } p = 1$$

S ist das Stressmaß für die Erstellung einer allen Individuen *gemeinsamen* Reizstruktur auf der Basis der *modifizierten* TUCKER & MESSICK-Analyse.

Dieses Stressmaß garantiert nicht nur die Erstellung einer Reizkonfiguration, sondern darüber hinaus deren Orientierung (bis auf Seitenvertauschung) im Raum der r Proximitätsskalen („points-of-view“). Die Minimierung erfolgt unter der Nebenbedingung:

$$\sum x^2 = 1 \quad (= \text{Normierung der Konfiguration}) \quad (8)$$

$$\text{wobei: } IJR = (r-1)(n-1) \cdot n/2 + [(i-2)(i-1)/2 + j]$$

$$KLS = (s-1)(n-1) \cdot n/2 + [(k-2)(k-1)/2 + l]$$

Durch die Ungleichung $IJR < KLS$ wird gewährleistet, daß nicht mehrere Vergleiche in der Matrix U_r^2 doppelt erfolgen.

δ	ε	wenn	$(u_{ijr} - u_{kls})$	und	$(d_{ijr} - d_{kls})$
0	1		> 0		> 0
0	0		> 0		$= 0$
1	0		> 0		< 0
PRIMARY (SECONDARY)					
0(1)	0(0)		$= 0$		> 0
0	0		$= 0$		$= 0$
0(1)	0(0)		$= 0$		< 0
1	0		< 0		> 0
0	0		< 0		$= 0$
0	1		< 0		< 0

und: u_{ijr} = Eintragung in der ij -ten Zeile und r -ten Spalte von U_r^2
 faktorielles „Distanzquadrat“ bzw. dimensions-spezifisches dissimilarity-Quadrat zwischen Reiz i und j auf Skala r

d_{ijr} = dimensionsspezifische Distanz zwischen Punkt i und Punkt j auf der Skala r : $|x_{ir} - x_{jr}|$

$\delta = 1$, wenn eine Inversion auftritt

$\varepsilon = 1$, wenn eine Proversion auftritt

PRIMARY = getiete \tilde{d} führen nicht zu getieten d

SECONDARY = getiete \tilde{d} sollen zu getieten d führen

Will man S_p (für $p = 1$) verbal charakterisieren, kann man sagen, daß es die Proportion gewichteter Inversionen darstellt. Eine Inversion tritt dann auf, wenn die Rangordnung der Modellvorhersage $d_{ijr} > d_{kls}$ durch die Daten nicht bestätigt wird: $u_{ijr} < u_{kls}$. Unser Stress bietet den Vorteil, daß die Rangisomorphie zwischen Daten und Modell besser ist als bei den Stressmaßen der KRUSKAL- und GUTTMAN-Tradition (MÖBUS, 1976). Es wäre natürlich aber auch möglich, unsere Zielsetzung in herkömmlichen Stressmaßen zu formulieren. Jedoch wäre unserer Ansicht nach nur die erhöhte Rechenzeit, die die Minimierung von S_1 erfordert, ein Argument hierfür. Man kann S_p sehr einfach modifizieren, so daß es differenzierbar wird und mit numerischen Standardverfahren minimiert werden kann. Hierzu wird $p = 2$ gesetzt. Die Rangisomorphie wird aber dadurch schlechter.

Wir wollen noch die Beziehungen der verschiedenen Stressmaße mit den bekannten Rangkorrelationskoeffizienten von KENDALL und GOODMAN & KRUSKAL (ties und PRIMARY approach) darstellen:

p	S_p	$1 - 2S_p$
0	Proportion der Inversionen	KENDALL's τ (keine ties) GOODMAN und KRUSKAL's τ (ties und PRIMARY approach)
1	S_1 (unser Stress)	nonmetrisches τ
2	S_2 (L_2 -Approximation) (in jedem Punkt differenzierbar)	

Es empfiehlt sich, die Matrix U_r^2 (spaltennormiert auf 1) für die Skalierung zu benutzen und nicht die mit Γ gewichtete Matrix $U_r^2\Gamma$, weil durch die Gewichtung die Matrixelemente zwischen den Spalten nicht mehr verflochten sind. Unter Verflechtung verstehen wir, daß die Elemente in Spalten links kleiner als Elemente in Spalten rechts sein können. Eine nonmetrische Skalierung führt aber dann zu degenerierten Lösungen, wenn alle Elemente links größer als alle Elemente rechts sind (s. a. Tabelle 1).

Tabelle 1

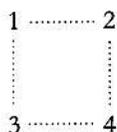
*Beispiel für Nichtverflechtung und Verflechtung
der Spalten der Matrix U^2*

nicht verflochten		verflochten	
8	5	1	3
7	2	7	2
8	1	9	1
9	7	5	8

Es können negative Eintragungen in U_r^2 auftreten. Solche „Dissimilarities“ werden mit Berücksichtigung des Vorzeichens behandelt. Eine dissimilarity von -8 ist kleiner als eine von -2 oder $+4$. Im folgenden wollen wir zwei Datenbeispiele geben. Das erste soll die Präzision der Skalierung beweisen. Das zweite geht von fiktiven Daten aus, die *exakt* nach den Modellvorstellungen von CARROLL und CHANG konstruiert sind: Annahme eines „group stimulus spaces“ und individueller Gewichtungen der einzelnen Skalen.

1. Numerisches Beispiel

Ausgehend von einem Einheitsquadrat:



geben wir die nichtsymmetrische rechteckige Dissimilaritymatrix U_r^2 an (Tabelle 2 links). Die Skalierung führt zur Konfiguration X (s. Tabelle 2 rechts)

Tabelle 2

Dimensionsspezifische Dissimilaritymatrix U_r^2			Koordinatenmatrix X (<i>SECONDARY</i> approach)		
	I	II		I	II
2-1	1.0	0.0	1	0.30233	-0.30232
3-1	0.0	1.0	2	-0.30233	-0.30233
3-2	1.0	1.0	3	0.30233	0.30233
4-1	1.0	1.0	4	-0.30233	0.30232
4-2	0.0	1.0			
4-3	1.0	0.0			
			Stress (absolute Diskrepanzen) = 0.00297		
			Relationsverletzungen = 51.5151%		
			Rangkorrelation zwischen Dissim/Dist = 0.8193		

Man sieht, daß die Anpassung perfekt ist. Es bleibt jedoch die Frage offen, ob diese Skalierung auch dann gangbar ist, wenn nicht so viele Datentypen vorliegen und der PRIMARY APPROACH gewählt wird. Ist die Zahl der Datenrelationen ausreichend, eine nichtdegenerierte Lösung zu fixieren?

Diese Frage läßt sich a priori nicht entscheiden, weil sie vom Grad der Verflechtung der Spalten von U_r^2 abhängt. Sind die Spalten nicht verflochten, wie es die Regel ist, wenn man mit dimensionsgewichteten Matrizen arbeitet, lassen sich nur die Zeilensummen von U_r^2 nonmetrisch skalieren. Man erhält zwar die allen Personen gemeinsame Konfiguration, nicht jedoch deren Orientierung im „Point-of-view“-Raum. Wir haben zur Demonstration dieses Sachverhalts ein weiteres numerisches Beispiel konstruiert, das *modellkonform* mit den Vorstellungen von CARROLL-CHANG ist. Es wird ein „group stimulus“ space mit interindividuell verschiedenen Dimensionsgewichten angenommen, d. h. den Personen kann die Vorstellung eines allen gemeinsamen Urteilsraums mit Urteilsaspekten — jedoch interindividuell verschieden gewichtet — zugeordnet werden.

2. Numerisches Beispiel

Wir wählen eine gemeinsame Reizkonfiguration mit interindividueller Gewichtung der Dimensionen. Da die Daten nach den Modellvorstellungen von CARROLL und CHANG konstruiert sind, ist es interessant zu erfahren, wie sich die modifizierte TUCKER & MESSICK-Analyse und der INDSICAL-Algo-

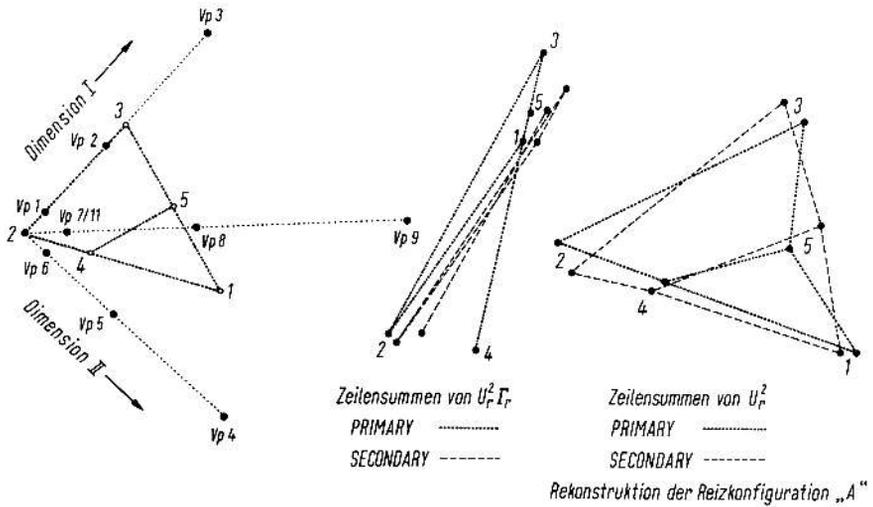


Abb. 2. Ausgangskonfiguration mit „Vpn-Standpunkten“, Reizkonfiguration „A“ (links), nonmetrische Skalierungen der globalen Distanzen [= Zeilensummen von U_r^2 (rechts) und der Matrix $U_r^2 T_r$ (Mitte)]

rithmus von CARROLL & CHANG verhalten. Wir sind dabei von der Konfiguration in Abb. 2 ausgegangen. Aus dieser Konfiguration haben wir dann die interindividuellen Unähnlichkeitsschätzungen in Tab. 3 konstruiert. Diese „Daten“ werden dann nach der modifizierten TUCKER & MESSICK-Analyse verrechnet. Die Ergebnisse sind in Tab. 5 dargestellt. Eine Skalierung der Zeilensummen von U_r^2 (= globale „Distanzquadrate“ = Summe der faktoriellen „Distanzquadrate“ bzw. Summe der dimensionsspezifischen Proximitäten) und der Zeilensummen der Matrix $U_r^2 T_r$ sind in Abb. 2 dargestellt. Natürlich ergibt die Skalierung der Zeilensummen keine im „points-of-view“-Raum fixierte Konfiguration. Die durch Skalierung gewonnene Reizkonfiguration in Abb. 2 (rechts) läßt sich also orthogonal rotieren. Das war für die Ausgangskonfiguration, mit deren Hilfe wir die Daten errechneten, nicht möglich (Abb. 2, links). Die numerischen Skalierungsergebnisse der Zeilensummen von U_r^2 sind in Tabelle 4 zusammengestellt.

Anschließend wurde auf der Basis der Matrix U_r^2 (= Matrix der dimensionsspezifischen Proximitäten) eine nonmetrische Skalierung* mit unserem Stress $S_1(7)$ vorgenommen. Die numerischen Ergebnisse sind in Tabelle 6 zusammengefaßt. Eine graphische Darstellung erfolgt in Abb. 3.

* Zur Minimierung von (7) sei auf MÖBUS (1976) verwiesen.

Tabelle 3. Konstruktion von *modellgemäßen* „Robdaten“ für das *interindividuelle Differenzmodell* zur *Simulation des CARROLL-CHANG-Modells* mit Hilfe der *modifizierten TUCKER-MESSICK-Analyse*

Paar	1.		2.	3.	4.	5.	6. 7. 8. Gewichtsmatrix W_r			9.	10.	11. Vp	
	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	
2-1	9	36	9	36	81	324	144	36	45	180	405	720	45
3-1	4	36	4	16	36	324	144	36	40	160	360	640	40
3-2	25	0	25	100	225	0	0	0	25	100	225	400	25
4-1	4	16	4	16	36	144	64	16	20	80	180	320	20
4-2	1	4	1	4	9	36	16	4	5	20	45	80	5
4-3	16	4	16	64	144	36	16	4	20	80	180	320	20
5-1	1	9	1	4	9	81	36	9	10	40	90	160	10
5-2	16	9	16	64	144	81	36	9	25	100	225	400	25
5-3	1	9	1	4	9	81	36	9	10	40	90	160	10
5-4	9	1	9	36	81	9	4	1	10	40	90	160	10

Matrix U_r^2

Matrix $D^2 = \text{Roh,,daten"}$

(= Unähnlichkeitsschätzungen (Quadrate)
der 11 Vpn auf die 10 Reizpaare)

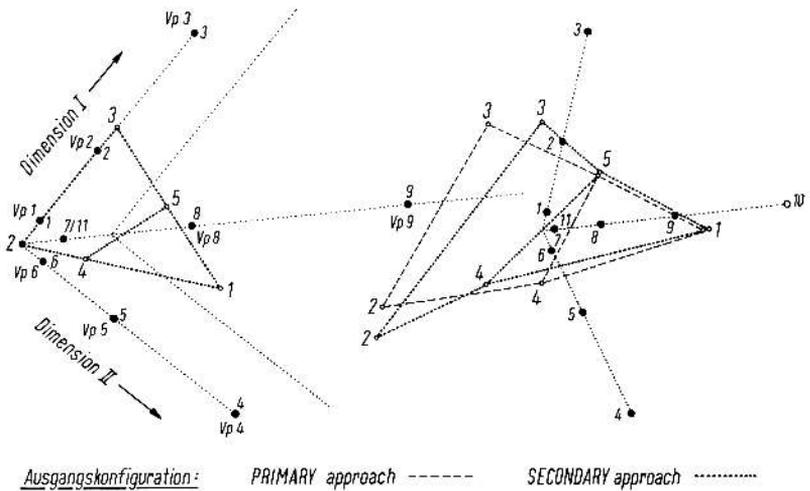


Abb. 3. Ergebnisse des neuen nonmetrischen Verfahrens zu Skalierung dimensionspezifischer Proximitäten zur Rekonstruktion des allen Personen *gemeinsamen* Reizraumes

Kommen wir noch einmal auf Tabelle 3 zurück. Multiplizieren wir die k -te Spalte von U_r^2 und die k -te Zeile von W_r mit -1 , haben wir die dimensionspezifischen Unähnlichkeiten in der k -ten Spalte von U_r^2 in dimensionspezifische Ähnlichkeiten verkehrt, *ohne die Modellaussagen zu verändern*. Es ist in der TUCKER-MESSICK-Analyse (auch in ihrer hier vorliegenden Modifizierung) nicht eindeutig, ob die faktoriellen *Unähnlichkeiten* (= faktoriellen „Distanzenquadrate“) nicht etwa faktorielle *Ähnlichkeiten* sind. Damit dürfte das Modell *weitgehend wertlos* für *empirische* Untersuchungen geworden sein. Eine Taxonomie der Beurteiler dagegen, die von unseren Einwänden relativ unberührt bleibt, kann mit Methoden der automatischen Klassifikation leichter und voraussetzungsloser durchgeführt werden. Wollte man die TUCKER & MESSICK-Analyse (und ihre Modifikation) zu retten versuchen, müßten notwendige Nebenbedingungen bei der least-squares-Minimierung eingeführt werden: Positivität der Elemente in U_r bzw. U_r^2 und in W_r . Damit wäre die Orthogonalität der „points-of-view“ nicht mehr gegeben, was ja auch bei der CARROLL & CHANG-Analyse der Fall ist. Auf die Einhaltung weiterer metrischer Axiome durch die Elemente in U_r bzw. U_r^2 könnte man bei nonmetrischer Anschlußanalyse zur Not verzichten.

Tabelle 5. *Ergebnisse der modifizierten TUCKER & MESSICK-Analyse* (Daten = 2. numerisches Beispiel) *Interindividuelle Differenzanalyse des „A“*

Paar	Matrix U_r^2	$\sqrt{\text{Zeilen-}} \sqrt{\text{summe}}$	Matrix $U_r^2 T_r$	Zeilen- summe	Matrix W_r'	Vp		
2-1	0.587	-0.264	0.568	0.197E2	-8.980E1	0.017	0.074	1
3-1	0.526	-0.399	0.357	8.235E2	-1.355E2	0.068	0.295	2
3-2	0.307	0.673	0.990	4.806E2	2.285E2	0.153	0.663	3
4-1	0.261	-0.117	0.379	4.087E2	-3.991E1	0.292	-0.615	4
4-2	0.065	-0.029	0.189	1.022E2	-9.977E0	0.130	-0.273	5
4-3	0.249	0.374	0.790	3.905E2	1.271E2	0.032	-0.068	6
5-1	0.131	-0.100	0.178	2.059E2	-3.387E1	0.049	0.005	7
5-2	0.316	0.304	0.787	4.942E2	1.032E2	0.198	0.022	8
5-3	0.131	-0.100	0.178	2.059E2	-3.387E1	0.445	0.049	9
5-4	0.124	0.228	0.593	1.937E2	7.747E1	0.791	0.086	10
Die Abweichungsquadratsumme zwischen D^2 und \hat{D}^2 beträgt 3.696E-5						0.049	0.005	11
						Matrix der interindividuellen Gewichte		
		Eigenwerte = 2.45147E06						
		„Points-of-View“		1.15409E05				

Tabelle 6. Ergebnisse des neuen nonmetrischen Verfahrens zur Skalierung dimensionsspezifischer Proximitäten bei der Rekonstruktion des allen Personen gemeinsamen Reizraumes

Dimensionsspezifische Dissimilarities			Konfigurationen				
Paar	$H_{i,j,r}^2$		PRIMARY approach		SECONDARY approach		
2-1	0.59	-0.26	1	0.52755	-0.00001	0.54054	0.00001
3-1	0.53	-0.40	2	-0.52754	-0.35168	-0.54049	-0.36031
3-2	0.31	0.67	3	-0.17588	0.35168	0.00001	0.36030
4-1	0.26	-0.12	4	-0.00001	-0.17587	-0.18030	-0.18016
4-2	0.07	-0.03	5	0.17588	0.17587	0.18024	0.18016
4-3	0.25	0.37					
5-1	0.13	-0.10					
5-2	0.32	0.30					
5-3	0.13	-0.10					
5-4	0.12	0.23					
				Rangkorrelationen (Dissim/Dist)			
				0.75		0.78	
					Stress		
				0.31511		0.30944	

Analyse des nach CARROLL & CHANG modellkonformen Datensatzes mit dem INDSCAL-Algorithmus von CARROLL & CHANG

Wie schon bei der modifizierten TUCKER & MESSICK-Analyse gehen wir bei der Datenkonstruktion von der Reiz- und Beurteilerkonfiguration in Abb. 2 aus. Die rekonstruierten Daten stehen in Tabelle 3. Es ist zu beachten, daß wir aus den „Rohdaten“ in Tabelle 7 elementweise die Quadratwurzel gezogen haben, so daß wir keine globalen Unähnlichkeitsquadrate, sondern nur noch globale Unähnlichkeiten analysieren. Die Ergebnisse des INDSCAL-Algorithmus sind in Tabelle 8 und Abb. 4 dargestellt. Bei der Betrachtung der Ergebnisse fällt ein Resultat auf, das auch schon in anderen Untersuchungen zu

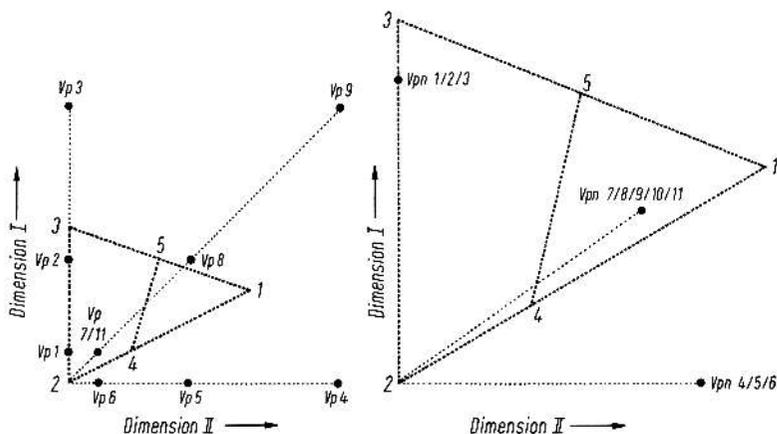


Abb. 4. Ausgangskonfiguration mit „Vpn-Standpunkten“ Reizkonfiguration „A“ (links), Ergebnis der INDSCAL-Analyse (rechts)

Tabelle 7. Modellkonforme „Robdaten“ für das interindividuelle Differenzmodell von CARROLL & CHANG (= elementweise Wurzeln aus der „Rohdatenmatrix“ in Tabelle 3 (Matrix D^2))

Paar	Vpn		Gewichtsmatrix W_r										
	I	II	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.
2-1	9	36	3	6	9	18	12	6	6.7	13.4	20.1	26.8	6.7
3-1	4	36	2	4	6	18	12	6	6.3	12.6	18.9	25.3	6.3
3-2	25	0	5	10	15	0	0	0	5	10	15	20	5
4-1	4	16	2	4	6	12	8	4	4.5	8.9	13.4	17.9	4.5
4-2	1	4	1	2	3	6	4	2	2.2	4.5	6.7	8.9	2.2
4-3	16	4	4	8	12	6	4	2	4.5	8.9	13.4	17.9	4.5
5-1	1	9	1	2	3	9	6	3	3.3	6.3	9.5	12.6	3.3
5-2	16	9	4	8	12	9	6	3	5	10	15	20	5
5-3	1	9	1	2	3	9	6	3	3.3	6.3	9.4	12.6	3.3
5-4	9	1	3	6	9	3	2	1	3.3	6.3	9.4	12.6	3.3

Matrix U_r Matrix D = „Rohdaten“ (= Unähnlichkeitsschätzungen der 11 Vpn auf die 10 Reizpaare)

Tabelle 8. *Analyseergebnisse der nach CARROLL & CHANG modellkonformen Daten (Tabelle 7, Abbildung 4) mit dem INDSCAL-Algorithmus von CARROLL & CHANG*

Koordinaten der Konfiguration			Koordinaten = Gewichte der Beurteiler			
Reiz 1	0.76345	0.09621	Beurteiler	1	0.00029	0.99999
Reiz 2	-0.44154	-0.62596		2	0.00029	0.99999
Reiz 3	-0.44146	0.57927		3	0.00029	0.99999
Reiz 4	-0.04060	-0.38680		4	1.00000	-0.00003
Reiz 5	0.16016	0.33727		5	1.00000	-0.00003
(= Matrix 2 und 3 im INDSCAL)				6	1.00000	-0.00003
				7	0.80898	0.56603
				8	0.81081	0.56393
				9	0.80965	0.56556
				10	0.81099	0.56369
				11	0.80898	0.56603

beobachten war. Die Personen scheinen durch den Algorithmus geclustert zu werden. So haben die Personen 1, 2, 3 und 4, 5, 6 und 7, 8, 9, 10, 11 identische Gewichte, obwohl unsere Ausgangskonfiguration ganz klar zeigt, daß keine identischen Urteilsbewertungen vorkommen. Dahingegen wird die Reizkonfiguration erwartungsgemäß gut rekonstruiert. Es scheint also beim CARROLL-CHANG-Modell Vorsicht bei der Interpretation der Personengewichte angeraten zu sein.

Identischen Gewichten liegen nicht notwendigerweise identische Ähnlichkeitsurteile zugrunde. Wären unsere synthetischen „Daten“ psychologisch sinnvoll, käme man zu dem Schluß, daß Personen, die die Unterschiede zwischen den Reizen zwar strukturell gleich, aber in ihrem Ausmaß intensiver beurteilt haben, durch das CARROLL-CHANG-Modell als identisch bezeichnet worden wären.

Zusammenfassung

Die bei der Abgabe von Urteilen zur Ähnlichkeit von Reizen (z. B. Personen, Parteien, Situationen) anfallenden subjektiven Ähnlichkeitsdaten (Proximitäten) können unter Annahme interindividueller Urteilshomogenität mit metrischen und nonmetrischen multidimensionalen Skalierungsmethoden hinreichend zufriedenstellend analysiert bzw. beschrieben werden (YOUNG, 1975). Unter Annahme interindividuell differenzierter Urteilsstrukturen sind die Verfahren, die von der Urteilerhomogenität („durchschnittliches Individuum“) ausgehen, unbefriedigend. Zur Lösung dieses Problems sind von einer Reihe von Autoren verschiedene mathematische Modelle vorgeschlagen worden, von denen die „Points-of-View“-Analyse von TUCKER und MESSICK (1963) und das INDSCAL-Modell von CARROLL und CHANG (1970) die bekanntesten sind. Die weite Verbreitung dieser Modelle macht eine kritische Untersuchung der Modelleigenschaften notwendig. Ein neu entwickeltes

Verfahren der nonmetrischen Skalierung dimensions- bzw. skalenspezifischer Ähnlichkeiten (Proximitäten) ermöglicht erstmalig den Vergleich beider Verfahren. Es werden an einem Datensatz alte Einwände gegen das TUCKER & MESSICK-Verfahren ausgeräumt. Jedoch zeigt sich, daß das TUCKER & MESSICK-Verfahren wegen seiner unvollständigen mathematischen Formulierung neue bisher noch unbekannte Tücken aufweist. Darüber hinaus fordert auch der CARROLL & CHANG-Algorithmus Aufmerksamkeit. Ein nach den Modellvorstellungen von CARROLL und CHANG konstruierter Datensatz kann durch den Algorithmus nicht psychologisch adäquat reanalysiert werden.

Literatur

- AHRENS, H. J., Zur Systematik der Urteilsbildung bei der Beurteilung westdeutscher Politiker. *Arch. ges. Psychol.* 1967, 119, 57–89.
- AHRENS, H. J. and K. H. STÄCKER, Zur Interdependenz von Perzepten und Konzepten als differentialdiagnostisches Grundlagenproblem. *Arch. ges. Psychol.* 1970, 122, 259–279.
- AHRENS, H. J., *Multidimensionale Skalierung*, Weinheim: Beltz 1974.
- BLOXOM, B., Individual Differences in Multidimensional Scaling. *Research Bulletin* 68–45, Princeton, N. J.: Educational Testing Service 1968.
- BLOXOM, B., The Simplex in Pair Comparisons. *Psychometrika* 1972, 37, 119–136.
- CARROLL, J. D. and J. J. CHANG, Analysis of Individual Differences in Multidimensional Scaling Via an N-Way of 'ECKARDT-YOUNG'-Decomposition. *Psychometrika* 1970, 35, 283–319.
- CARROLL, J. D. and M. WISH, Models and Methods for Three-Way Multidimensional Scaling, in: R. C. ATKINSON, D. H. KRANTZ, R. D. LUCE and P. SUPPES (eds.), *Contemporary Developments in Mathematical Psychology*. San Francisco: Freeman 1973.
- CARROLL, J. D. und M. WISH, Multidimensional Perceptual Models and Measurement Methods, in: *Handbook of Perception (Vol. II), Psychophysical Judgment and Measurement*, E. C. CARTERETTE and M. P. FRIEDMAN (eds.). N.Y.: Academic Press 1974.
- CLIFF, N., The 'Idealized Individual' Interpretation of Individual Differences in Multidimensional Scaling. *Psychometrika* 1968, 33, 225–231.
- ECKART, C. and G. YOUNG, The Approximation of One Matrix by Another of Lower Rank. *Psychometrik* 1936, 1, 211–218.
- FISCHER, G. H., *Einführung in die Theorie psychologischer Tests*. Bern: Huber 1974.
- GUTTMAN, L., A General Nonmetric Technique for Finding the Smallest Euclidean Space for a Configuration of Points. *Psychometrika* 1968, 33, 469–506.
- HARSHMAN, R. A., PARAFAC 2: Extensions of a Procedure for "Explanatory" factor Analysis and Multidimensional Scaling, U.C.L.A. Working Papers in Phonetics, No. 22, March 1972.
- HOPFER, M., *Die Schülerpersönlichkeit im Urteil des Lehrers. Eine dimensionsanalytische Untersuchung zur impliziten Persönlichkeitstheorie*. Weinheim: Beltz 1969.
- HORAN, C. B., Multidimensional Scaling: Combining Observations When Individuals have Different Perceptual Structures. *Psychometrika* 1969, 34, 139–165.
- HORST, P., *Factor Analysis of Data Matrices*. N.Y.: Holt, Rinehart and Winston, 1965.

- JOHNSON, R. M., On a Theorem Stated by ECKART and YOUNG. *Psychometrika* 1963, 28, 259–263.
- JOHNSON, R. M., Pairwise Nonmetric Multidimensional Scaling. *Psychometrika* 1973, 38, 11–19.
- KAISER, H. F., Computer Program for Varimax Rotation in Factor Analysis. *Educ. Psychol. Measmt.* 1959, 19, 269–271.
- KRUSKAL, J. B., Multidimensional Scaling by Optimizing Goodness of Fit to a Nonmetric Hypothesis. *Psychometrika* 1964a, 29, 1–29.
- KRUSKAL, J. B., Nonmetric Multidimensional Scaling: A Numerical Method. *Psychometrika* 1964b, 29, 115–131.
- MESSICK, S. J. and R. P. ABELSON, The Additive Constant Problem in Multidimensional Scaling. *Psychometrika* 1956, 21, 1–15.
- MÖBUS, C., Implizite Gewichtungen am Beispiel der nonmetrischen multidimensionalen Skalierung, in: TACK (Hrsgb.) Bericht über den 29. Kongreß der Deutschen Gesellschaft für Psychologie in Salzburg, 1974, 411–413.
- MÖBUS, C., Nonmetric Multidimensional Scaling Without Disparities and Derivatives: A Rankcorrelation Orientated Approach, *Arch. Psychol.* 1976 (im Druck).
- ROSENBERG, S. and A. SEDLAK, Structural Representations of Implicit Personality Theory, in: L. BERKOWITZ (ed.) *Advances in Experimental Social Psychology*. Vol. 6. N. Y.: Academic Press 1972.
- ROSS, J., A Remark on TUCKER and MESSICK's „Points of View“ Analysis. *Psychometrika* 1966, 31, 27–31.
- SCHNEIDER, D. J., Implicit Personality Theory: A Review, *Psychol. Bull.* 1973, 79, 294–309.
- SCHÖNEMANN, P. H., An Algebraic Solution for a Class of Subjective Metric Models. *Psychometrika* 1972, 37, 441–453.
- SCHULZ, U., Über zwei Modelle der multidimensionalen Skalierung unter Berücksichtigung individueller Differenzen. Inaug. Diss. Marburg 1971.
- SIXTL, F., Gedanken über die Verzahnung von Allgemeiner und Differentieller Psychologie. *Arch. Psychol.* 1972, 124, 145–157.
- STÄCKER, K. H. und H. J. AHRENS, Intra- und interindividuelle Differenzen bei der Beurteilung ausgewählter Holtzman-Tafeln in: MERZ, F. (Hrsgb.) Bericht über den 25. Kongreß der Deutschen Gesellschaft für Psychologie, Göttingen; Hogrefe 1967.
- TORGERSON, W. S., Multidimensional Scaling: Theory and Method. *Psychometrika* 1952, 17, 401–419.
- TUCKER, L. R., Relations Between Multidimensional Scaling and Three-Mode Factor Analysis. *Psychometrika* 1972, 37, 3–27.
- TUCKER, L. R. and S. MESSICK, A individual Differences Model for Multidimensional Scaling. *Psychometrika*, 1963, 28, 333–367.
- WOLD, H., Estimation of Principal Components and Related Models by Iterative Least Squares, in: P. R. KRISHNAIAH (ed.), *Multivariate Analysis*. N. Y.: Academic Press, 1966.
- YOUNG, F. W., On Describing Ordinal Data with a Cardinal Model, *Journal of Mathematical Psychology* (in press).

Anschrift des Verfassers:

CLAUS MÖBUS, Psychologisches Institut der Universität Heidelberg
69 Heidelberg, Hauptstraße 47–51